

北京市东城区图书馆



012Z0320580

天才趣味数学

1

64个千奇百怪的数学疑问

——带你领略数学的奥妙

仲田纪夫(日)



中国民族摄影艺术出版社

仲田纪夫

1925年生于东京。

东京高等师范学校数学系,东京教育大学教育学系毕业。

(原)东京大学教育学部附属中学、高校教师,东京大学、筑波大学、电气通信大学教师(曾经)埼玉大学教育学部教授,埼玉大学附属中学校长(现在)“社会数学”学者,作为数学旅行作家而活跃在社会上。“日本数学教育学会”名誉会员。他的旅行日记连载在“日本数学教育学会”会志,学研“绿色的伙伴”,JTB 宣传杂志上。

曾在以下节目中出场。NHK 教育电视“中学生的数学”(25 年),NHK 综合电视“什么问题 Q 电视”(1 年半),“午间的礼物”(一星期),文化广播电台“数学冲击”。

1988 年在中国北京进行了讲演。1998 年参加 NHK“电台谈话室”(5 天)节目。

主要著作:

《有趣的概率》(日本实业出版社),《人类社会与数学》I·II (法政大学出版局),正·续《数学故事》(NHK 出版),《数学骗术》《无限的不可思议》《漫画讲述的数学史》(讲谈社),《灵感智力题》上·下,《浪漫数学纪行》1~3 (日科技连),《数学的多来米发》1~10,《数学的神秘》1~5,《有趣的社会数学》1~5,《用智力题学习 21 世纪的常识数学》《趣味数学》1~4,《防止痴呆与“提高智能”! 数学快乐智力题》(黎明书房),《探访数学始祖系列》8 卷(东苑设)其他。有多数著作被翻译成中文,韩语。

爱好是剑道(7 段),草月流华道(1 级师范),都山流尺八道,弓道(2 段)。

前言

“提问”和“疑问”

“提问是一时之耻，不知是一生之耻。”我们经常会说这样的话，但是，我们又常常感到要真正做到“不耻下问”却并非那么容易。

比如，下课后我们找到老师想问问课上没有搞懂的内容，却听到老师发了一顿牢骚：

“我都讲过了，讲课的时候你听什么呢！”

“你居然问这么简单的问题。”

“该听讲的时候不听，你自己去查吧。”

得到的结论就是“去提问，就要挨批评”，说俗点就是会“挨老师的一顿臭骂”。这是许多学生的看法，长此以往，会给学生们留下这样的消极印象：“问就是耻辱。”

另外，即便是想“提问”，如果不把自己想要问的问题整理清楚就去问老师的话，你听到的恐怕是“你究竟想问什么？”，“如果有问题，先把你要问的问题理顺了，你自己先搞清楚要问什么，然后再来问我”等等，所以，在这一点上一定要注意。

说来说去，就“提问”而言还是很难的，看来“有问题”也是很难办的一件事。

那么，本书的存在价值



不认真对待学生的问题，是导致他们讨厌数学、成绩落后的原因。

也就在这里。

本书例举了初中、高中数学内容中的共计“64 个问题”,对其进行了解答。作者曾执教初中、高中达 25 年之久,在他的教师生涯中曾记录了不少学生提出的问题,并且曾担任大学讲师 20 年,在这 20 年对教材研究的体验及论证的基础之上,并从“学生的问题、提问笔记”中选择出一些材料,综合、归纳、编辑了此书。

以问答形式深化内容

在回忆初中、高中做教师的体验的同时,提出当时的学生们的各种形式的问题——疑问、奇怪的问题、少见的问题、愚蠢的问题,或者比较好的问题。

为了便于读者阅读及理解,并使本书的内容充满趣味性,我们是这样设计的:以道志洋博士为老师,还有两个精灵古怪的学生与他配合,进行一番多少有些离题的奇妙的问与答,对各种问题进行解说。

在问答形式中,我们采取的是阶梯式,一步一步往上进行,这样比较容易理解,如果在哪个问题上有不明之处,那么,在这个问题点上可以多加注意。

教科书上没有的视点和素材

说到“数学奇妙问答”,我们姑且先不提“问”,在“回答”的方式上,我们是力求新颖独特的。

其主要特征除了上面提到的各种问题,还有:你想知道的疑问的内容和详尽的解说。

- 涉及到某一领域的历史典故的广博的知识
- 介绍一些像智力题那样的充满趣味性的内容及其发展
- 与初中、高中内容相比,更高层次的思考方法

·介绍走向社会的一些常识,最新的数学信息

本书将通过上述方法对问题进行解说,我们期待着人们今后能够再次燃起学习数学的热情。我们不会说“本书将揭晓所有的疑问!”,但是,我们希望通过此书您能学到对疑问的挑战法和解决的手段。

1999年4月1日——“愚人节”

作者

第一章 数式和计算的问题 1

- 1 “不能用 0 除”是为什么? 2
- 2 怎样证明“质数有无数个”? 5
- 3 “神圣的数字”是什么? 9
- 4 计算圆周率,就是求出有多少位数吗? 13
- 5 $1=0.99999\cdots$ 中的 $=$ 符号不奇怪吗? 16
- 6 分数的除法为什么还可以反过来计算? 19
- 7 $(-)\times(-)$ 为何得正? 22
- 8 $a\neq 0$, 且 $0^a=0, a^0=1$ 。那么, 0^0 是多少? 25
- 9 代数式有什么帮助吗? 28
- 答案 31

第二章 计量与测量的问题 35

- 1 为什么只有时间、角度用 60 进位? 36
- 2 制定“国际单位”的必要性是? 39
- 3 格林威治天文台的经线是 0° 吗? 42
- 4 用纸巾测量高度的方法? 45
- 5 站在富士山顶你能看到多远? 48
- 6 三角函数的记号 $\sin$ 从何而来? 51

7	求曲线图形面积的方法?	54
8	图形中的2倍作图,该怎样做呢?	57
9	在向量中“1边等于2边之和”?	60
	答案	63

第三章 图形和证明的问题 67

1	“作图法”为什么始于古埃及?	68
2	做图法是走向“图形证明的学问”之路?	71
3	古希腊只是逻辑比较发达吗?	74
4	“正多面体之美”美在何处?	77
5	“投影图”是来自于要塞设计吗?	80
6	到底什么是“几何学”?	83
7	3个“美丽的定理”及其他的证明法是?	86
8	为什么要把“地图涂色区分”?	89
9	阿基琉斯能追上乌龟吗?	92
	答案	95

第四章 函数和图表的问题 99

1	“1比1的对应”是怎么回事?	100
2	比和比例有何不同?	103
3	反比例的图表并不是折线?	106
4	“函数”这个词意味着什么?	109
5	从大炮中诞生了函数,是真的吗?	112

6	用功程度和成绩之间有一定的关系吗?	115
7	$y=2x$, $y=-x+3$, 这 2 个 y 相同吗?	118
8	x^3+x^2+x , 就是(立方体)+(正方形)+(线段)吗? ...	121
9	函数与方程式的图表的不同之处在于?	124
	答案	127

第五章 统计、概率和利用的疑问 131

1	“数字的表”为何不叫做统计?	132
2	“滥用平均”指的是什么?	135
3	代表值的种类及使用方法?	138
4	为什么偏差值不好呢?	141
5	“概率”,是何时、在哪里诞生的?	144
6	尼斯湖有“尼斯怪兽”吗?	147
7	“中奖梦”与期待值的不可思议性?	150
8	抽签的“先”与“后”,哪个更有利?	153
9	“保险”与数学有着什么样的关系?	156
	答案	159

第六章 应用题与解法的疑问 163

1	数学中为何会有应用题?	164
2	世界上最古老的应用题是什么?	167
3	解题方法是如何演变的?	170
4	代数一词从何而来?	173

5	算法是人名的讹音吗?	176
6	所谓的机智与幽默的“印度问题”是?	179
7	〇〇算是出自《尘劫记》吗?	182
8	“老鼠会”和“老鼠算”的关系?	185
9	历久弥新的数学 L.P.是什么?	188
	答案	191

第七章 古今东西方的难题和智力题 195

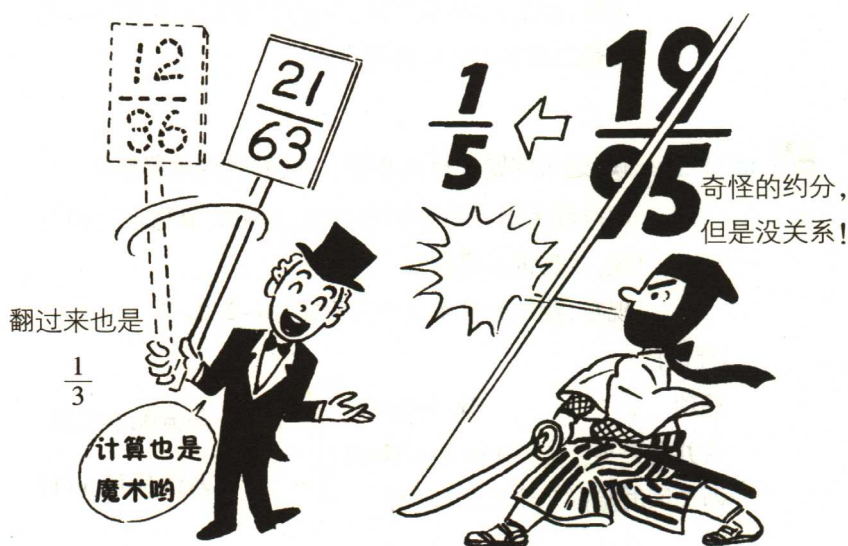
1	有名的看似简单实则很难的问题是什么?	196
2	“一笔画”的诞生和诞生之后?	199
3	叫做“平安文学美女”的智力题是什么?	202
4	在少有的问题、奇怪的问题中登场的人物是?	205
5	日本智力题中的“蒙面算”的奇妙之处在于?	208
6	制作栅栏和分割的智慧?	211
7	“驴之桥”之简单又复杂的定理是?	214
8	所谓神的比例和纸的比例是?	217
9	“一千零一夜故事”中的山鲁佐德的数字?	220
10	最后,数学家的遗言!	223
	答案	226

图片:笕 都夫

数式和计算的问题

第一章

“计算魔术师”的手法——好奇怪的演算却是正确的！



1

“不能用0除”是为什么？



道博士：喂，喂，看你一大早就阴沉着脸，怎么了？



小 明：咳，我又碰壁了，碰到了“数学之壁”。



道博士：那可以说是“为了明白而迈出的一步”。不过你这次碰壁是怎么回事，给我讲讲。



小 明：是关于“0”。0与其他数字同样可以进行加减乘法的运算，但是，除法就不行，不是说“不能用0除”吗，我就是为这个例外而闷闷不乐的。



道博士：噢，这个问题提得真不错。来，我给你解释解释。可能我考虑得有些拐弯抹角，途中要靠你自己去发现，并告诉我理由。

现在，我们就来解这个方程式： $3x-2=2x-3$

[提示]

移项

$$3x+3=2x+2$$

合并同类项

$$3(x+1)=2(x+1)$$

两边同时除同一个式子 $3=2?$

← ----- 与分配法相反
← ----- 两边都有(x+1)



小明：老师，好奇怪哟。要按一般的做法应该是 $3x-2x=-3+2$

所以，答案是 $x=-1$

老师的解题方法真奇妙呀，但是这样看起来一目了然。



道博士：同样的问题，如果做法不同就会有二个答案。并且，其中的一个答案很奇怪。是不是？可是它的奇怪之处在哪里呢？



小明：答案的 $x=-1$ ，既是 $x+1=0$ 。

是这么回事啊，老师刚才在解题当中，就是把两边“用 0 做除数计算”的。



道博士：关于 0 的计算规则最早可追溯到 6 世纪左右的印度，比如说……，

你先来说说下面关于 0 的式子的答案有几个？

- ① $0 \div a (a \neq 0)$ ② $a \div 0 = a (a \neq 0)$ ③ $0 \div 0$



小明：好像没有多难啊。因为 0 就是“没有”，所以

- ① $0 \div a = 0$ ② $a \div 0 = a$ ③ $0 \div 0 = 1$

我们把 a 当作 3 或 5 来考虑，大概就是这样子吧？



道博士：你呀，总是用奇怪的常识来解题，所以要碰壁了。

当碰到不明白的问题、新的问题的时候,关键是要“回到前一阶段来考虑”。

在这个问题中,我们假设答案是 x ,回到乘法计算上。

则:① $0 \div a = x$ ② $a \div 0 = x$ ③ $0 \div 0 = x$

$$0 = ax$$

$$a = 0x$$

$$0 = 0x$$

这样来考虑的话, x 的值是多少呢?



小明: 原来如此啊。

① 式中, $x=0$,这个比较简单。

② 式中,不管什么数字乘以0都不得 a ,所以,这个 x 是不存在的(一般说成“无解”,答案是不可能的)。

③ 式中, x 可以是任何数。是这么回事吧(“答案无数”指答案不定)。



道博士: 对对。我们从②和③,就可以知道“用0除”除外的理由了吧。



问题千奇百怪

(1) 0是偶数还是奇数? 还有,0是正数还是负数?

(2) $\frac{0}{0}$ 能说成是分数吗? 它的值是多少?



怎样证明“质数有无数个”？



小丽：老师！1好像不是质数（只能被1和自身整除的自然数）。

约数的个数	自然数的分类
1个	—— 1
2个	—— 质数
3个以上	—— 合数



道博士：除了1还有0。这两个数真是很麻烦的家伙。自然数（正整数）

有无数个，从“约数的个数”这个观点来看的话，可以按右图所示分成3类。只有1是很特别的。



小丽：为什么会有“质数”的想法呢？



道博士：据说是距今2500年前的古希腊数学家毕达哥拉斯，通过对偶数、奇数、完全数等的自然数的性质，对其分类而发现了质数。他是宗教家，又是哲学家，他是从“万物皆为数”的思想出发而考虑的。他是一个“赋予数字生命”的人啊。



小丽：质数之后又怎么样了？



道博士：公元前3世纪的欧几里得归纳、整理了古希腊300

年间庞大资料,编辑成 13 卷《几何原本》,书中就已证明了“质数存在有无数个”,同时代的厄拉多塞根据“筛子”而设计出筛选质数的方法。



小 丽: 实际上,老师,我想知道他是怎样证明有无数个的。



道博士: 质数,是整数研究中的重要数,所以,即使现在我们用计算机求“庞大的质数”(现在只不过求出了 25 万 8716 位的质数),仍旧是“厄拉多塞的筛子”的方法。关于“质数的公式”,19 世纪的高斯曾下了一番功夫,但无功而返。



小 丽: 那么,发现了公式,就能扬名世界了吧?



道博士: 当然了。菲尔兹数学奖,文化勋章,等等……考虑考虑向这个无数个挑战吧。



小 丽: 可是从哪下手呢? 首先这就是个问题呀!



道博士: 这种证明,可使用数学上的叫做“背理法”的间接法。也就是说,“把它看做是有限的。这样就会有一个最大的质数 A”。在这个假设的基础之上,我们来看看下面的情况。

我们给质数的积加上 1，按顺序来考虑所得到的数字，这样：

$2 \times 3 \quad +1=7$ (质数) (不能用 2,3 除的数)

$2 \times 3 \times 5 \quad +1=31$ (质数) (不能用 2,3,5 除的数)

$2 \times 3 \times 5 \times 7 \quad +1=211$ (质数) (不能用 2,3,5, 7 除的数)

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times A + 1 = P \quad \begin{cases} \text{① 质数 (比 } A \text{ 大的数)} \\ \text{② 合数 (从 } 2 \sim A \text{ 的质数中不能除的数)} \end{cases}$$

下面就要进入正题了，好好听啊。

① P 为质数的话，就比最大的质数 A 还要大，所以，与假设矛盾。所以也就是说不是有限的。

② P 为合数的话，在 P 的约数中存在比 A 大的质数，A 就不是最大的质数了，矛盾。

不管哪种情况，A 都不是最大的质数。这就说明“质数是有限的这个假设是错误的，实际上它就是无限的”。结论出来了！！



小丽：好难啊。一时半会儿我还绕不过弯来，待我慢慢琢磨吧。不管怎么说欧几里得真是个聪明人啊。



道博士：这可是 2300 年前的人考虑的，我们现代的人可不能输给他们哟。



- (1) 为什么,在质数中要把1排除在外?
- (2) “厄拉多塞的筛子”是怎么回事?