配合最新教学大纲　与人教版教材同步

超强纠错

《超强纠错》丛书编委会　编

精学途径指南

重点难点分析

高二数学

典型例题讲解

错解误解辨析

北京出版社

超强纠错

高二数学

《超强纠错》丛书编委会　编

北京出版社

图书在版编目(CIP)数据

超强纠错:高二数学/超强纠错丛书编委会编著. - 北京:北京出版社,1999

ISBN 7 - 200 - 02854 - 1

Ⅰ.超… Ⅱ.超… Ⅲ.数学课 - 高中 - 教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 30109 号

超强纠错 高二数学

CHAOQIANG JIUCUO GAOER SHUXUE

《超强纠错》丛书编委会 编

*

北 京 出 版 社 出 版

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码:100011

北 京 出 版 社 总 发 行

新 华 书 店 经 销

北京朝阳北苑印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 大 32 开本 5 印张 123 000 字

1999 年 8 月第 1 版 1999 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—10 000

ISBN 7 - 200 - 02854 - 1/G·1240

定价:7.00 元

《超强纠错》丛书编委会名单

目录

第一部分　代数

第二部分　几何

第一部分　代数

第一章　不等式

(一)知识概述

● **精学指要**

不等式一章主要有三部分内容,即不等式的性质、证明不等式、解不等式.它们的理论基础是不等式的性质.

1.不等式的11条性质中,要求各项均为正数的有4条,它们是:同向不等式相乘,异向不等式相除,不等式的乘方,不等式的开方.此外,“不等式两边取倒数”这一性质在 $ab>0$ 的前提下可以转化为充要条件.

不等式的性质有:

若 $a>b$,则 $b<a$　(对称性);

若 $a>b,b>c$,则 $a>c$　(传递性);

若 $a>b$,则 $a+c>b+c$　(可加性);

若 $a>b,c>0$,则 $ac>bc$;若 $a>b,c<0$,则 $ac<bc$　(可乘性);

若 $a>b\geqslant 0,n\in N$ 且 $n>1$,则 $a^n>b^n,\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

前两条是不等式的基本性质,后三条是不等式的运算性质.

不等式的性质就其逻辑关系而言,可分为推出关系(充分条件)和等价关系(充要条件)两类.在以上的不等式性质及其推论

中，推出关系有：

$$\left.\begin{array}{l}a>b\\b>c\end{array}\right\}\Rightarrow a>c$$

$$\left.\begin{array}{l}a>b\\c>d\end{array}\right\}\Rightarrow a+c>b+d$$

$$\left.\begin{array}{l}a>b\geqslant 0\\c>d\geqslant 0\end{array}\right\}\Rightarrow ac>bd$$

$$\left.\begin{array}{l}a>b\geqslant 0\\n\in N,n\geqslant 1\end{array}\right\}\Rightarrow a^n>b^n,\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$$

等价关系有：

$$a>b\Leftrightarrow b<a$$

$$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$$

当 $c>0$ 时，$a>b\Leftrightarrow ac>bc$

当 $c<0$ 时，$a>b\Leftrightarrow ac<bc$

当 a,b 都是非负数，$n\in N$ 且 $n\geqslant 1$ 时，

$$a>b\Leftrightarrow a^n>b^n$$

$$a>b\Leftrightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$$

证明不等式的基本方法是：比较法、分析法、综合法，另外还可采用反证法、适当放缩法、数学归纳法等.

证明不等式的过程就是对不等式施行一系列的推出变换（或者等价变换），由题设条件出发推出题结结论.

用比较法证明不等式，通常步骤是：做差——分解因式——讨论各因式的符号，或者做差后再配方，当不等式两边都是正数时，也常常采取比商法.

综合法与分析法往往要交叉使用，常常用分析法寻求证题思路，用综合法书写证明过程.在用放缩法或数学归纳法证明不等式时也常常要结合运用分析法.

在运用平均值定理 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 时，要注意两点：一是 a,b 必须是非负数；二是考虑等式成立的条件（当且仅当 $a=b$ 时）.

2. 2个数的均值定理是：如果 $a,b\in R$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（且仅当"$a=b$"时取"="号），它的推论是：如果 $a,b\in R^+$，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取"="号）. 三个数的均值定理是：如果 $a,b,c\in R^+$，那么 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$（当且仅当 $a=b=c$ 时取"="），它的推论是：如果 $a,b,c\in R^+$，那么 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$（当且仅当 $a=b=c$ 时取"="号）. 在这两个定理及二个推论中，只有两个数的均值定理不要求 a,b,c 是正数.

3. 利用均值定理求最值，它的理论基础是：设 p、k 为常数，$a,b,c\in R^+$，

(1)若 $a\cdot b=k$，当且仅当 $a=b$ 时，有 $a+b$ 的最小值 $2\sqrt{k}$；

(2)若 $a+b=p$，当且仅当 $a=b$ 时，有 $a\cdot b$ 的最大值 $\frac{p^2}{4}$；

(3)若 $a\cdot b\cdot c=k$，当且仅当 $a=b=c$ 时，有 $a+b+c$ 的最小值 $3\sqrt[3]{k}$；

(4)若 $a+b+c=p$，当且仅当 $a=b=c$ 时，有 $a\cdot b\cdot c$ 的最大值 $\frac{p^3}{27}$.

4. 一元二次不等式类型与解见表 1-1.

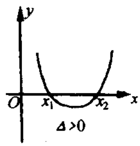
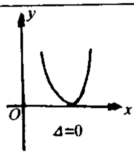
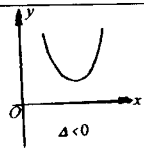
5. 无理不等式：

$$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)\geqslant 0,\\ f(x)>g(x).\end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)>0,f(x)<[g(x)]^2.\end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0,g(x)\geqslant 0,\\ f(x)>[g(x)]^2;\end{cases}\text{或}\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)<0.\end{cases}$$

表 1－1　一元二次不等式类型与解$(a>0)$

图像	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$ax^2+bx+c\leqslant 0$
	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x_1<x<x_2$	$x\leqslant x_1$ 或 $x\geqslant x_2$	$x_1\leqslant x\leqslant x_2$
	$x\in R$, $x\neq x_1,x_2$	$\varnothing$	R	$x=x_1=x_2$
	R	$\varnothing$	R	$\varnothing$

6. 含绝对值的不等式的性质有：

(1) $|x|<a,(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$;

(2) $|x|>a,(a>0)\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$;

(3) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|,\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\quad(b\neq 0)$;

(4) $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$;

(5) $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$.

7. 含绝对值的不等式的比较：

$$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x);$$

$$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)<-g(x)\text{或 }f(x)>g(x).$$

8. 解指数不等式：

$$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}a>1\text{ 时},f(x)>g(x).\\0<a<1\text{ 时},f(x)<g(x).\end{cases}$$

9. 解对数不等式：

$$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow$$

当 $a>1$ 时,原式 $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\\f(x)>g(x);\end{cases}$

当 $0<a<1$ 时,原式 $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\\f(x)<g(x).\end{cases}$

10. 解不等式的实质:是对不等式施行一系列等价变换,即同解变换,使之变成最简不等式的形式.为保证变换过程的等价性以及解题的灵活性,应注意以下几点:

(1)当不等式两边同乘以一个数时,一定要考虑该数的符号,以便确定不等号是否换向.当无法确定时就必须分情况讨论.

(2)当不等式两边乘方时,要求两边都是非负数.如解不等式 $\sqrt{f(x)}>g(x)$,为了去掉根号,需要两边平方,这时就要根据 $g(x)$ 的取值来分情况讨论,原不等式等价于

$$\begin{cases}g(x)\geqslant 0\\f(x)\geqslant 0\\f(x)>[g(x)]^2\end{cases}\quad 或\begin{cases}g(x)<0\\f(x)\geqslant 0\end{cases}$$

这里要注意两点:①对于 $g(x)$ 的分类要全,常有学生漏掉等于零的情况;②第一个不等式组中的 $f(x)\geqslant 0$ 可省略,这是因为在 $f(x)>[g(x)]^2$ 成立的前提下 $f(x)\geqslant 0$ 必成立.

(3)要充分利用图像来估测或验证不等式的解集.对于解一元二次不等式,要充分利用所对应的二次函数的图像.如解不等式 $\sqrt{2x+5}>x+1$,不解这个不等式就可猜测解集应是 $\left[-\frac{5}{2},x_0\right)$.这一点可以从函数 $y=\sqrt{2x+5}$ 及 $y=x+1$ 的图像中确定,其中 x_0 是这两个图像交点的横坐标.

● **知识点**

1. 不等式的性质：不等式的概念和不等式的五个性质定理，以及比较两个实数大小的作差比较法.

2. 不等式的证明：证明不等式的几种常用方法有比较法、分析法、综合法以及均值不等式法；掌握均值不等式的应用条件；应用上述方法解决有关不等式的证明.

3. 不等式的解法：一元二次不等式组、高次不等式、分式不等式、无理不等式、指数不等式及某些绝对值不等式的解法.

● **重点、难点**

1. 不等式的性质

(1)重点：掌握不等式的基本性质.

(2)难点：不等式性质的灵活应用.

2. 不等式的证明

(1)重点：均值不等式及证明不等式的常用方法.

(2)难点：证明不等式时方法的选取及均值不等式的应用和放缩尺度的掌握.

3. 不等式的解法

(1)重点：掌握各种类型不等式的基本解法.

(2)难点：含绝对值的不等式及含参数的不等式的解法.

(二)超强纠错

● 解不等式 $2x(x+1)<3(x+1)$.

【错解】 原不等式两边同除以 $x+1$，得

$2x<3$，

$\therefore \quad x<\dfrac{3}{2}$.

$2x^2+2x<3x+3$ $\frac{1}{2}$ -3

$2x^2-x-3<0$

$x=\frac{3}{2}$ $x=1$

$1<x<\frac{3}{2}$

【正解】 (略)

【辨析】 错解在于没有根据不等式的性质进行运算，对不等式进行除法必须考虑除式是正值还是负值，从而确定不等号方向

是否改变，因此，若要对不等式进行除法运算，就要分情况讨论.

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x+1>0,\\2x<3,\end{cases}\text{和}(\mathrm{II})\begin{cases}x+1<0,\\2x>3,\end{cases}$$

由(Ⅰ)，得$-1<x<\frac{3}{2}$，而(Ⅱ)无解.

∴　原等式的解为$-1<x<\frac{3}{2}$.

但是这样做较繁，一般解不等式尽量避免采用除法运算.本题若通过移项整理，得

$$2x^2-x-3<0,$$

就可简单地解得

$$-1<x<\frac{3}{2}.$$

解不等式$\frac{2}{4x-5}<\frac{3}{x+7}$.

【错解】　不等式两边取倒数，改变不等号方向，得

$$\frac{4x-5}{2}>\frac{x+7}{3},$$

整理，得

$$12x-15>2x+14,$$

即
$$10x>29,$$

∴　$x>\frac{29}{10}$.

【正解】　移项，得

$$\frac{2}{4x-5}-\frac{3}{x+7}<0,$$

通分并整理，得

$$\frac{-10x+29}{(4x-5)(x+7)}<0$$

∴　不等式的解为$x>\frac{29}{10}$与$-7<x<\frac{5}{4}$.

【辨析】　因为根据不等式性质，只有当不等式的两边同号时，

两边取倒数并改变不等号的方向才是正确的.错解未考虑这一性质,导致失解.

● 解不等式$\frac{3x-3}{x-1}>2x-7$.

【错解】 不等式两边同乘以 $x-1$,得

$$3x-3>2x^2-9x+7,$$

移项化简,得

$$2x^2-12x+10<0,$$

$$\therefore \quad 1<x<5.$$

【正解】 移项通分,整理得

$$\frac{2x^2-12x+10}{x-1}<0,$$

解不等式$\frac{(x-5)(x-1)}{x-1}<0$,得不等式的解为

$$x<5, x\neq 1.$$

【辨析】 错解中,不等式两边同乘 $x-1$,是套用解分式方程去分母的做法,但是这种套用不符合不等式的性质,解分式不等式一般不这样做.

● 解不等式$\frac{5-4x}{2x+3}\leqslant 1$.

【错解】 移项,得

$$\frac{2-6x}{2x+3}\leqslant 0,$$

于是,得到不等式组

$$\begin{cases}2-6x\geqslant 0\\2x+3\leqslant 0\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}2-6x<0\\2x+3\geqslant 0,\end{cases}$$

解得不等式的解为 $x\geqslant\frac{1}{3}$或 $x\leqslant-\frac{3}{2}$.

【正解】 (略)

【辨析】 错解的错误有两点.其一没有注意到分式的分母不

能为零，而得 $x \leqslant -\dfrac{3}{2}$ 是错误的. 其二解不等式是求所有的解或解集，在得到两部分的解后，其中不宜写“或”，应写“与”，故不等式的解应为 $x \geqslant \dfrac{1}{3}$ 与 $x < -\dfrac{3}{2}$.

$\sqrt{f(x)} \le g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$

● 解不等式 $\sqrt{4x^4+5x^2-9} \leqslant 2x^2+1$.

【错解】 原不等式两边平方，得

$$4x^4+5x^2-9 \leqslant 4x^4+4x^2+1,\ x^2 \leqslant 10,$$

∴ 原不等式的解为 $-\sqrt{10} \leqslant x \leqslant \sqrt{10}$.

【正解】 原不等式可化为：

$$\begin{cases} 4x^4+5x^2-9 \geqslant 0, & ① \\ 4x^4+5x^2-9 \leqslant 4x^4+4x^2+1, & ② \end{cases}$$

解①得 $x \leqslant -1$ 和 $x \geqslant 1$;

解②得 $-\sqrt{10} \leqslant x \leqslant \sqrt{10}$.

∴ 原不等式的解为 $-\sqrt{10} \leqslant x \leqslant -1$ 与 $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{10}$.

【辨析】 用 $x=0$ 代入原不等式，不等式左边无意义，错解错在忽视了左边算术根的定义域.

● 解不等式 $\sqrt{5-x^2} \geqslant -x^2-1$.

$5-x^2 \geq 0$

$5 \geq x^2$

【错解】 不等式两边同时平方，得

$$5-x^2 \geqslant x^4+x^2+1,$$

移项化简得

$$(x^2+4)(x^2-1) \leqslant 0,$$

∴ $x^2-1 \leqslant 0$.

故不等式的解为 $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

【正解】 （略）

【辨析】 将 $x=2$ 代入原不等式，不等式显然成立，而 $x=2$ 不在错解结论的范围内，可见错解是有错误的. 产生错误的原因是不等式两边平方所得的不等式与原不等式不是同解不等式. 只有

当不等式两边都是正数时，这种变换才是同解的. 其实本题中原不等式的右边总是负的，只要左边有意义，就是非负的，总能成立. 故原不等式的解为

$$5-x^2\geqslant 0,$$

即 $$-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant\sqrt{5}.$$

● 解不等式$\sqrt{4x^2-10x-5}<2x+5$.

【错解】 由原不等式得

$$\begin{cases}4x^2-10x-5\geqslant 0,\\4x^2-10x-5<(2x+5)^2,\end{cases}$$

解不等式组，得

$$\begin{cases}x\geqslant\dfrac{5+3\sqrt{5}}{4}\text{和 }x\leqslant\dfrac{5-3\sqrt{5}}{4},\\x>-10,\end{cases}$$

∴ 不等式的解为 $x\geqslant\dfrac{5+3\sqrt{5}}{4}$和$-10<x\leqslant\dfrac{5-3\sqrt{5}}{4}$.

【正解】 由原不等式得不等式组

$$\begin{cases}4x^2-10x-5\geqslant 0,\\2x+5>0,\\4x^2-10x-5<(2x+5)^2,\end{cases}$$

解不等式组，得

$$\begin{cases}x\geqslant\dfrac{5+3\sqrt{5}}{4}\text{和 }x\leqslant\dfrac{5-3\sqrt{5}}{4},\\x>-\dfrac{5}{2},\\x>-10.\end{cases}$$

∴ 不等式的解为$-\dfrac{5}{2}<x\leqslant\dfrac{5-3\sqrt{5}}{4}$和 $x\geqslant\dfrac{5+3\sqrt{5}}{4}$.

【辨析】 取 $x=-3$ 代入原不等式，得到右边为负值，显然不等式不成立，产生错误的原因是平方时忽视了右边取正值的范围.

● 解不等式$\sqrt{2x-15}-\sqrt{x+16}>1$.

【错解】 由根式$\sqrt{2x-15}$与$\sqrt{x+16}$得

$$\begin{cases}2x-15\geqslant 0\\ x+16\geqslant 0,\end{cases}$$

在 $x\geqslant\frac{15}{2}$的条件下,不等式两边同时平方,得

$$2x-15-2\sqrt{(2x-15)(x+16)}+x+16>1,$$

整理得

$$3x>2\sqrt{(2x-15)(x+16)}. \qquad ①$$

在等式①两边再同时平方,得

$$9x^2>4(2x^2+17x-240),$$
$$x^2-68x+960>0,$$
$$(x-20)(x-48)>0,$$

解不等式组

$$\begin{cases}(x-20)(x-48)>0,\\ x\geqslant\frac{15}{2},\end{cases}$$

得原不等式的解为$\frac{15}{2}\leqslant x<20$ 和 $x>48$.

【正解】 移项,得$\sqrt{2x-15}>1+\sqrt{x+16}$,于是得到不等式组

$$\begin{cases}2x-15>0,\\ x+16\geqslant 0,\\ 2x-15>1+x+16+2\sqrt{x+16},\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x-32>0,\\ x-32>2\sqrt{x+16},\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x>32,\\ x^2-64x+1024>4(x+16),\end{cases}$$

亦即 $$\begin{cases}x>32,\\ x^2-68x+960>0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 32, \\ (x-20)(x-48) > 0, \end{cases}$$

故原不等式的解为 $x > 48$.

【辨析】 取 $x = 10$ 代入原不等式,左边 $=\sqrt{5} - \sqrt{26} < 0$,显然 $x = 10$ 不是原不等式的解,可见解是错误的.其错误是将原不等式两边平方时,虽在 $x \geqslant \frac{15}{2}$ 条件下,但并不能保证

$$\sqrt{2x-15} - \sqrt{x+16} > 0.$$

于是原不等式与不等式组

$$\begin{cases} x \geqslant 7.5 \\ 3x > 2\sqrt{(2x-15)(x+16)} \end{cases}$$

不同解.按此解法考虑到所有条件原不等式与下列不等式组同解

$$\begin{cases} 2x-15 \geqslant 0, \\ x+16 \geqslant 0, \\ 2x-15 > x+16, \\ 3x > 2\sqrt{(2x-15)(x+16)}, \end{cases}$$

故不等式的解为 $x > 48$.但这样解法较繁.在下面的正解中介绍一种较简单的解法.

● 解不等式 $\log_{x^2+1}(3x^2+2x-5) > \log_{x^2+1}(x-3)$.

【错解】 $\because$ $x^2+1>1$,

由对数函数的单调性,得

$3x^2+2x-5>x-3$ $3x^2+2x-5>x-3$

$3x^2+x-2>0$, $3x^2+x-2>0$

1 1

3 -2

$\therefore$ 不等式的解为 $x < -1$ 或 $x > \frac{2}{3}$.

【正解】 当 $x \neq 0$ 时,$x^2+1>1$.由对数函数的单调性,得

$$\begin{cases} 3x^2+2x-5 > x-3, \\ 3x^2+2x-5 > 0, \\ x-3 > 0. \end{cases}$$

解不等式组,得对数不等式的解为 $x > 3$.