

1997 年高考同步强化训练

数学

王建民	中国科技大学附中特级教师
邵光砚	清华大学附中高级教师
邓 均	北京大学附中高级教师
董世奎	北京大学附中高级教师
蒋大凤	北京大学附中高级教师
杨文焕	北京大学附中高级教师



现代出版社

出版说明

经验证明,复习阶段通过解答适量的高质量习题,临近考试阶段做适量的高质量模拟试题,是迅速提高考试成绩的有效途径。为此,我们组织北京大学附中、清华大学附中、中国人民大学附中、北京四中等全国著名重点中学的特级、高级教师编写了《1997年高考同步强化训练》和《1997年高考全真模拟试卷》

以上二套复习用书突出了以下特点:

1. 博采众长,各取优势

《1997年高考同步强化训练》和《1997年高考全真模拟试卷》由北京大学附中、清华大学附中、中国人民大学附中、中国科技大学附中、北京四中、北京一中、北京五中、北京八中、北京实验中学、北京航空航天大学附中、北京工业大学附中等十几所全国著名重点中学的教师联合编写,各取优势。各学校牵头负责自己优势科目的编写,再融通汇总,集体讨论、审订,最后定稿,每一个环节都是极为认真、极其严格的。

2. 根据复习进度编写,对1997年高考进行有效预测

《1997年高考同步强化训练》紧扣教学大纲,根据高三毕业班复习的进度编写,与总复习进度同步,便于学生循序渐进复习。每个单元都配有单元测试题,在几个单元之后,还配有一份综合测试题。《1997年高考同步强化训练》题型全,题量足,基础题与提高题比例适当,由浅入深,尤其注意高考的最新趋势,对常考题型以及常考内容提供了大量的练习。

《1997年高考全真模拟试卷》是在充分研究近年来高考命题和国家教委考试中心《考试说明》的基础上精心编写的,融高考大纲精神于各套试卷,每门课程均有10套实战性试卷,题型题量完全模拟实际考试。可以说,《1997年高考全真模拟试卷》既是对考生复习的检测,更是对1997年高考试题的有效预测。

3. 阵容强大,全部由特级、高级教师编写

《1997年高考同步强化训练》和《1997年高考全真模拟试卷》的编写,集中了一大批北京地区的优秀教师,涉及到十几所重点中学。参加编写的老师大都连年从事高三毕业班课程的复习与教学工作,积累了丰富的应考教学经验。各门课程的分工如下(详见下页):

《1997 年高考同步强化训练》编者

科 目	编 写 者		
语 文	邱忠孝	北京大学附中	高级教师
	张 玳	北京大学附中	高级教师
	赖国盛	北京八中	高级教师
数 学	王建民	中国科技大学附中	特级教师
	邵光砚	清华大学附中	高级教师
	邓 均	北京大学附中	高级教师
	董世奎	北京大学附中	高级教师
	蒋大风	北京大学附中	高级教师
	杨文焕	北京大学附中	高级教师
英 语	范存智	北京大学附中	高级教师
	齐平昌	北京四中	高级教师
	王英民	清华大学附中	高级教师
	沈信子	北京实验中学	高级教师
	马 燕	天津南开中学	高级教师
物 理	陈育林	北京大学附中	高级教师
	丁敬忠	北京大学附中	高级教师
	陈立容	人民大学附中	高级教师
	董连生	北京四中	高级教师
	李康华	北京航空航天大学附中	高级教师
	赵大恒	北京八中	高级教师
化 学	胡 兰	北京五中	一级教师
	张 琛	北京一中	高级教师
	刘秀丽	北京一中	一级教师
	耽世惠	北京一中	高级教师
	刘 恕	北京市东城区教研中心教研员	高级教师
历 史	陈卫聪	北京大学附中	高级教师
	于秀娟	人民大学附中	高级教师
	任一林	北京工业大学附中	高级教师
政 治	舒嘉文	北京大学附中	高级教师
	邵思若	北京大学附中	高级教师
	张玉安	北京大学附中	高级教师

目 录

第一章 函数(一).....	1
第二章 函数(二).....	3
第三章 不等式的解法(一).....	5
第四章 不等式的解法(二).....	7
第五章 不等式的证明(一).....	9
第六章 不等式的证明(二)	11
第七章 数列(一)	13
第八章 数列(二)	15
第九章 数列极限与数学归纳法	17
第十章 复数的概念与运算	19
第十一章 复数的模、共轭复数与复数的应用.....	21
第十二章 排列、组合、二项式定理	23
第十三章 代数综合练习	25
第十四章 三角函数	27
第十五章 三角恒等变换(一)	31
第十六章 三角恒等变换(二)	35
第十七章 反三角函数和简单三角方程	37
第十八章 三角综合练习	39
第十九章 直线	41
第二十章 圆	43
第二十一章 圆锥曲线(一)	47
第二十二章 圆锥曲线(二)	50
第二十三章 参数方程与极坐标	53
第二十四章 解析几何综合练习	56
第二十五章 直线与平面(一)	59
第二十六章 直线与平面(二)	62
第二十七章 多面体与旋转体	65
第二十八章 立体几何综合练习	68
参考答案	71

第一章 函数(一)

一、选择题

1. 集合 $M = N$ 是 $M \cap X = N \cap X$ 的

(A) 充分不必要条件
(B) 必要不充分条件
(C) 充要条件
(D) 既非充分又非必要条件

2. 设集合 $X = \{x | x = 3m + 1, m \in \mathbb{Z}\}$, $Y = \{y | y = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$. 若 $x_0 \in X, y_0 \in Y$, 则有

(A) $x_0 y_0 \in X$ (B) $x_0 y_0 \in Y$
(C) $x_0 y_0 \subset X$ (D) $x_0 y_0 \subset Y$

3. 设集合 $X = \{x | x^2 + px + q = 0\}$, $Y = \{y | y^2 + (p-1)y + 2q = 0\}$. 若 $X \cap Y = \{1\}$, 则有

(A) $X \subset Y$ (B) $X \supseteq Y$
(C) $X \cup Y = \{1, 1, 2\}$ (D) $X \cup Y = \{1, -2\}$

4. 函数 $y = \left(\frac{2}{5}\right)^{1-x-2}$ 的单调递增区间是

(A) $(-\infty, 0]$ (B) $[0, +\infty)$
(C) $[2, +\infty)$ (D) $(-\infty, 2]$

5. 下列各组函数中, 表示同一个函数的是

(A) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$
(B) $f(x) = |x|$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$
(C) $f(x) = 10^{-2\lg x}$ 与 $g(x) = (\lg 10^x)^{-2}$
(D) $f(x) = \left|\lg \left(\frac{1}{2}\right)^x\right|$ 与 $g(x) = |x| \lg 2$

6. 函数 $y = \log_{(x-1)} \sqrt{3x-2}$ 的定义域是

(A) $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ (B) $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$
(C) $\left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$
(D) $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

7. $f(x)$ 是以 3 为周期的奇函数, 且有

$f(-1) = -1$, 则 $f(7)$ 等于

(A) 1 (B) -1
(C) 2 (D) -2

8. 若函数 $y = f(x)$ 的图像沿 x 轴的正向移动两个单位后, 再下移一个单位得到图像 C_1 , 又图像 C_1 与 C_2 关于 y 轴对称, 则 C_2 对应的函数是

(A) $y = f(-x-2) + 1$
(B) $y = f(-x-2) - 1$
(C) $y = -f(-x-2) + 1$
(D) $y = f(-x+2) - 1$

9. 已知 $f(x+1) = \frac{x}{1+x}$, 则 $f^{-1}(x+1)$ 等于

(A) $\frac{x}{1+x}$ (B) $-\frac{1}{x}$
(C) $-\frac{x+1}{x}$ (D) $\frac{x-1}{x}$

10. 函数 $y = x^{\frac{3}{5}}$ 在其定义域上是

(A) 增函数且是奇函数
(B) 增函数且是偶函数
(C) 减函数且是奇函数
(D) 减函数且是偶函数

11. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2)$ 的单调递减区间是

(A) $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ (B) $(2, +\infty)$
(C) $(-\infty, \frac{3}{2})$ (D) $(-\infty, 1)$

12. 已知 $0 < a < b < 1$, 比较 $a^b, \log_b a, \log_{\frac{1}{a}} ab$ 的大小, 得

(A) $\log_{\frac{1}{a}} ab < a^b < \log_b a$
(B) $\log_{\frac{1}{a}} ab < \log_b a < a^b$
(C) $\log_b a < \log_{\frac{1}{a}} ab < a^b$
(D) $a^b < \log_{\frac{1}{a}} ab < \log_b a$

13. 函数 $y = \frac{1}{3^x - 1}$ 的值域是

(A) $(-\infty, -1)$
(B) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
(C) $(-1, +\infty)$
(D) $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

14. 若函数 $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在区

间 $(-\infty, 4]$ 上是减函数, 则实数 a 的取值范围是

- (A) $(-\infty, -3]$ (B) $[-3, +\infty)$
(C) $(-\infty, 5]$ (D) $[3, +\infty)$

15. 在幂函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的图像上, 从横坐标满足 $x^2 - x \leq 6, x \in \mathbb{Z}$ 的所有点中任取两个点可确定不同直线

- (A) 15 条 (B) 12 条
(C) 11 条 (D) 9 条

二、填空题

16. 函数 $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$, 则 $f^{-1}(0) =$

1

17. 函数 $y = \sqrt{25 - 2x^2}$,

$x \in \left[-\frac{5}{2}, \sqrt{2}, 0\right]$ 的反函数是

$y = \sqrt{25 - 4x^2}, x \in [0, 5]$

18. 对于任意实数 t , 函数 $f(x)$ 总有 $f(1-t) = f(1+t)$ 成立, 若方程 $f(x) = 0$ 有且仅有两个不等实根, 则这两实根之和等于

2

19. 已知全集 $I = \{\text{小于 } 15 \text{ 的正偶数}\}$, 集合 A, B 均为 I 的子集, 且有 $A \cap B = \{2, 4, 6\}$, $\bar{A} \cap B = \{8, 10\}$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \{14\}$, 则集合 $A =$, $B =$

$\{2, 4, 6, 14\}$, $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

三、解答题

20. 解方程 $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_2(2^{x+2} - 4) = \log_8$

$x = \frac{1}{2}$

21. 若偶函数 $f(x)$ 满足条件 $f(0) = 0$, 且在 $(-\infty, 0]$ 上为增函数, 试判断 $y = |f(x)|$ 在区间 $[0, \infty)$ 的单调性, 并用增、减函数定义证明你的结论。

22. 已知二次函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x+1) - f(x) = 2x, f(0) = 1$,

- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
(2) 求 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值和最小值。

$f(x) = x^2 + x + 1$

23. 已知集合 $A = \{k \mid \text{方程 } x^2 + (2k-1)x + k^2 = 0 \text{ 至少有 } 1 \text{ 个不大于 } 1 \text{ 的实根}\}$, 求集合 $B = \{k \mid k \in A \text{ 且 } k \in \mathbb{Z}\}$ 的所有子集。

24. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的周期为 2, 且当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = |x-1|$,

- (1) 作出 $f(x)$ 的图像;
(2) 求 $f(1), f\left(\frac{1}{2}\right), f(83)$ 和 $f(-3857.5)$ 的值;

- (3) 证明 $f(x)$ 是偶函数。

25. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid ax + y = 1\}, B = \{(x, y) \mid x + ay = 1\}, C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, 问实数 a 为何值时, 集合 $(A \cup B) \cap C$ 含有两个元素, 并求出这两个元素。(注: 应用 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$)

第二章 函数(二)

一、选择题

1. 如果 $\log_a \frac{3}{4} < 1$ 那么实数 a 的取值范围是

(A) $[\frac{3}{4}, +\infty)$ (B) $(\frac{3}{4}, 1)$

(C) $(0, \frac{3}{4}) \cup (1, +\infty)$

(D) $(0, \frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4}, +\infty)$

2. 若 $f(10^x) = x$ 则 $f(3)$ 的值是

(A) $\log_3 10$ (B) $\lg 3$

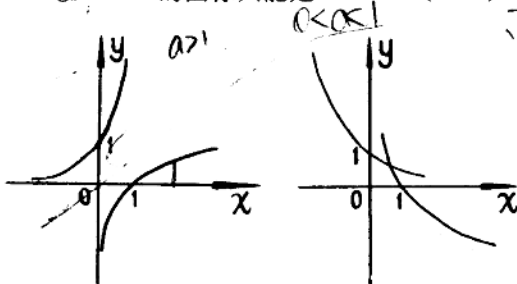
(C) 10^3 (D) 3^{10}

3. 在区间 $(-\infty, 0)$ 上为增函数的是

(A) $y = -\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ (B) $y = \frac{x}{1-x}$

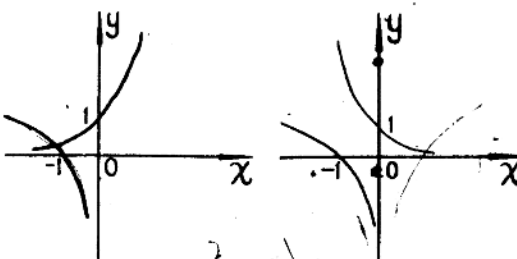
(C) $y = -(x+1)^2$ (D) $y = x^2 + 1$

4. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $y = a^x$ 与 $y = \log_a(-x)$ 的图像只能是



(A)

(B)



(C)

(D)

图 2-1

5. 设函数 $F(x) = f(x) - \frac{1}{f(x)}$, 且 $x =$

$$f(x) = 10^x - \frac{1}{10^x} \quad f(-x) = \frac{1}{10^x} - \frac{1}{10^{-x}} = \frac{1}{10^x} - 10^x$$

$$f(x) = 10^x \quad f(-x) = 10^{-x}$$

$\lg f(x)$, 则 $F(x)$ 是

(A) 偶函数 (B) 奇函数

(C) 又奇又偶函数 (D) 非奇非偶函数

6. 若 $x > y > 1$ 且 $0 < a < 1$, 那么不等式正

确的是

(A) $a^x > a^y$ (B) $\log_a x > \log_a y$

(C) $a^{x+y-2} > 1$ (D) $x^a > y^a$

7. 函数 $f(x) = \log_{0.3}(-x^2 + 4x - 3)$ 的单

调增区间是

(A) $(-\infty, 2]$ (B) $[2, +\infty)$

(C) $(1, 2]$ (D) $[2, 3]$

8. 若 $-1 < x < 0$, 则 $2^x, \sqrt[3]{x}, x^3$ 的大小顺

序为

(A) $2^x > \sqrt[3]{x} > x^3$ (B) $x^3 > 2^x > \sqrt[3]{x}$

(C) $2^x > x^3 > \sqrt[3]{x}$ (D) $x^3 > \sqrt[3]{x} > 2^x$

9. 若三次函数 $y = f(x)$ 的图像是开口向上

的抛物线, 且 $f(1+x) = f(1-x)$, 则

$f(1), f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{5})$ 的大小顺序为

(A) $f(1) < f(\sqrt{2}) < f(-\sqrt{5})$

(B) $f(-\sqrt{5}) < f(\sqrt{2}) < f(1)$

(C) $f(1) < f(-\sqrt{5}) < f(\sqrt{2})$

(D) $f(\sqrt{2}) < f(-\sqrt{5}) < f(1)$

10. 已知 $f(x) = 8 + 2x - x^2$, 如果 $g(x) =$

$f(2-x^2)$, 那么 $g(x)$

(A) 在区间 $(-1, 0)$ 上是增函数

(B) 在区间 $(0, 2)$ 上是增函数

(C) 在区间 $(-1, 0)$ 上是减函数

(D) 在区间 $(0, 1)$ 上是减函数

11. 函数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}$ 的值域为

(A) $[-3, 0]$ (B) $(-\infty, 3]$

(C) $(0, 3]$ (D) $[3, +\infty)$

12. 函数 $f(x)$ 是偶函数, 定义域为 $x \in (-$

$\infty, +\infty)$, 它在 $(-\infty, 0]$ 上是增函数,

那么下列式子中正确的是

(A) $f(-\frac{3}{4}) > f(a^2 - a + 1)$

(B) $f(-\frac{3}{4}) < f(a^2 - a + 1)$

(C) $f(-\frac{3}{4}) = f(a^2 - a + 1)$

(D) $f(-\frac{3}{4}) \leq f(a^2 - a + 1)$

- $\sqrt{(B)} f\left(-\frac{3}{4}\right) \geq f(a^2 - a + 1)$
 $(C) f\left(-\frac{3}{4}\right) < f(a^2 - a + 1)$
 $(D) f\left(-\frac{3}{4}\right) \leq f(a^2 - a + 1)$

13. $f(x)$ 是定义在区间 $(-2, 2)$ 上的奇函数, 且为减函数, 当 $f(2-a) + f(2a-3) < 0$ 时, 实数 a 的取值范围是 ()

- $(A) (0, 2)$ $(B) (0, 4)$
 $(C) \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ $(D) \left(1, \frac{5}{2}\right)$

14. 已知函数 $f(x) = \log_2(2^x - 1)$, 则方程: $f(2x) = f^{-1}(x)$ 的根是 ()

- $(A) 1$ $(B) 2$ $(C) 3$ $(D) 4$

15. 若函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $2T$, 且 $f(x+T) = f(T-x)$ 对一切实数 x 均成立, 则 $f(x)$ 是 ()

- (A) 奇函数 (B) 偶函数
 (C) 又奇又偶函数 (D) 非奇非偶函数

二、填空题

16. 已知函数 $f(x) = \sqrt{(m-1)x^2 + (m-1)x + 2}$ 的定义域为 R , 则实数 m 的取值的集合是 _____.

17. 已知 $2x^2 + y^2 = 6x$, 则 $x^2 + y^2 + 2x$ 的最大值是 6; 最小值是 0.

18. 函数 $y = a^{2x} + 2a^x - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 在区间 $[-1, 1]$ 上最大值为 14, 那么 $a =$ _____.

19. 已知关于 x 的方程 $2a^{2x-2} - 7a^{x-1} + 3 = 0$ 有一个根是 2, 则方程的其余的根是 _____.

三、解答题

20. 已知 $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$, ($a > 0, a \neq 1$),

- (1) 求 $f(x)$ 的定义域;
 (2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性;
 (3) 求使 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围.

21. 已知正三角形 ABC 的边长为 a , 分别在边 AB, BC, CA 上截取 AD, BE, CF , 使 $AD:BE:CF = 1:2:3$, 求 $\triangle DEF$ 面积的最小值.

$$\sqrt{3} < AD < \frac{1}{2} \sqrt{3} < \frac{1}{2} \sqrt{3} < \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

22. 已知函数 $f(x)$ 满足 $axf(x) = b + 2f(x)$ ($ab \neq 0$), 且 $f(1) = 1$, 集合 $\{x | f(x) = x, x \in R\}$ 中只有一个元素, (1) 求 $f(x)$ 的解析式;

- (2) 若将 $f(x)$ 的图像左移 2 个单位所得函数图像与函数 $g(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像的交点.

23. 证明对任意实数 θ 和绝对值不等于 1 的任意实数 r , 都存在实数 a , 使得 $2^a = 1 - 2r \cos \theta + r^2$ 成立.

24. 已知函数 $f(x) = \log_2(a^x - 1)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$),

- (1) a 取何范围的值时, $f(x)$ 的图像在 y 轴右侧?

- (2) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

25. 设 a, b, c 皆为实数, 集合 $A = \{(a, b, c) | a^2 - bc - 8a + 7 = 0\}$, $B = \{(a, b, c) | b^2 + c^2 + bc - 6a + 6 = 0\}$, 且 $A \cap B \neq \emptyset$.

- (1) 求实数 a 的取值范围;
 (2) 设 $y = ab + bc + ac$, 试求 y 的最大值或最小值.

第三章 不等式的解法(一)

一、选择题

1. 下列命题中正确的是 ()

(A) 若 $\frac{x}{y} > 1$ 则 $x > y$

(B) “ $a > b$ ”是“ $a - c > b - c$ ”的充分不必要条件

(C) 若 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d} > 0$, 则 $a > b > 0$ 且 $0 < c < d$

(D) “ $a > b$ ”是“ $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$ ”的必要不充分条件

2. 集合 $M = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$, $N = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$ 若 $M \cup N = R$, $M \cap N = \{x | 3 < x \leq 4\}$, 则有 ()

(A) $a = 3, b = 4$ (B) $a = 3, b = -4$

(C) $a = -3, b = -4$ (D) $a = -3, b = -4$

3. 与不等式 $\frac{3x-1}{3-x} \geq 1$ 同解的不等式(组)是 ()

(A) $3x - 1 \geq 3 - x$

(B) $3x - 1 \leq 3 - x$

(C) $3x - 1 \geq 3 - x$ 或 $3x - 1 \leq 3 - x$

(D) $(x-1)(x-3) \leq 0$
 $x \neq 3$

4. 不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集是 $\{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\}$, 则 $a + b$ 的值是 ()

(A) 10 (B) -10 (C) 14 (D) -14

5. 不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-3x-5} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+8x-19}$ 的解集是 ()

(A) $\{x | 1 \leq x \leq 10\}$

(B) $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 10\}$

(C) $\{x | 1 < x < 10\}$

(D) $\{x | x < 1 \text{ 或 } x > 10\}$

6. 关于 x 的方程 $x^2 - x - (m+1) = 0$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有解, 则实数 m 的取值范围是 ()

(A) $[-\frac{5}{4}, +\infty)$

(B) $[-\frac{5}{4}, -1]$

(C) $[-\frac{3}{4}, 1]$

(D) $(-\infty, 1]$

7. 若 $a > |x-3| + |x-2|$ 的解集非空, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $0 \leq a \leq 1$

(B) $a > 1$

(C) $a \geq 1$

(D) $0 < a < 1$

8. 若不等式 $\sqrt{x(4-x)} > mx$ 的解集是: $\{x | 0 < x \leq 4\}$, 则实数 m 的取值范围是 ()

(A) $m \geq 0$

(B) $m < 4$

(C) $m < 0$

(D) $m \leq 0$

9. 不等式 $\frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)}{x+1} < 0$ 的解集是 ()

(A) $\{x | -1 < x < 1\} \cup \{x | 2 < x < 3\}$

(B) $\{x | x < -1 \text{ 或 } 1 < x < 3\}$

(C) $\{x | x < -1 \text{ 或 } 1 < x < 2 \text{ 或 } 2 < x < 3\}$

(D) $\{x | x < -1 \text{ 或 } 2 < x < 3\}$

10. 若 $1 < x < a$, 则下列各不等式成立的是 ()

(A) $(\log_a x)^2 < \log_a x^2 < \log_a (\log_a x)$

(B) $\log_a (\log_a x) < (\log_a x)^2 < \log_a x^2$

(C) $\log_a x^2 < \log_a (\log_a x) < (\log_a x)^2$

(D) $\log_a (\log_a x) < \log_a x^2 < (\log_a x)^2$

11. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{1-|c|}$ 的定义域是 ()

(A) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

(B) $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

(C) $[-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$

(D) $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$

12. 不等式 $\sqrt{(x-1)(2-x)} > 4 - 3x$ 的解集为 ()

(A) $[\frac{4}{3}, 2]$

(B) $[\frac{6}{5}, \frac{4}{3}]$

(C) $(\frac{6}{5}, 2]$

(D) $(-\infty, 2]$

13. 当 $x = \frac{9}{4}$ 时, 不等式 $\log_a (x^2 - x - 2) >$

$\log_a (-x^2 + 2x + 3)$ 成立, 则此不等式的解集是 ()

(A) $\{x | -1 < x < 3\}$

(B) $\{x | -1 < x < \frac{5}{2}\}$

(C) $\{x | x > \frac{5}{2} \text{ 或 } x < 2\}$

(D) $\{x | 2 \leq x < \frac{5}{2}\}$

14. 已知 $\log_x 8 < \log_y 8 < 0$, 则 x, y 的大小关系是 $x < y < 1$ ()

(A) $1 < x < y$ (B) $0 < x < y < 1$

(C) $x > y > 1$ (D) $0 < y < x < 1$

15. 不等式 $\frac{x+a}{x^2+4x+3} \geq 0$ 的解集为 $\{x | x \geq 2 \text{ 或 } -3 < x < -1\}$, 则实数 a 的值为 ()

(A) 2 (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

二、填空题

16. 不等式 $6^{x^2+x-2} < 1$ 的解集为 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 1\}$.

17. 不等式 $\lg(x^2 + 2x + 2) < 1$ 的解集为 $\{x | -2 < x < 1\}$.

18. $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$ 的解集为 $\{x | x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1\}$.

19. 已知 $1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b} < a^2$, 则 $\log_a b, \log_b a, \log_a \frac{b}{a}, \log_a \frac{a}{b}, \frac{1}{2}$ 的大小关系为 $\log_a \frac{b}{a} < \log_a \frac{a}{b} < \frac{1}{2} < \log_b a < \log_a b$.

三、解答题

20. 解不等式 $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+2} - 9) \leq 3$

$\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+2} - 9) \leq 3$
 $\log_3(3^x - 1) \leq \frac{3}{\log_3(3^{x+2} - 9)}$
 $\log_3(3^x - 1) \leq \frac{1}{2}$

21. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 解关于 x 的不等式 $\log_a(4 - 3x - x^2) - \log_a(2x - 1) > \log_a 2$

$\log_a(4 - 3x - x^2) - \log_a(2x - 1) > \log_a 2$

22. 解不等式 $|\log_{\frac{1}{3}} x| + |\log_{\frac{1}{3}}(3 - x)| \geq 1$, 写出其解集.

23. 解不等式 $2^{1+\sqrt{x-1}} - 33 \times 4^{\sqrt{x-1}-1} < -1$

24. 试求实数 a 的值, 使不等式 $\frac{\log_3(x^2 - 3x + 7)}{\log_3(3x + 2)} < 1$ 的解集是不等式 $x^2 + (5 - 2a)x \leq 10a$ 的解集的子集.

25. 设函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{(x-1)^2 + 1}{1 + 2ax}$

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求使 $f(x) > 0$ 的所有 x 的值.

第四章 不等式的解法(二)

一、选择题

- 当 $a > b$ 时, 下列不等式中成立的是 ()
 (A) $a^3 > b^3$ (B) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
 (C) $|a| > |b|$ (D) $a^2 > b^2$
- 不等式 $\frac{3x-1}{2-x} \leq 0$ 的解集是 ()
 (A) $\{x|x < \frac{1}{3} \text{ 或 } x > 2\}$ (B) $\{x|\frac{1}{3} \leq x < 2\}$
 (C) $\{x|x \leq \frac{1}{3} \text{ 或 } x \geq 2\}$ (D) $\{x|x \leq \frac{1}{3} \text{ 或 } x > 2\}$
- 当 $\log_2 a > 1$ 时, 不等式 $x^2 - (a+2)x + 2a > 0$ 的解集为区间 ()
 (A) $(-\infty, a) \cup (2, +\infty)$
 (B) $(-\infty, 2) \cup (a, +\infty)$
 (C) $(a, 2)$
 (D) $(2, a)$
- 下列各组不等式中, 同解的一组是 ()
 (A) $\frac{x-2}{x-1} > \frac{x-2}{x-1}$ 与 $\frac{x-2}{x-1} < 0$
 (B) $\frac{x-2}{x-1} \leq 0$ 与 $(x-2)(x-1) \leq 0$
 (C) $\lg \frac{x-2}{x-1} < 0$ 与 $\frac{x-2}{x-1} < 1$
 (D) $2^{\frac{x-2}{x-1}} < 1$ 与 $(x-2)(x-1) < 0$
- 不等式 $\frac{1}{x} < x$ 的解集是 ()
 (A) $\{x|x > \pm 1\}$
 (B) $\{x|x \neq \pm 1 \text{ 且 } x \neq 0\}$
 (C) $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$
 (D) $\{x|-1 < x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$
- 不等式 $x^2 + 3|x| < 10$ 的解集是 ()
 (A) $\{x|-5 < x < 15\}$
 (B) $\{x|-2 < x < 5\}$
 (C) $\{x|-2 < x < 2\}$
 (D) $\{x|-5 < x < 2\}$
- " $x > 1$ " 是 " $\frac{1}{x} < 1$ " 的 ()
 (A) 充分不必要条件
 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件
 (D) 非充分也非必要条件
- 不等式 $\arccos 2x < \arccos(1-x)$ 成立, 则 x 的取值范围是 ()
 (A) $(\frac{1}{3}, +\infty)$ (B) $(\frac{1}{3}, 1]$
 (C) $(-1, \frac{1}{3})$ (D) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
- 不等式 $(1-|x|)(1+x) > 0$ 的解集是 ()
 (A) $\{x|-1 < x < 1\}$
 (B) $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$
 (C) $\{x|x < 1\}$
 (D) $\{x|x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$
- 设 $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n$, 集合 $M = \{x|x_3 < x < x_4\}$ 是不等式 $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) < 0$ 的解集的一个子集, 则有 ()
 (A) n 是奇数
 (B) n 是偶数
 (C) n 是任意自然数
 (D) 这样的自然数 n 不存在
- 对于任意 $x \in R$, 不等式 $\frac{3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1} > K$ 恒成立, 则正整数 K 的值为 ()
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 集合 $A = \{x|x^2 - a < 0\}$, $B = \{x|x < 2\}$, 若 $A \cap B = A$, 则实数 a 的取值范围是 ()
 (A) $a \leq 4$ (B) $a < 4$
 (C) $0 < a \leq 4$ (D) $0 < a < 4$
- 如果满足方程 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的实数 x, y 都使不等式 $x + y + d \geq 0$ 成立, 则实数 d 的取值范围是 ()
 (A) $[\sqrt{2}-1, +\infty)$
 (B) $(-\infty, 1-\sqrt{2}]$
 (C) $[\sqrt{2}+1, +\infty)$
 (D) $(-\infty, 1+\sqrt{2}]$

14. 不等式 $\sqrt{4-x} + \frac{|x|}{x} \geq 0$ 的解集是

()

(A) $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$

(B) $\{x | -\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq 2\}$

(C) $\{x | -2 \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq 2\}$

(D) $\{x | -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \text{ 且 } x \neq 0\}$

15. 若集合 $S = \{x | \log_{\frac{1}{2}} x > -2, x \in R\}$, T

$= \{x | \sqrt{x-1} < 2, x \in Z\}$ 则 $S \cap T$ 中的元素个数为 ()

(A) 2个 (B) 3个

(C) 4个 (D) 6个

二、填空题

16. 函数 $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x - 8 \right]}$ 的定义域是_____。

17. 不等式 $x^{\log_{0.5} x} < \frac{1}{x}$ 的解集为_____。

18. 若 $y = \log_{(a^2-1)} x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 则实数 a 的取值范围是_____。

19. 对任意 $x \in R$, 不等式 $x^2 - 2(4m-1)x + 15m^2 - 2m - 7 \geq 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____。

三、解答题

20. 解不等式 $\log_a (2x^2 - 4x) \leq \log_a (x^2 - 4x + 1)$.

21. 若 a 是不等于 1 的正数, 求关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \log_a 2x < 2\log_a x \\ (a-1)x < a^2 - 1 \end{cases}$ 的解集。

22. 求使不等式

$$\frac{\lg(2ax)}{\lg(b+x)} < 1,$$

总存在解 $x \in (1, 2]$ 的实数 a 的取值范围。

23. 设对任意 $x \in R$, 不等式 $x^2 \log_2 \frac{4(a+1)}{a} + 2x \log_2 \frac{2a}{a+1} + \log_2 \frac{(a+1)^2}{4a^2} > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围。

24. 当 $x \in R$ 时, 不等式 $m + \cos^2 x < 3 + 2\sin x + \sqrt{2m+1}$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围。

25. 求证当 $0 < \alpha < \beta < \pi$ 时, 有

$$\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} \leq \frac{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}{x^2 - 2x \cos \beta + 1} \leq \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

第五章 不等式的证明(一)

一. 选择题

1. 设 $a > b$, 那么 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的充要条件是

()

(A) $a > 0, b > 0$ (B) $a > 0 > b$

(C) $a < 0, b < 0$ (D) $ab > 0$

2. 若 $abc > 0, a > c, b < d < 0$, 则有

()

(A) $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$

(B) $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$

(C) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

(D) $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$

3. “ $x > 1$ ”是“ $x^2 > 1$ ”的

()

(A) 充要条件

(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件

(D) 既非必要又非充分条件

4. 若 $a > b > 0$, 那么下列不等式中恒成立的是

()

(A) $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

(B) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

(C) $\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$

(D) $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab}$

5. 已知 $ab < 0$, 则有

()

(A) $|a+b| < |a-b|$

(B) $|a+b| > |a| + |b|$

(C) $|a-b| < |a+b|$

(D) $|a-b| < |a| + |b|$

6. 已知 $0 < b < a < \frac{1}{4}$, 则下列不等式成立的是

()

(A) $\sqrt{a-b} > a-b > \sqrt{a} - \sqrt{b}$

(B) $\sqrt{a} - \sqrt{b} > \sqrt{a-b} > a-b$

(C) $\sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \sqrt{b} > a-b$

(D) $a-b > \sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$

7. 已知 $c < 0$, 下列不等式成立的是

()

(A) $c > 2^c$ (B) $c > \left(\frac{1}{2}\right)^c$

(C) $2^c < \left(\frac{1}{2}\right)^c$ (D) $2^c > \left(\frac{1}{2}\right)^c$

8. 若 $a > b > 0$, 且 $m > 0$, 则下列不等式成立的是

()

(A) $\frac{b}{a} > \frac{b+m}{a+m}$

(B) $\frac{b}{a} > \frac{b-m}{a-m}$

(C) $\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}$

(D) $\frac{b}{a} < \frac{b-m}{a-m}$

9. 对于 $x \in R$, 下列不等式恒成立的是

()

(A) $\frac{1}{x^2+1} < 1$

(B) $x^2+1 > 2x$

(C) $x^2+4 \geq 4x$

(D) $\lg(x^2+1) \geq \lg 2x$

10. 函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$, 在区间 $(0, 1)$ 上, $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 函数值的大小关系为

()

(A) $f(x) < f^{-1}(x)$

(B) $f(x) = f^{-1}(x)$

(C) $f(x) > f^{-1}(x)$

(D) 不确定

11. 设 $a, b, c \in R$, 则“ $b^2 - 4ac < 0$ ”是“ $ax^2 + bx + c > 0 (a \neq 0)$ 恒成立的

()

(A) 充要条件

(B) 必要但不充分条件

(C) 充分但不必要条件

(D) 既非充分也非必要条件

12. 已知 $x > 0$, 则 $2 - 3x - \frac{4}{x}$ 的最大值是

()

(A) -4 (B) $2 - 3\sqrt[3]{9}$

(C) -6 (D) 不存在

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C > 90^\circ$, 下列关系正确的是

()

(A) $\sin C < \cos A + \cos B < \sin A + \sin B$

(B) $\sin C < \sin A + \sin B < \cos A + \cos B$

(C) $\cos A + \cos B < \sin C < \sin A + \sin B$

(D) $\cos A + \cos B < \sin A + \sin B < \sin C$

14. 若 $q > 0$ 且 $q \neq 1, m, n \in N$, 则下列不等式成立的是 ()

(A) $1 + q^{m+n} = q^m + q^n$

(B) $1 + q^{m+n} < q^m + q^n$

(C) $1 + q^{m+n} > q^m + q^n$

(D) 以上答案都不正确

15. 若 $a + b + c = 1$, 又 $a, b, c \in R^+$, 则

$\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1}$ 的最大值是 ()

(A) $3\sqrt{2}$

(B) $3\sqrt{3}$

(C) 6

(D) 不存在

二、填空题

16. 设 $0 < a < \frac{1}{2}, A = 1 - a^2, B = 1 + a^2$,

$c = \frac{1}{1-a}, D = \frac{1}{1+a}$, 则 A、B、C、D 由小到大排列为 $\underline{\hspace{1cm}} < \underline{\hspace{1cm}} < \underline{\hspace{1cm}} < \underline{\hspace{1cm}}$

17. 已知 $x^2 - xy + y^2 = 1$, 则 $x^2 + y^2$ 的最大值为 $\underline{\hspace{1cm}}$, 最小值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

18. 已知 x, y 满足等式 $y = x^2$, 则 $\log_2(2^x + 2^y)$ 与 $\frac{7}{8}$ 的大小关系为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

19. 若 $a > 0$, 且 $2a^2 + 3b^2 = 1$, 则 $a\sqrt{2+b^2}$ 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

20. 已知 $a > 0, b > 0$, 试比较 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的大小.

21. 已知 $a, b \in R^+$, 且 $a + b = 1$, 求证: $ax^3 + by^3 \geq (ax + by)^2$.

22. 已知 $a > b > c$ 且 $a + b + c = 1, a^2 + b^2 + c^2 = 3$, 求证:

$$-\frac{2}{3} < b + c < \frac{1}{2}$$

23. 已知 $a, b, c \in R^+, a + b + c = 1$, 求证:

$$\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} \geq \frac{3}{2}$$

24. 已知 $x, y, z \in R$, 且满足条件

$$\begin{cases} x^2 - yz - 8x + 7 = 0 \\ y^2 + z^2 + yz - 6x + 6 = 0, \end{cases}$$

求证 $1 \leq x \leq 9$

25. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $x + y > 2$, 求证:

$$\frac{1+y}{x} \text{ 与 } \frac{1+x}{y} \text{ 中至少有一个小于 } 2.$$

第六章 不等式的证明(二)

一、选择题

- 设 $a, b, c, d \in R$, 有下面五个命题:
 - ① 如果 $a > b, c > d$, 则 $ac > bd$;
 - ② 如果 $ab > c$ 且 $b \neq 0$, 则 $a > \frac{c}{b}$;
 - ③ 如果 $a < b$, 则 $ac^2 < bc^2$;
 - ④ 如果 $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$, 则 $a < b$;
 - ⑤ $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$
 这五个命题中, 真命题是 ()
 (A) ①, ②, ③, ④ (B) ③, ④, ⑤
 (C) ③, ④ (D) ④
- 已知 $\epsilon > 0$, 命题甲: “两个实数 a, b , 满足 $|a - b| < 2\epsilon$ ”, 命题乙: “两个实数 a, b 满足 $|a - 1| < \epsilon$, 且 $|b - 1| < \epsilon$,” 那么 ()
 (A) 甲是乙的充分不必要条件
 (B) 甲是乙的必要不充分条件
 (C) 乙是甲的充要条件
 (D) 乙既不是甲的充分条件, 也不是甲的必要条件
- 若 $a > b > c$, 则有 ()
 (A) $ac > bc$ (B) $ab > ac$
 (C) $|ab| > |bc|$ (D) 以上答案均不正确
- 若 $x < a < 0$, 则有 ()
 (A) $x^2 < ax < a^2$ (B) $x^2 > ax > a^2$
 (C) $x^2 < a^2 < ax$ (D) $a^2 > x^2 > 0$
- 若 $a, b \in R$, 且 $ab < 0$, 那么 ()
 (A) $|a + b| > |a - b|$
 (B) $|a + b| < |a - b|$
 (C) $|a - b| < ||a| - |b||$
 (D) $|a - b| < |a| + |b|$
- 如果 $a < b < 0$, 则下列不等式中不能成立的是 ()
 (A) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (B) $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$
 (C) $|a| > |b|$ (D) $a^2 > b^2$
- 若 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 且 $a \neq b$, 则在 $a + b, 2\sqrt{ab}, a^2 + b^2, 2ab$ 中代数式的值最大的一个是 ()
 (A) $a^2 + b^2$ (B) $2\sqrt{ab}$
 (C) $2ab$ (D) $a + b$
- 如果 $a > 0, b > 0$, 则不等式 $a > \frac{1}{x} > -b$ 等价于 ()
 (A) $-\frac{1}{b} < x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{a}$
 (B) $-\frac{1}{a} < x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{b}$
 (C) $x < -\frac{1}{b}$ 或 $x > \frac{1}{a}$
 (D) $-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{b}$
- 若 $x > 1$, 则函数 $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ 的最小值是 ()
 (A) x (B) $2\sqrt{\frac{x}{x-1}}$
 (C) 2 (D) 3
- 若 $a > b > 0$, 设 $x = \sqrt{a+b} - \sqrt{a}, y = \sqrt{a} - \sqrt{a-b}$, 则 x 与 y 之间的大小关系为 ()
 (A) $x > y$ (B) $x < y$
 (C) $x \geq y$ (D) $x \leq y$
- 设 $u = \frac{1}{2}(\log_a m + \log_a n)$,
 $v = \log_a \frac{m+n}{2} (m > 0, n > 0, 0 < a < 1)$, 则 u 与 v 间的大小关系是 ()
 (A) $u < v$ (B) $u > v$
 (C) $u \leq v$ (D) $u \geq v$
- 已知 $\log_a(a^2 + 1) < \log_a 2a < 0$, 则 a 的取值范围是 ()
 (A) $0 < a < 1$ (B) $\frac{1}{2} < a < 1$
 (C) $0 < a < \frac{1}{2}$ (D) $a > 1$
- 不等式 $ax^2 + (a-6)x + 2 > 0$ 的解集为 R , 则有 ()
 (A) $2 < a < 18$ (B) $a > 3$
 (C) $a > 2$ (D) $a = 3$
- 已知 $a^2 + b^2 + c^2 = 1, a, b, c \in R$, 则下列不等式中成立的是 ()
 (A) $(a+b+c)^2 \geq 1$

$$(B) ab + bc + ca \geq \frac{1}{2}$$

$$(C) |abc| \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$(D) a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

15. 函数 $f(x) = x + \frac{1}{x} (x \neq 0)$ 的值域是

()

$$(A) [-2, 2]$$

$$(B) [2, +\infty)$$

$$(C) (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$(D) (-\infty, -2]$$

二、填空题

16. 函数 $f(x) = 2x^2 + \frac{3}{x^4}$ 的最小值为 _____, 此时 $x =$ _____.

17. 已知 $x, y \in \mathbb{R}^+$, 且 $2x + y = 1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是 _____.

18. 设 $a, b, m, n \in \mathbb{R}^+$, 且 $m + n = 1$, 则 $\sqrt{ma + nb}$ _____ $m\sqrt{a} + n\sqrt{b}$ (填表示大小关系的符号).

19. 若 $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, 且 $a > b$, 则四个数: $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{a+d}{b+d}$, $\frac{b+c}{a+c}$ 从小到大排成 _____
 $< \frac{a+d}{b+d} < \frac{b+c}{a+c} < \frac{b}{a}$.

三、解答题。

20. 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 试比较 $\frac{1}{2} \log_a t$ 与 $\log_a \frac{t+1}{2}$ 的大小, 并证明你的结论。

21. 已知 $a > 1, b > 1, c > 1$ 且 $ab = 10$, 求证 $\log_a c + \log_b c \geq 4 \lg c$.

22. 已知 a, b, c 为互不相等的正数, 求证 $a^{2a} \cdot b^{2b} \cdot c^{2c} > a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b}$.

23. 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 求证

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2} (a + b + c)$$

24. 已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有定义, $f(0) = f(1)$ 且对任意 $x, y \in [0, 1]$, 均有 $|f(x) - f(y)| < |y - x|$ 成立, 求证对任意 $x, y \in [0, 1]$, 不等式 $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$ 成立。

25. 求半径为 R 的球内接正三棱锥的最大体积。

第七章 数列(一)

一、选择题

- 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 3, a_3 = 6, a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{a_n}$, 则 a_5 等于 ()
(A) 36 (B) 38 (C) $\frac{11}{2}$ (D) 45
- 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 次和公式为 $S_n = 4n^2 - n + 2$, 则它们通项公式为 ()
(A) $a_n = S_n - S_{n-1} = 8n - 5$
(B) $a_1 = 5, a_n = 8n - 5$
(C) $a_n = 8n - 5$
(D) $a_n = \begin{cases} 5 & (n=1) \\ 8n-5 & (n \geq 2) \end{cases}$
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 450$, 则 $a_2 + a_8$ 的值是 ()
(A) 45 (B) 75 (C) 180 (D) 300
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_4 + a_7 = 39, a_2 + a_5 + a_8 = 33$, 则 $a_3 + a_6 + a_9$ 等于 ()
(A) 30 (B) 27 (C) 24 (D) 21
- 首项为 $\frac{1}{25}$, 第 10 项为开始比 1 大的项, 则此等差数列的公差取值范围是 ()
(A) $d > \frac{8}{75}$ (B) $d < \frac{3}{25}$
(C) $\frac{8}{75} < d < \frac{3}{25}$ (D) $\frac{8}{75} < d \leq \frac{3}{25}$
- 首项为 1, 公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_4, a_6 成一个等比数列的前三项, 则这一等比数列的第 4 项为 ()
(A) 8 (B) -8 (C) -6 (D) 不确定
- 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 前九项的和 $S_9 = 36$, 则 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ 的值是 ()
(A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 28
- 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 2 + 3, a_3 = 4 + 5 + 6, a_4 = 7 + 8 + 9 + 10, \dots$, 那么 a_{10} 的值等于 ()
(A) 495 (B) 505 (C) 550 (D) 595
- 在 100 以内能被 3 整除, 但不能被 7 整除的所有正整数之和是 ()
(A) 1557 (B) 1473 (C) 1470 (D) 1368
- 若 a, b, c 成等比数, 其中 $0 < a < b < c$, 且 $n \in \mathbb{Z}, n > 1$, 那么 $\log_a n, \log_b n, \log_c n$ 形成的数列是 ()
(A) 等差数列
(B) 等比数列
(C) 每项倒数成等差数列
(D) 每项倒数成等比数列
- 一个公比为正数的等比数列 $\{a_n\}$, $a_1 + a_2 = 30, a_3 + a_4 = 120$, 则 $a_5 + a_6$ 等于 ()
(A) 240 (B) 480 (C) 720 (D) 960
- 若 a, b, c 成等比数列, 则函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交点的个数是 ()
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 0 或 2
- 若等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_n = 567, a_{n-4} = 7$, 则这个数列公比的值是 ()
(A) 2 (B) ± 2 (C) 3 (D) ± 3
- 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 3$, 又满足 $a_{n+1} = 3^n a_n$, 则该数列的通项 a_n 等于 ()
(A) $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (B) $3^{\frac{n^2-n+2}{2}}$
(C) 3^{n^2+n-1} (D) 3^{n^2-n+1}
- 设 $f(n+1) = \frac{1}{2} + f(n) (n \in \mathbb{N})$, 且 $f(1) = 2$, 则 $f(101)$ 等于 ()
(A) 49 (B) 50 (C) 51 (D) 52

二、填空题

- 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n > 0$, 且 $a_2 a_4 + 2a_3 a_5 + a_4 a_6 = 25$, 则 $a_3 + a_5$ 等于 _____。
- 已知 6, $a, b, 48$ 组成等差数列, 6, $c, d, 48$ 组成等比数列, 则 $a + b + c + d =$ _____。
- 已知 a, b, c 成等差数列, 且 $a + b, b + c, c + a$ 成等比数列, 三整数 a, b, c 之和介于 45 和 50 之间, 则 a, b, c 的值分别为 _____。
- 已知 $b > a > 0$ 且 $a, 6, b$ 成等比数列, 而