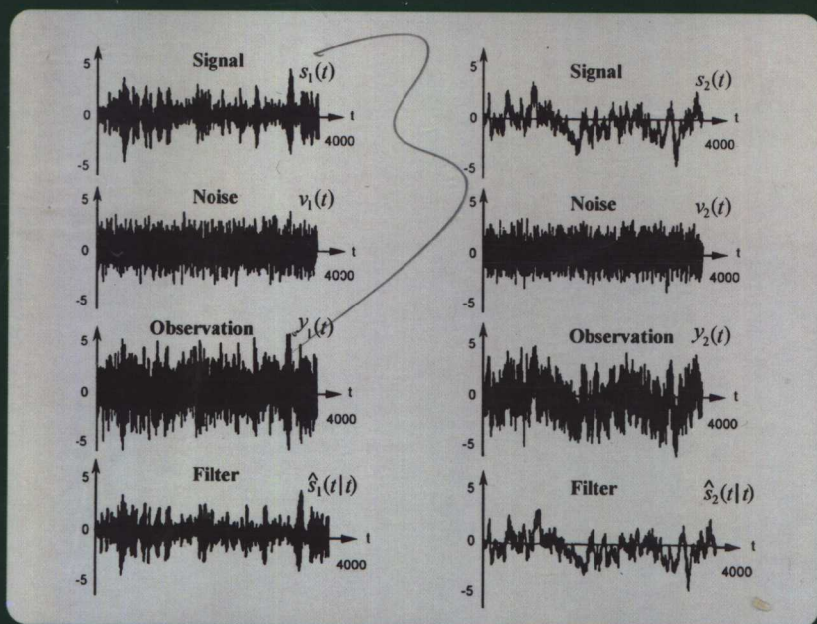


Optimal Estimation Theory with Applications  
— Modeling, Filtering, and Information Fusion Estimation

# 最优估计理论 及其应用

— 建模、滤波、信息融合估计

邓自立 著



哈尔滨工业大学出版社

国家自然科学基金(60374026)资助

# 最优估计理论及其应用

——建模、滤波、信息融合估计

邓自立 著

Optimal Estimation Theory with Applications  
——Modeling, Filtering, and Information Fusion Estimation

DENG ZILI

哈尔滨工业大学出版社

Harbin Institute of Technology Press

哈尔滨·Harbin

## 内 容 简 介

本书用邓自立教授独创的现代时间序列分析方法提出了关于系统状态或信号的最优估计和最优融合估计的新理论、新方法和新算法,并给出在目标跟踪系统中的仿真应用。

全书共分七章,包括时间序列 ARMA 模型和状态空间模型,最小二乘法参数估计,ARMA 时间序列预报,经典 Kalman 滤波理论及多传感器最优信息融合 Kalman 滤波理论,基于现代时间序列分析方法的最优滤波理论及最优信息融合滤波理论。内容新颖,理论严谨,并含有大量仿真例子。

本书可作为高等学校控制理论与控制工程、信号处理、检测与估计等专业的研究生及本科高年级学生教材,也可供在信号处理、控制、通信、航天、制导、雷达跟踪、石油地震勘探、故障诊断、卫星测控、GPS 定位、多传感器信息融合、机器人、经济、生物医学等领域工作的科技人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

最优估计理论及其应用:建模、滤波、信息融合估计/邓自立著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2005.6

ISBN 7 - 5603 - 2152 - 6

I .最… II .邓… III .最佳化-估计-理论  
IV .0211.67

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 041648 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社  
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006  
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>  
传 真 0451 - 86414049  
印 刷 肇东粮食印刷厂  
开 本 787×1092 1/16 印张 31.25 字数 708 千字  
版 次 2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 7 - 5603 - 2152 - 6/TP·215  
印 数 1~3 000  
定 价 45.00 元

# 前 言

最优估计问题有三类。第一类是建模或系统辨识中的模型参数估计问题。第二类是时间序列、信号或状态预报、滤波和平滑问题,简称最优滤波问题。第三类是多传感器信息融合状态或信号估计问题,简称融合估计问题。

传统的最优估计理论主要包括最小二乘法和经典 Kalman 滤波理论。本书以作者独创的现代时间序列分析方法作为方法论,系统地提出了最优估计新理论、新方法和新算法及其在跟踪系统中的应用,构成了现代最优估计理论,可应用于信号处理、控制、通信、航天、制导、雷达跟踪、石油地震勘探、故障诊断、卫星测控、GPS 定位、多传感器信息融合、机器人、经济、生物医学等领域。

全书分为七章。第一章介绍 ARMA 模型和状态空间模型。第二章介绍最小二乘法及由作者提出的多种两段最小二乘法算法。第三章介绍经典 Kalman 滤波理论及其新进展,特别介绍了由作者提出的统一和通用的白噪声估计理论和时域 Wiener 方法。第四章介绍经典的 ARMA 时间序列预报方法,特别介绍了由作者提出的带观测噪声的 ARMA 时间序列预报方法及非平稳时间序列预报方法。第五章介绍由作者独创的最优滤波新的方法论——现代时间序列分析方法。第六章介绍由作者提出的在线性最小方差意义下的三种最优信息融合加权准则及基于经典 Kalman 滤波的多传感最优信息融合滤波理论。第七章介绍由作者提出的基于现代时间序列分析方法的多传感器最优信息融合滤波理论。书中给出了大量仿真例子和算例,特别以目标跟踪系统为应用背景,给出了许多信息融合跟踪滤波器的仿真例子,说明了所提出的结果的有效性和可应用性。

本书以现代时间序列分析方法、白噪声估计理论和所提出的多传感器最优信息融合滤波新理论为特色。

继 Kalman 滤波方法和 Wiener 滤波方法之后,现代时间序列分析方法是解决最优滤波问题新的方法论。作者的专著《最优滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法》(哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2000)、《卡尔曼滤波与维纳滤波——现代时间序列分析方法》(哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2001)和《自校正滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法》(哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2003),以及本书构成了现代时间序列分析方法的完整的理论体系。它以 ARMA 新息模型和白噪声估计理论作为基本工具解决最优估计问题。该方法是作者于 1989 年在专著《现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制》(北京:知识出版社,1989)中提出的,已故中科院院士张钟俊教授曾给予高度评价(张钟俊. 一门新兴边缘学科——现代时间序列分析. 信息与控制, 1988, 17(4):62~63)。同经典 Kalman 滤波方法和现代 Wiener 滤波方法相比,经典 Kalman 滤波方法是以 Riccati 方程作为基本工具解决最优估计问题,而现代 Wiener 滤波方法(即多项式方法)是以谱分解和 Diophantine 方程作为基本工具解决最优估计问题。对同一类滤波问

题,用三种方法论所得滤波器的公式在形式上可能是完全不同的,但它们是等价的,即它们在数值上是相同的。书中用大量数值仿真例子验证了这种等价性。作为新的方法论,用现代时间序列分析方法可以解决用 Kalman 滤波方法和 Wiener 滤波方法没有解决或不容易解决的许多最优和自校正估计或融合估计问题,显示了其强大的生命力。

多传感器信息融合是 20 世纪 70 年代后产生的一门新兴边缘学科。它随着电子技术和计算机应用技术的发展,特别是随着高科技武器(例如精确制导、远程打击及导弹拦截武器)的出现,应运而生,目前已发展成十分活跃的热门领域,广泛应用于指挥、控制、通信和情报系统。本书主要研究最优信息融合状态或信号估计问题。

本书系由作者主持的“多传感器信息融合最优和自校正滤波新理论和新方法”科研项目(国家自然科学基金资助项目。项目批准号:60374026;2004 年 1 月起至 2006 年 12 月止)的研究成果。信息融合的核心问题是最优融合规则的确定。本书提出了按矩阵加权、按对角阵加权和按标量加权三种分布式最优融合规则。解决最优融合估计问题的难点和关键技术在于如何计算各局部估计误差方差和互协方差。这些信息被用于计算最优加权。本书攻克了这一难题,提出了两种新的协方差信息融合滤波理论。

作者感谢国家自然科学基金委的资助。

作者深深感激已故中国科学院院士张钟俊教授生前对作者的鼓励和帮助。

还要感谢由作者指导的历届 50 余名研究生们,其中包括高媛、王欣、李云、毛琳、杜洪越、石莹、孟华等,他们对本书提出的新理论和新方法做了大量的仿真研究工作。

由于水平所限,书中缺点和疏漏之处在所难免,望读者批评指正。

著 者

2005 年元旦于哈尔滨

# 目 录

绪论	(1)
参考文献	(8)
第一章 ARMA 模型和状态空间模型	(9)
1.1 引言	(9)
1.2 随机过程	(10)
1.3 自回归滑动平均(ARMA)模型	(14)
1.4 ARMA 过程的展式	(23)
1.5 ARMA 过程的相关函数	(28)
1.6 状态空间模型	(36)
参考文献	(47)
第二章 最小二乘法参数估计	(48)
2.1 递推最小二乘(RLS)法	(48)
2.2 递推增广最小二乘(RELS)法	(57)
2.3 ARMA 模型参数估计的两段 RLS - RELS 算法——改进的 RELS 算法	(60)
2.4 ARMA 模型参数估计的两段 RLS - LS 算法	(64)
2.5 CARMA 模型的三段 RLS - LS - LS 参数估计算法	(68)
2.6 向量 CAR 模型的多重 RLS 参数估计算法	(70)
2.7 向量 CAR 模型的多维 RLS 参数估计算法	(72)
2.8 向量 CARMA 模型的多重和多维 RELS 参数估计算法	(77)
2.9 向量 CARMA 模型的两段 RLS - RELS 参数估计算法	(78)
2.10 向量 ARMA 模型的两段 RLS - LS 参数估计算法	(79)
2.11 偏差补偿递推最小二乘(BCRLS)法	(83)
2.12 带有色观测噪声的 AR 模型参数估计的 RELS 算法	(89)
2.13 求 MA 模型参数的 Gevers - Wouters 算法	(90)
参考文献	(96)
第三章 Kalman 滤波	(98)
3.1 引论	(98)
3.2 射影理论	(104)
3.3 Kalman 滤波器和预报器	(108)
3.4 Kalman 平滑器	(115)

3.5	白噪声估值器及其在信号处理中的应用 .....	(120)
3.6	稳态 Kalman 滤波 .....	(126)
3.7	带相关噪声的时变系统最优 Kalman 滤波和最优白噪声估值器 .....	(134)
3.8	带相关噪声定常系统稳态 Kalman 滤波和稳态白噪声估值器 .....	(150)
3.9	基于 Kalman 滤波的时域 Wiener 滤波器设计方法 .....	(154)
3.10	统一的和通用的 Kalman 滤波理论和白噪声估计理论 .....	(175)
	参考文献 .....	(186)
<b>第四章</b>	<b>ARMA 时间序列预报 .....</b>	<b>(188)</b>
4.1	Hilbert 空间中的射影运算 .....	(189)
4.2	单变量 ARMA 过程的 Wiener - Kolmogorov 预报器 .....	(192)
4.3	单变量 Box - Jenkins 递推预报器 .....	(195)
4.4	单变量 Åström 预报方法 .....	(197)
4.5	非平稳 ARMA 过程的 Wiener 预报器 .....	(201)
4.6	带白色观测噪声的 ARMA 过程的 Wiener 预报器 .....	(208)
4.7	带有色观测噪声的 ARMA 过程的稳态最优预报器 .....	(212)
4.8	多变量 Box - Jenkins 递推预报器 .....	(220)
4.9	多变量 ARMA 过程的 Åström 预报器 .....	(221)
4.10	多变量 Koivo 预报器 .....	(223)
4.11	多变量非平稳 ARMA 过程的 Wiener 预报器 .....	(224)
4.12	带白色观测噪声的多变量 ARMA 过程的 Wiener 预报器 .....	(227)
4.13	带有色观测噪声的多变量 ARMA 过程的 Wiener 预报器 .....	(233)
4.14	指数平滑预报器 .....	(235)
4.15	非平稳 ARMA 过程的 Box - Jenkins 递推预报器和 Åström 预报器 .....	(239)
4.16	MA 参数估计的 Gevers - Wouters 算法收敛性分析 .....	(250)
	参考文献 .....	(257)
<b>第五章</b>	<b>现代时间序列分析方法及其应用 .....</b>	<b>(259)</b>
5.1	统一的稳态最优白噪声估值器 .....	(262)
5.2	白噪声新息滤波器与 Wiener 滤波器 .....	(272)
5.3	多通道 ARMA 信号 Wiener 滤波器 .....	(274)
5.4	带 MA 有色观测噪声的多通道 ARMA 信号 Wiener 滤波器 .....	(283)
5.5	多通道 ARMA 信号 Wiener 反卷积滤波器 .....	(288)
5.6	统一的 Wiener 状态滤波器 .....	(297)
5.7	带白色和有色观测噪声的多通道反卷积滤波器 .....	(303)
5.8	广义系统 Wiener 状态估值器 .....	(310)
5.9	广义系统降阶 Wiener 状态估值器 .....	(324)
5.10	基于 ARMA 新息模型的稳态 Kalman 滤波器和预报器 .....	(329)
5.11	基于 ARMA 新息模型的稳态 Kalman 平滑器和多步 Kalman 预报器 .....	(337)

5.12	单输出系统稳态 Kalman 滤波器和预报器增益算法 .....	(343)
5.13	ARMA 新息模型与状态空间新息模型关系 .....	(347)
5.14	基于 ARMA 新息模型与基于 Riccati 方程的稳态 Kalman 滤波器的 功能等价性 .....	(349)
5.15	多项式矩阵左素分解与 ARMA 新息模型 .....	(355)
	参考文献 .....	(366)
<b>第六章 基于经典 Kalman 滤波的信息融合滤波理论 .....</b>		<b>(375)</b>
6.1	三种加权多传感器最优信息融合准则 .....	(377)
6.2	时变系统多传感器信息融合 Kalman 滤波器和预报器 .....	(386)
6.3	时变系统多传感器信息融合超前 $N$ 步 Kalman 预报器 .....	(393)
6.4	时变系统多传感器信息融合 Kalman 平滑器 .....	(396)
6.5	时变系统多传感器信息融合白噪声估值器 .....	(402)
6.6	定常系统多传感器信息融合稳态 Kalman 估值器和白噪声估值器 .....	(405)
6.7	基于 Kalman 滤波的两种观测融合方法的功能等价性 .....	(417)
6.8	多通道 ARMA 信号分布式信息融合 Wiener 滤波器 .....	(437)
6.9	广义系统多传感器信息融合降阶状态估值器 .....	(443)
	参考文献 .....	(450)
<b>第七章 基于现代时间序列分析方法的协方差信息融合滤波理论 .....</b>		<b>(454)</b>
7.1	多传感器信息融合白噪声估值器 .....	(455)
7.2	多传感器多通道 ARMA 信号信息融合 Wiener 滤波器 .....	(458)
7.3	多传感器信息融合 Wiener 状态估值器 .....	(461)
7.4	广义系统多传感器信息融合 Wiener 状态估值器 .....	(466)
7.5	多传感器信息融合稳态 Kalman 估值器 .....	(470)
7.6	多传感器多通道 ARMA 信号全局最优加权观测融合 Wiener 滤波器 .....	(477)
7.7	多传感器全局最优加权观测融合状态估值器 .....	(478)
7.8	多传感器分布式信息融合 Wiener 反卷积滤波器 .....	(485)
	参考文献 .....	(489)



# 绪 论

最优估计理论要解决的问题有三类.第一类最优估计问题是模型参数估计问题.建立数学模型是对时间序列、信号或系统状态进行估计的基础.模型参数估计的最基本的方法是最小二乘法(Least Squares Method).由于它的原理直观,算法简单,收敛性能好,且不要先验的统计知识,因而广泛被应用.最小二乘法是在 1795 年由大数学家高斯(C. F. Gauss)研究天体运动轨道问题时提出的.它的基本原理是实际观测值与模型计算值的误差的平方和最小原理,由此得名“最小二乘”法.最小二乘法原理的启发性例子如下.

**【例 0.1】** 动态快速椭圆检测.<sup>[20]</sup>

在图像处理、机器人等领域,需要对运动图像中的椭圆曲线进行快速检测,这个问题类似于当年高斯提出用最小二乘法确定天体运动轨道.几何上这个问题归结为确定其标准型的五个参数,即椭圆中心位置 $(x_c, y_c)$ ,长短轴  $a, b$  和旋转角  $\theta$ ,见图 0.1 所示.

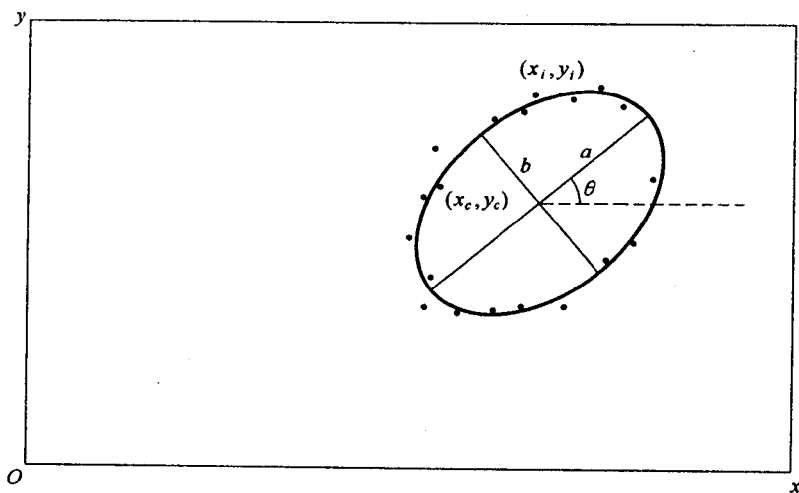


图 0.1 椭圆曲线和检测点 $(x_i, y_i)$

椭圆和其他二次曲线方程的一般形式为

$$x^2 + gxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (0.1)$$

为了确定椭圆方程的未知参数 $(g, c, d, e, f)$ ,如果能精确地检测到椭圆曲线上五个点的坐标,则将它们代入上式即可得五个方程,解线性方程组即可得椭圆参数,然而通常检测椭圆上的点的坐标是带有测量误差的,通常是微小的随机误差,用上述方法只能粗略地得到椭圆参数,为此人们希望利用椭圆曲线上更多的点的坐标的检测得到较精确的椭圆参数估计.设已知椭圆上  $N$  个点的坐标的检测值 $(x_i, y_i)$ (含有检测误差), $i = 1, 2, \dots, N$ ,将每组检测值 $(x_i, y_i)$ 代入上式,则有方程误差  $\epsilon_i$ ,即

$$x_i^2 + gx_iy_i + cy_i^2 + dx_i + ey_i + f = \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (0.2)$$

方程误差  $\epsilon_i$  是由于对椭圆上点的坐标的检测误差引起的. 通常  $N$  远大于 5. 最小二乘法原理就是用极小化方程误差的平方和来确定未知椭圆模型参数  $(g, c, d, e, f)$ , 即它们极小化性能指标

$$J = \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (x_i^2 + gx_i y_i + cy_i^2 + dx_i + ey_i + f)^2 \quad (0.3)$$

由极值原则, 置

$$\frac{\partial J}{\partial g} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial d} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial f} = 0 \quad (0.4)$$

可得关于  $(g, c, d, e, f)$  的线性方程组, 从而可解出  $(g, c, d, e, f)$ , 进而由有关公式可立刻求出标准型椭圆参数  $(a, b, x_c, y_c, \theta)$ .

因为采用了极小化方程误差平方和的原理, 因此得名“最小二乘”法.

**【例 0.2】** 对一个未知长度为  $\theta$  的物体进行  $N$  次测量, 设每次测量物体长度为  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , 我们来求真实物体长度  $\theta$  的估值. 设每次测量误差为  $\epsilon_i$ , 则有关系

$$l_i = \theta + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (0.5)$$

最小二乘法是选择  $\theta$  的估值极小化测量误差平方和, 即

$$\min J = \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (l_i - \theta)^2 \quad (0.6)$$

置  $J$  关于  $\theta$  的偏导数为零, 即

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = -2 \sum_{i=1}^N (l_i - \theta) = 0 \quad (0.7)$$

则有  $\theta$  的最小二乘法估值为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_i \quad (0.8)$$

这是  $N$  次测量结果的算术平均值, 与常识是一致的.

第二类最优估计问题是时间序列、信号或状态的最优估计问题. 时间序列分析 (Time Series Analysis) 是概率统计学科中的一个重要分支, 广泛应用于气象、水文、金融、经济、信号处理、通信和控制领域. 时间序列分析的经典著作是 G. E. P. Box 和 G. M. Jenkins 的书《Time Series Analysis, Forecasting and Control》.<sup>[1]</sup> 经典时间序列分析的主要内容是对时间序列的建模及基于时间序列模型对时间序列进行预报和控制. 依离散时间顺序排列的观测序列  $z_t: z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ , 叫时间序列. 例如, 某地降雨量时间序列, 我国国民经济年增长率时间序列, 按天记股票价格时间序列, 按秒采样导弹位置时间序列等. 这些时间序列的取值均带有随机性, 因而叫统计时间序列.

由时间序列目前和过去的观测历史  $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots$  预报估计它的将来值  $z_{t+k}$  ( $k > 0$ ) 叫预报, 预报值记为  $\hat{z}_{t+k|t}$ . 例如气象预报 (包括气温、降雨、降雪、沙尘暴等预报), 水文预报 (包括水位、洪峰、河流流量预报等), 经济预报 (包括商品销量、产量、经济指标、股市行情预报等), 过程控制、目标跟踪、制导中的预报 (包括温度、压力、体积、流量、产量、位置、速度等的预报). 在控制领域有一个新分支叫预测控制, 就是以预报作为基础的控制理论.

最优预报  $\hat{z}_{t+k|t}$  是指稳态线性最小方差预报, 即理论上假设初始观测时刻  $t_0 = -\infty$ , 即已知无限过去观测历史, 且预报估值 (也叫预报器)  $\hat{z}_{t+k|t}$  是由已知观测值  $z_t, z_{t-1}, \dots$  的线性组合构成, 即

$$\hat{z}_{i+k|t} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z_{i-j} \quad (0.9)$$

应选择系数  $\alpha_j$  极小化预报均方误差

$$\min J = E[(z_{i+k} - \hat{z}_{i+k|t})^2] \quad (0.10)$$

这个预报器  $\hat{z}_{i+k|t}$  由  $z_i, z_{i-1}, \dots$  的无穷级数产生, 从应用角度是不可取的, 因为它要求存储全部无限个历史数据. 为了克服这个缺点, 人们给出了等价的递推预报器.

重要的最优预报方法有 Box - Jenkins<sup>[1]</sup> 的递推预报方法和 Åström<sup>[2]</sup> 的预报方法, 其中 Box - Jenkins 递推预报器应用最广泛, 但在理论研究中 Åström 预报器应用较多.

除了时间序列最优预报外还有信号和状态估计, 也称最优滤波.

由被噪声污染的观测信号中, 过滤噪声, 求未知真实信号或状态最优估值叫滤波. “滤波”这一术语最初来自无线电领域.

1941 年, 在第二次世界大战期间, 以研究火炮打飞机控制系统为应用背景, 控制论创始人 Wiener<sup>[3]</sup> 提出了信号的 Wiener 滤波理论. 经典 Wiener 滤波方法是一种频域方法, 其局限性是限于处理平稳时间序列的滤波、预报问题. 缺点是不能处理多变量、时变、非平稳时间序列, 且算法是非递推的, 要求存储全部历史数据, 不便于工程应用. 但自 1979 年以来流行的现代 Wiener 滤波方法——多项式方法<sup>[16]</sup> 可处理多维非平稳时间序列滤波问题.

### 【例 0.3】 Wiener 滤波问题.

典型的 Wiener 信号滤波问题如图 0.2 所示. 其中未知真实信号  $s(t)$  被观测噪声  $v(t)$  污染, 因而已知观测信号  $z(t)$ , 即

$$z(t) = s(t) + v(t) \quad (0.11)$$

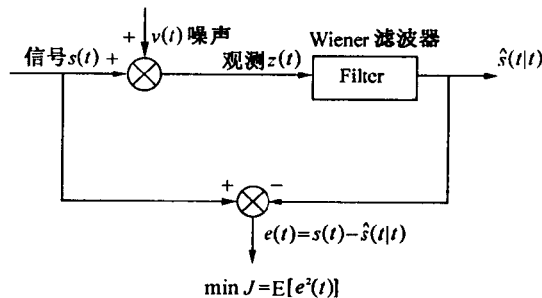


图 0.2 信号 Wiener 滤波问题

问题是如何由观测信号  $z(t)$  中, 过滤噪声  $v(t)$ , 在线性最小均方误差准则下, 设计 Wiener 滤波器  $\hat{s}(t|t)$ , 它是  $z(t), z(t-1), \dots$  的线性函数, 且极小化均方误差  $J = E[e^2(t)]$ , 其中  $E$  为均值号,  $e(t) = s(t) - \hat{s}(t|t)$  为滤波误差.

图 0.3 为二维信号  $s_1(t)$  和  $s_2(t)$  Wiener 滤波, 其中图 (a) 中的  $s_i(t)$  为原始信号, 图 (b) 中  $v_i(t)$  为观测噪声, 图 (c) 中  $y_i(t)$  为观测信号, 完全淹没了真实信号, 图 (d) 为信号  $s_i(t)$  的 Wiener 滤波器  $\hat{s}_i(t|t)$ , 它有效地过滤了观测噪声, 还信号  $s_i(t)$  的本来面目.

1960 年美国数学家和控制论学者 Kalman<sup>[4]</sup> 针对 Wiener 滤波理论的上述缺点和局限性, 以及由于电子技术和计算机应用技术发展的需要, 提出了 Kalman 滤波理论 (状态估计理论). Kalman 滤波方法是一种时域方法, 它基于状态空间模型和射影理论解决状态估计问题. Kalman 滤波算法是递推算法, 便于在计算机上实现, 且可处理多变量、时变、非平稳

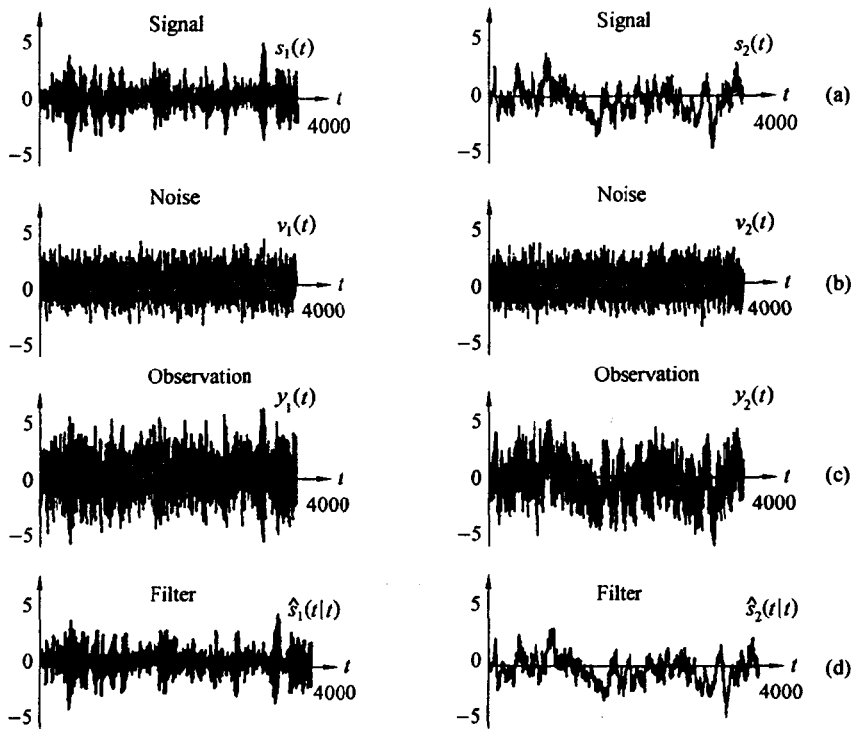


图 0.3 信号 Wiener 滤波问题仿真例子

时间序列滤波问题,克服了 Wiener 滤波理论的局限性. Kalman 滤波被广泛应用于各个领域,例如惯性导航、制导、GPS 定位、目标跟踪、通信、信号处理、控制等. 在 Kalman 滤波理论中,系统状态可视具体问题来规定和定义,特别信号也可视为为状态或状态的分量,因而 Kalman 滤波也可解决信号滤波问题. 阿波罗登月计划和 C-5A 飞机导航系统的设计是 Kalman 早期应用中最成功的实例.

在 20 世纪 60 年代初由于电子计算机运算速度和存贮量的限制,要求能实时、快速实现滤波算法,要求存贮量小、计算量小的滤波算法. 满足这些要求的算法就是递推滤波算法. 以例 0.2 动态测量长度为  $\theta$  的物体为例,记基于  $N$  个测量值对  $\theta$  的估值为

$$\hat{\theta}(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_i \quad (0.12)$$

当测量次数  $N$  不断增加,即进行动态测量时,则基于  $(N+1)$  个测量值对  $\theta$  的估值为

$$\hat{\theta}(N+1) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} l_i \quad (0.13)$$

这种计算是非递推的,即彼此独立地计算估值  $\hat{\theta}(N)$  和  $\hat{\theta}(N+1)$ . 当  $N$  很大时,计算量增加,而且计算  $\hat{\theta}(N)$  与计算  $\hat{\theta}(N+1)$  有重复的加法运算. 为了减小计算负担,是否能在  $\hat{\theta}(N)$  基础上来计算  $\hat{\theta}(N+1)$ ? 这就是递推算法的思想. 事实上,

$$\hat{\theta}(N+1) = \frac{N}{N+1} \cdot \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N l_i + l_{N+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{N+1} \right) \hat{\theta}(N) + \frac{1}{N+1} l_{N+1} \quad (0.14)$$

即有递推公式

$$\hat{\theta}(N+1) = \hat{\theta}(N) + \frac{1}{N+1} [l_{N+1} - \hat{\theta}(N)] \quad (0.15)$$

因而在估值  $\hat{\theta}(N)$  的基础上,只需计算上式第二项就立刻得到估值  $\hat{\theta}(N+1)$ ,避免了非递推算法(0.13)的重复加法运算,大大减小了计算量和存贮量.对于非递推算法,计算机需存贮  $(N+1)$  个测量数据  $l_i$ ,而对递推算法(0.15),每次测量仅需存贮两个数据  $\hat{\theta}(N)$  和  $l_{N+1}$  就可实现估值  $\hat{\theta}(N+1)$  的计算.在(0.15)中第二项为校正量,它是根据误差

$$\epsilon_{N+1} = l_{N+1} - \hat{\theta}(N) \quad (0.16)$$

的大小来进行校正估值  $\hat{\theta}(N)$  的.因为估值  $\hat{\theta}(N)$  已包含了前  $N$  次测量的信息,而  $l_{N+1}$  是第  $(N+1)$  次测量值,估误差  $\epsilon_{N+1} = l_{N+1} - \hat{\theta}(N)$  包含了从第  $(N+1)$  次测量中去掉了前  $N$  次测量的信息剩下的新的信息,故称为“新息”(Innovation).于是我们最终得到新息校正形式的递推估值公式

$$\hat{\theta}(N+1) = \hat{\theta}(N) + K(N+1)\epsilon_{N+1} \quad (0.17)$$

其中  $K(N+1) = 1/(N+1)$  叫做新息校正系数或滤波增益.(0.17)是递推 Kalman 滤波算法的基本思想.

Kalman 滤波方法的基本特征和关键技术之一是状态空间模型. Kalman 滤波基于状态空间模型设计 Kalman 滤波器.而 Wiener 滤波理论采用的是传递函数模型.状态空间模型可用机理或物理、运动定律导出,也可用系统辨识方法得到.

Kalman 滤波问题可用如下启发性的例子来说明.

**【例 0.4】** 动态测量系统 Kalman 滤波问题,继例 0.2.

考虑例 0.2,对未知长度为  $\theta$  的物体进行动态测量,即测量次数  $t$  是变化的,  $t = 1, 2, \dots, N, N+1, \dots$ . 因长度  $\theta$  为未知常数,故有  $\theta$  的动态方程为

$$\theta(t+1) = \theta(t) \quad (0.18)$$

而第  $t$  次对  $\theta$  的测量值  $l(t)$  含有随机误差  $\epsilon(t)$ ,故有对  $\theta$  的观测方程为

$$l(t) = \theta(t) + \epsilon(t) \quad (0.19)$$

我们可将未知长度  $\theta$  定义为系统的状态,则(0.18)称为状态方程,它描写  $\theta$  随  $t$  变化的规律,(0.18)说明长度  $\theta$  不随  $t$  而变化,即  $\theta$  为常数.而(0.19)则是对状态  $\theta$  的观测方程,观测误差  $\epsilon(t)$  通常为零均值、方差为  $\sigma_\epsilon^2$  的正态白噪声.(0.18)和(0.19)构成最简单的状态空间模型. Kalman 滤波问题:基于  $t$  次观测  $(l(1), \dots, l(t))$  求  $\theta$  的线性最小方差估值  $\hat{\theta}(t)$ .它与  $\theta$  的最小二乘估值(0.8)不同的是:最小二乘估值(0.8)不要求已知观测误差  $\epsilon(t)$  的统计(均值和方差).而实现 Kalman 滤波则要求已知这些统计知识.

**【例 0.5】** 雷达跟踪系统 Kalman 滤波问题.

考虑雷达跟踪系统,由运动定律有关系

$$s(t+1) = s(t) + \dot{s}(t)T + \frac{T^2}{2}w(t) \quad (0.20)$$

$$\dot{s}(t+1) = \dot{s}(t) + Tw(t) \quad (0.21)$$

$$y(t) = s(t) + v(t) \quad (0.22)$$

其中  $T$  为采样周期,  $s(t)$ ,  $\dot{s}(t)$  和  $w(t)$  各为在时刻  $tT$  运动目标(例如导弹、飞机、坦克、舰、汽车等)的位置、速度和加速度.  $y(t)$  是对位置  $s(t)$  的观测信号,  $v(t)$  为观测噪声.假设  $w(t)$  和  $v(t)$  都是白噪声(即不相关的随机序列).问题是基于到时刻  $t$  为止的观测  $(y(t), y(t-1), \dots, y(1))$  求运动目标位置  $s(t)$  和速度  $\dot{s}(t)$  的最优估值  $\hat{s}(t|t)$  和  $\hat{\dot{s}}(t|t)$ .

定义系统的状态变量  $x(t)$  为

$$x(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{位置} \\ \text{速度} \end{bmatrix} \quad (0.23)$$

则等价地有状态方程和观测方程

$$\begin{bmatrix} s(t+1) \\ \dot{s}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} w(t) \quad (0.24)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \end{bmatrix} + v(t) \quad (0.25)$$

即我们有状态空间模型

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t) \quad (\text{状态方程}) \quad (0.26)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t) \quad (\text{观测方程}) \quad (0.27)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}, \quad H = [1 \quad 0] \quad (0.28)$$

上述状态方程和观测方程统称为状态空间模型, Kalman 滤波问题就是基于到时刻  $t$  观测  $(y(t), y(t-1), \dots, y(1))$  求状态  $x(j)$  的最优(线性最小方差)估值  $\hat{x}(j|t)$ , 对  $j=t$ ,  $j < t$  或  $j > t$ , 分别称  $\hat{x}(j|t)$  为 Kalman 滤波器、平滑器或预报器。

**【例 0.6】宇宙飞船制导问题。**<sup>[5]</sup>

下图表示宇宙飞船发射的雷达制导系统, 目的是把载人航天器送至位于指定点 P 的特定轨道上去。首先把来自宇宙飞船的遥测数据及雷达跟踪数据(例如距离、距离变化率、俯仰角和方位角等测量数据)进行滤波处理, 以估计出宇宙飞船的状态, 然后把这些估计结果提供给具有一定算法的控制器, 经过计算产生制导命令。最后按制导命令去遥控宇宙飞船。这个例子说明对系统进行状态估计的重要性。因为来自地面上或海面上对宇宙飞船的遥测数据是含有噪声的, 必须进行滤波处理。

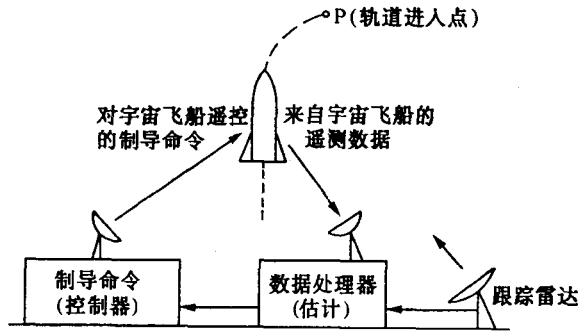


图 0.4 雷达制导方块图

第三类最优估计问题是最优信息融合估计问题。随着电子技术和计算机应用技术的发展 and 现代电子与信息战争及国防军事上的需要, 为了提高对运动目标(导弹、飞机、卫星、坦克、车辆、船舰等)的跟踪精度或对动态系统状态的估计精度, 大量涌现具有不同应用背景的多传感器系统。对目标跟踪而言, 有各种类型测量运动目标位置、速度或加速度的传感器。特别是 20 世纪 70 年代后, 由于高技术武器的出现, 尤其是由于精确制导武器、

远程打击和导弹拦截武器的出现,使得依靠单传感器提供的信息很难满足目标跟踪或状态估计精度的要求,因此必须对每个传感器提供的信息按某种最优融合准则进行最优融合,才能提高对目标跟踪或状态估计的精度.早在 20 世纪 70 年代初美国海军就发现,对多个独立的声纳信号进行融合处理后,能更准确地探测出敌方潜艇的位置.这一发现对现代电子和信息战争产生了重大影响,早在 1988 年美国国防部就把信息融合技术列为 90 年代重点研究开发的二十项关键技术之一,且列为最优先发展的 A 类.近年来每年用于信息融合技术的研究费用达上亿美元.信息融合技术在海湾战争、科索沃战争及伊拉克战争中发挥了重要作用.在上述应用背景下,一门新兴学科——多传感器信息融合 (Multi-sensor Information Fusion) 应运而生,30 多年来已发展成为倍受人们关注的热门领域,且在军事领域现代 C<sup>3</sup>I(指挥、控制、通信和情报)系统中得到广泛应用.

在例 0.6 中就遇到对宇宙飞船状态的融合估计问题,因为在地面上或海面上同时有多个遥测器(传感器)对飞船的状态进行观测.

**【例 0.7】** 多传感器分布式信息融合 Kalman 滤波器原理.

对于状态估计而言,每个传感器可用一个观测方程代表,问题是对一个状态方程在有多多个观测方程情形下,如何利用基于每个观测方程得到的局部 Kalman 滤波器进行加权融合得到在某种性能指标下的最优融合 Kalman 滤波器? 它的精度应当比每个局部 Kalman 滤波器的精度高.多传感器分布式信息融合 Kalman 滤波器原理如图 0.5 所示.

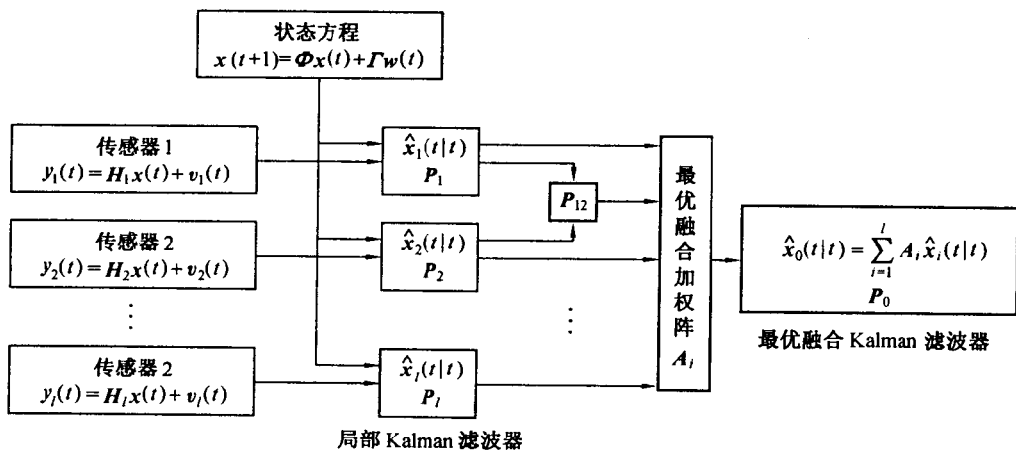


图 0.5 多传感器分布式信息融合 Kalman 滤波器原理

图中  $\hat{x}_i(t|t)$  为对状态  $x(t)$  的局部 Kalman 滤波器,  $P_i$  为相应的局部滤波误差方差阵,  $P_{ij}$  为第  $i$  传感器滤波误差与第  $j$  传感器滤波误差的互协方差阵. 这些方差阵  $P_i$  和互协方差阵  $P_{ij}$  信息被用于计算最优融合加权阵  $A_i$ 。

对于第一类最优估计问题,本书重点介绍递推最小二乘法参数估计方法,特别介绍由作者提出的单变量和多变量 ARMA 模型的两段最小二乘法.此外,还介绍 MA 模型参数估计的 Gevers-Wouters 算法,并首次从理论上证明了该算法的一致性和指数收敛性. Gevers-Wouters 算法是建立 ARMA 新息模型的重要工具,在现代时间序列分析方法<sup>[8,13-15]</sup>中起重要作用.

对于第二类最优估计问题,本书除了介绍如经典 Kalman 滤波方法和理论外,重点介

绍由作者提出的现代时间序列分析方法<sup>[8,13~15]</sup>,它为解决最优滤波问题提供了新的方法论,不同于基于 Riccati 方程的经典 Kalman 滤波方法<sup>[4,9~11,18]</sup>.现代时间序列分析方法以 ARMA 新息模型作为基本工具解决状态或信号最优滤波问题.

对于第三类最优估计问题,本书分别介绍了首次由作者提出的基于经典 Kalman 滤波的多传感器协方差信息融合滤波理论和基于现代时间序列分析方法的多传感器协方差信息融合滤波理论.它们利用局部估计误差协方差信息来计算最优融合估计的加权阵,因此称为协方差信息融合滤波理论.书中以目标跟踪系统为应用背景,给出了大量的多传感器最优信息融合跟踪滤波器的仿真应用例子.

### 参 考 文 献

- 1 Box G E P, Jenkins G M. Time Series Analysis, Forecasting, and Control. San Francisco: Holden - Day, 1970
- 2 Åström K J. 随机控制理论导论.潘裕焕译.北京:科学出版社,1983
- 3 Wiener N. Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Application, New York: John Wiley & Sons, 1949
- 4 Kalman R E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Trans. ASME, J. Basic Eng., 1961, 83D:95 ~ 101
- 5 Meditch J S. 随机最优线性估计与控制.赵希人译.哈尔滨:黑龙江人民出版社,1981
- 6 何友,王国宾,陆大绘等.多传感器信息融合及应用.北京:电子工业出版社,2000
- 7 Chen C T. Linear System Theory and Design. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1984
- 8 邓自立.卡尔曼滤波与维纳滤波——现代时间序列分析方法.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2001
- 9 Lewis F L. Optimal Estimation. New York: John Wiley & Sonc, 1986
- 10 Kamen E W, Su J K. Introduction to Optimal Estimation. Springer - Verlag London Limited, 1999
- 11 Kailath T, Sayed A H, Hassibi B. Linear Estimation. New Jersey: Prentice - Hall, Inc., 2000
- 12 Mendel J M. Lessons in Estimation Theory for Signal Processing, Communications, and Control. New Jersey: Prentice - Hall, 1995
- 13 邓自立.最优滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2000
- 14 邓自立.自校正滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2003
- 15 邓自立,郭一新.现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制.北京:知识出版社,1989
- 16 付梦印,邓志江,张继伟. Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用.北京:科学出版社,2003
- 17 Ahlen A, Sternad M. Wiener Filter Design Using Polynomial Equations. IEEE Trans. Signal Processing, 1991, 39(11):2387 ~ 2399
- 18 Abderson B D O, Moore J B. Optimal Filtering. New Jersey: Prentice - Hall, Inc., 1979
- 19 Söderström T. Discrete - Time Stochastic Systems, Estimation and Control. New York: Prentice Hall, 1994
- 20 王忠立,高文.基于最小二乘预测的动态快速椭圆检测.信息与控制,2003,32(7):729 ~ 733



# 第一章 ARMA 模型和状态空间模型

## 1.1 引言

时间序列最优预报的基本数学模型是自回归滑动平均(Autoregressive Moving Average)模型,简称 ARMA 模型. ARMA 模型不仅是时间序列预报的基本工具和方法论,而且也是信号与状态最优估计的基本模型. 在信号 Wiener 滤波问题中,被估信号和观测噪声,以及观测信号均为随机信号<sup>[1]</sup>,通常用 ARMA 模型来描写. ARMA 模型可以描写一大类平稳和非平稳信号<sup>[2]</sup>.

时间序列  $z_t$  的 ARMA 模型具有形式:

$$z_t - \varphi_1 z_{t-1} - \cdots - \varphi_p z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q} \quad (1.1.1)$$

其中  $a_t$  为零均值、方差为  $\sigma_a^2$  的不相关随机序列,称为白噪声,即

$$E a_t = 0, \quad E[a_t a_s] = \sigma_a^2 \delta_{ts} \quad (1.1.2)$$

其中  $E$  为均值号,  $\delta_{ij} = 1, \delta_{ij} = 0 (i \neq j)$ , 而  $\varphi_i$  和  $\theta_i$  为模型参数,  $p, q$  为模型的阶次.

由(1.1.1)看到  $z_t$  与过去的历史  $z_{t-1}, \dots, z_{t-p}$  有关,这就是“自回归”一词的直观含义. 而(1.1.1)右端的随机项恰好为白噪声项  $a_t, a_{t-1}, \dots, a_{t-q}$  的加权(线性组合),这就是“滑动平均”或“滑动和”一词的直观含义. 用 ARMA 模型描写一个时间序列,关键在于确定模型参数  $\varphi_i, \theta_i$  和阶次  $p, q$ , 以及白噪声方差  $\sigma_a^2$ . 本书第二章将介绍 ARMA 模型参数  $\varphi_i, \theta_i$  和  $\sigma_a^2$  估计的递推最小二乘法及其改进算法.

状态空间模型是 Kalman 滤波或状态估计的基本数学模型,类似于绪论中例 0.5 雷达跟踪系统的状态空间模型. 一般的离散时间随机系统的状态空间模型具有如下形式:

$$\mathbf{x}(t+1) = \Phi(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \Gamma(t)\mathbf{w}(t) \quad (1.1.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (1.1.4)$$

其中系统状态  $\mathbf{x}(t) \in R^n$ ,  $t$  为离散时间,  $\mathbf{y}(t) \in R^m$  为观测信号,  $\mathbf{v}(t) \in R^m$  为观测噪声,  $\mathbf{w}(t) \in R^r$  为输入白噪声,  $\mathbf{w}(t)$  和  $\mathbf{v}(t)$  是零均值、方差阵各为  $\mathbf{Q}(t)$  和  $\mathbf{R}(t)$  的独立的或相关的白噪声,  $\mathbf{u}(t) \in R^s$  是已知的控制输入.  $\Phi(t), \mathbf{B}(t), \Gamma(t), \mathbf{H}(t), \mathbf{Q}(t), \mathbf{R}(t)$  各为  $n \times n, n \times s, n \times r$  和  $m \times n, r \times r$  和  $m \times m$  时变矩阵. 因而称(1.1.3)和(1.1.4)为时变系统,  $\Phi(t)$  被称为状态转移阵,  $\mathbf{H}(t)$  被称为观测阵. 若  $\Phi, \mathbf{B}, \Gamma, \mathbf{H}, \mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  均为常阵,则称(1.1.3)和(1.1.4)为时不变系统或定常系统. Kalman 滤波问题就是基于被观测噪声  $\mathbf{v}(t)$  污染的观测信号  $\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t-1), \dots$ , 和控制  $\mathbf{u}(t-1), \mathbf{u}(t-2), \dots$ , 求系统在时刻  $j$  处的状态  $\mathbf{x}(j)$  的最优估计  $\hat{\mathbf{x}}(j|t)$ .

线性系统理论<sup>[7]</sup>证明了 ARMA 模型与状态空间模型是可以相互转化的. 这种相互转化是解决具体最优估计问题的有力杠杆. 可以将 ARMA 信号最优滤波问题转化为状态估