概率论

应坚刚 何 萍 编著

博学·数学系列

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

概 率 论

应坚刚　何　萍　编著

博学·数学系列

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

概率论/应坚刚,何萍编著. —上海:复旦大学出版社,
2005.8
(博学·数学系列)
ISBN 7-309-04567-X

Ⅰ.概… Ⅱ.①应…②何… Ⅲ.概率论-高等学校-
教材 Ⅳ.0211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 053736 号

概率论

应坚刚 何 萍 编著

出版发行 复旦大学 **出版社**
上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65118853(发行部) 86-21-65109143(邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷 上海江杨印刷厂
开 本 787×960 1/16
印 张 10.75 插页 2
字 数 180 千
版 次 2005 年 8 月第一版第一次印刷
印 数 1—4 100

书 号 ISBN 7-309-04567-X/O·344
定 价 16.00 元

前　言

概率论是大学数学各专业的必修课, 作者讲授概率课程多年, 选用过多种不同的概率论教材, 但经常有学生反映说, 为他们讲授的概率论不像是数学, 作为教师, 我们在教授时也有同样的感觉, 因为其中常常有许多概念不能严格地定义, 许多结果不能严格地证明, 原因是严格地定义和证明需要测度论的语言, 而测度论的体系又不可能在概率论课程中详细介绍, 这促使作者尝试编写现在这本教材, 努力用最简单的语言讲清楚每个概念和严格证明每个结果.

本教材分两章, 第一章讲授概率空间和数学期望的公理体系与基本理论, 大多数涉及的例子都是离散的和古典的, 所用的方法是初等的. 第二章讲授连续型随机变量和分布理论, 介绍了收敛的概念及其性质、特征函数及其应用, 还简单介绍了大数定律与中心极限定理. 整个内容除了假设均匀分布的存在性外, 所涉及的每个结果都有严格的证明. 除最后一节介绍特征函数的内容时需要应用一些简单的复变函数知识, 阅读本教材所需的知识限制在数学分析和线性代数的范围内, 但很好的数学素养会对理解有很大的帮助. 我们在编写过程中遵循的宗旨是简明扼要, 期望学生在理解概率的直观与历史背景的同时认识到概率论是严密数学理论的一个分支. 书中还讲述了大量直观的经典例子, 它们是教材的重要组成部分, 期望读者通过这些例子来理解概率论的方法. 如果读者对经典的概率问题感兴趣, 可以进一步阅读 Feller [3], 从直觉和理论两方面来说这都是一部极其经典的概率教材, 较新的 [4] 也是不错的参考书. 如果读者对概率的数学理论有兴趣, Billingsley [1] 是一个很好的开始.

概率论是历史悠久且直观背景很强的领域, 但它成为数学的一个分支却还不到百年的历史. 概率论的严格公理体系是建立在测度论上的, 而测度论不能很好体现概率生动而直观的一面, 因此教师在讲授概率论和编写概率论教材时, 常常会陷入

注重严格的逻辑体系或者注重直观背景这样两难的选择. 本教材的编写过程也是如此, 虽然我们非常努力地尝试把两者自然地连接起来, 取得我们所理解的某种意义上的平衡, 但是否能达成这一目标依然需要实践的检验. 本教材曾作为复旦大学数学系三年级第一学期部分专业每周 4 学时概率论课程的讲义试用过, 反响良好. 本教材不是一本通用教材, 希望它的特色适用于那些对概率的数学理论感兴趣的读者, 以帮助他们更好地理解概率论. 我们要感谢复旦大学数学系, 他们在基金资助和课程安排方面的鼎力支持对于完成教材的编写是至关重要的; 感谢复旦大学出版社的范仁梅女士为本书顺利出版所提供的帮助.

应坚刚 复旦大学

何 萍 上海财经大学

In celebration of

the 100th anniversary of Fudan University

(1905-2005)

献给复旦大学一百周年校庆

内容提要

本书以概率空间和随机变量为主线，力求将概率论的直观思想同严密的数学逻辑结合起来，主要讲述概率论和随机变量的一些基本理论、经典问题，包括一些重要的分布、数学期望、条件概率和独立性、随机变量的各种收敛性以及相互间关系、大数定律、特征函数的方法、中心极限定理等．本书可作为高等学校理科各专业和其他相关专业的教材，亦可供有关科研人员参考．

目　录

第一章 初等概率论

概率论是数学的一个分支, 产生于人们对随机现象的研究. 观察概率论的历史, 我们可以看到虽然人们早在千年前对游戏中出现的概率问题有兴趣, 但始终不能对其给出严格的定义, 一直到 20 世纪 30 年代由前苏联伟大的数学家 Kolmogorov 引入了严格的公理体系, 将其纳入数学家族. 本讲义把概率论作为严格的数学理论来介绍, 强调其严密的一面, 但读者在学习时也不能忽视其背景和应用. 作为数学的一个分支, 如著名概率学者 Feller [2](p.1) 所言 ①: *要注意区分理论的 3 个方面, 第一是其形式逻辑公理体系, 第二是其直观背景历史演变, 第三是其应用, 对任何一方面的缺失, 都会妨碍你对整个理论的欣赏.*

A. Einstein 有句备受争议的名言:*上帝不掷骰子*. 意思就是说大自然早已确定了所有的规则. 但不论上帝掷不掷骰子, 他至少有时候表现得像在掷骰子, 因为现实世界里确实有许多难以预知结果的现象. 人们称这些现象为随机现象. 概率论是由于人们对随机现象的兴趣发展起来的, 也是研究随机现象的重要工具之一, 但概率论不关心随机现象的成因, 也就是说不研究随机现象是由于自然本身确实不可预知抑或是由于人类的无知. 简单的如掷硬币, 它本质上是一个经典的确定的力学系统, 但现有的测量手段和计算工具远不足以告诉硬币的哪一面会向上, 所以我们一样把它称为随机现象. 概率这个词是人们经常使用的, 用来描述一个随机现象中某个事件出现的可能性大小, 但也许很少有人会仔细地想一想人们在使用这个词的时候的确切意义. 例如, 大多数人都知道掷硬币得到国徽的概率是 $\frac{1}{2}$, 但它的含义究竟是什么呢? 又如, 若天气预报说明天下雨的概率是 $\frac{1}{2}$, 它的含义又是什么? 是否和掷硬币的情况一样呢? 其实这两种场合是不同的, 在前一种场合下, 这样的说法是有依据的, 而在后一种场合, 人们只是用概率表达自己的一种信念. 说前一种情况有依据,

---

① 原文: In each field we must carefully distinguish three aspects of the theory: (a) the formal logical content, (b) the intuitive background, (c) the application. The character, and the charm, of the whole structure cannot be appreciated without considering all three aspects in their proper relation.

是因为我们可以用一种简单的方法进行验证, 例如, 我们可以任意次地重复地掷硬币, 看其中正面或反面出现的比例, $\frac{1}{2}$ 的意义在于当掷足够多次硬币后, 这个比例大约会是 $\frac{1}{2}$. 而在后一种情况, 概率只是表达说话人语气的一种方式, 不能验证其正确或不正确. 数学中的概率论是以前一种情况为研究对象的. 关于这方面类似问题的解释, 更多地属于哲学范畴, 感兴趣的读者可参考 von Mises 的经典读物 [8].

在 20 世纪 30 年代, 前苏联数学家 A.N. Kolmogorov 把概率作为测度引入了公理体系, 概率论从此成为数学的一个分支, 它很好地重现了绝大多数已知的经典概率问题, 就如同几何学可以重现实际测绘中的问题一样. 在这里, 我们对概率论的早期历史作一简单说明.

(1) 1654 年: B. Pascal (1623—1662 年) 与 P. Fermat(1601—1655 年) 在 1654 年夏天的一些通信. 在其中, 他们对一些所谓的机会问题进行了探讨, Fermat 建议了古典概率的算法, 而 Pascal 想讨论赌博中的公正问题.

(2) 1657 年: Huygens (1629—1695 年) 出版的书 *On Calculations in Games of Chance*.

(3) 1713 年: J. Bernoulli (1654—1705 年) 出版的书 *The Art of Guessing*, 证明了大数定律.

(4) 1730 年: De Moivre (1667—1754 年) 的工作: The Analytic Method, 证明了中心极限定理.

(5) 1812 年: Laplace (1749—1827 年) 出版的书: *Essai philosophique sur les probabilites*.

(6) 1933 年: Kolmogorov 出版的书: *Foundations of Probability Theory*, 概率的公理化推出, 并被大家接受.

还有许多著名学者在概率的早期研究中留下他们的名字: 如 Poisson (1781—1840 年), Gauss (1777—1855 年), Chebyshev (1821—1894 年), Markov (1856—1922 年), von Mises (1883—1953 年), Borel (1871—1956 年) 等. 然后随着整个数学基础的成熟, 概率也成为一个重要的数学领域.

在这一章中, 我们首先简单介绍集合的概念, 它是概率论也是所有数学理论的基本语言, 然后以例子的方式介绍历史上被关注过的一些经典和直观的概率问题, 期望读者由此来理解 §1.3 中概率的公理化体系, 另外在本章还介绍了随机变量及其分布的概念, 定义了随机变量的数学期望以及数学期望的许多性质.

§1.1 集合与计数

集合和映射已经成为现代数学的通用语言, 概率论的叙述和展开也同样要用这种语言. 这里, 我们假设读者已经熟悉了集合和映射的基本概念及理论, 在这一小节中, 我们先简单复习一下在此讲义中所用到的集合论语言并将介绍可列与不可列的概念, 它对于理解概率的数学理论是极其重要的.

我们通常用大写字母表示集合, 小写字母表示集合的元素. 符号 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 中的一个元素, $a \notin A$ 表示 a 不是 A 中的元素. 集合 A 称为是集合 B 的子集, 如果 $a \in A$ 蕴含着 $a \in B$, 或者说 A 的元素都在 B 中, 记为 $A \subset B$. 空集 $\varnothing$是不含任何元素的集合, 因此是任何集合的子集. 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则说 A, B 两个集合重合, 记为 $A = B$. 比如 $\{1,2\} = \{2,1\}$. 集合之间的基本运算有并, 交, 差. 集合 A, B 的并 $A \bigcup B$ 是属于 A, B 之一的元素全体,

$$A \bigcup B := \{x:\ x \in A \text{ 或者 } x \in B\}.$$

交 $A \bigcap B$ 是同时属于两者的元素全体,

$$A \bigcap B := \{x:\ x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

差 $A \setminus B$ 是属于 A 但是不属于 B 的元素全体,

$$A \setminus B := \{x:\ x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

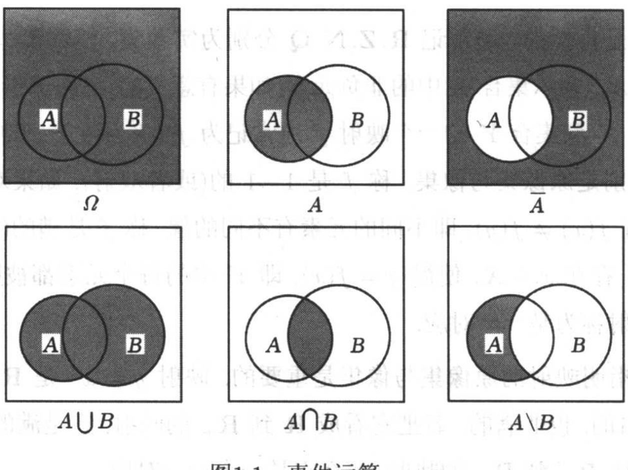

图1.1　事件运算

用图 1.1 来表示这些运算是很形象的方法. 如果我们预先固定一个集合 Ω, 讨论的集合都是它的子集时, 可以定义补运算, 对于 $A \subset \Omega$, A (如果必要的话, 要说明是关于 Ω) 的补 A^c 是 Ω 中不属于 A 的元素全体,

$$A^c := \Omega \setminus A.$$

并与交的运算都有很好的运算性质, 比如交换律, 结合律成立. 另外分配律也成立:

$$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C),$$

$$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C).$$

我们可以容易地定义任意多个集合的并与交的运算, 设 $A_i, i \in I$ 是一族集合, 则

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x: \text{ 存在 } i \in I, \text{ 使得 } x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x: \text{ 对任何 } i \in I, \ x \in A_i\}.$$

下面的 De Morgan 公式说明在补运算下, 并与交的运算是对偶的,

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c,$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

它们的证明是直接的. 通常记 $\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}$ 分别为实数集、整数集、自然数集和有理数集. 符号 A_+ 表示集合 A 中的非负元素(如果有意义的话)的子集.

从集合 X 到集合 Y 的一个映射 f 通常记为 $f: X \longrightarrow Y$, 其中 f 是映射的法则, X, Y 分别是原像集与像集. 称 f 是 1—1 的(或者双射), 如果对任何 $x, y \in X$, 且 $x \neq y$, 有 $f(x) \neq f(y)$, 即不同的元素有不同的像. 称 f 是满的(或满射), 如果对任何 $y \in Y$, 存在 $x \in X$, 使得 $y = f(x)$, 即 Y 中的每个元素都被照到. 一个 1—1 的且满的映射称为是一一对应.

例 1.1.1 指明映射的原像集与像集是重要的. 映射 $y = x^2$ 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射, 既非1—1的, 也非满的. 若把它看成 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}_+$ 的映射, 它是满的, 但非 1—1 的. 若再把它看成 $\mathbf{R}_+$ 到 $\mathbf{R}_+$ 的映射, 那么它是一个一一对应. ∎

设 $B\subset Y$, 定义 B 在 f 下的逆像

$$f^{-1}(B):=\{x\in X: f(x)\in B\},$$

即 $x\in f^{-1}(B)$ 当且仅当 $f(x)\in B$. 还是取上面的映射, $f(x)=x^2$. 那么 $f^{-1}(\{1\})=\{1,-1\}$, $f^{-1}([0,1])=[-1,1]$, $f^{-1}((0,1])=\{-1\le x\le 1, x\ne 0\}$. 逆像有很好的运算性质, 下面结果说明逆像作为运算和并, 交, 补 3 种运算是可以交换的.

定理 1.1.1 设 $f: X\longrightarrow Y$ 是映射. 那么

(1) $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$, $f^{-1}(Y)=X$;

(2) 如果 $B\subset Y$, 则 $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c$;

(3) 如果 $B_i, i\in I$ 是 Y 的子集族, 则

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i);$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i).$$

定理的证明是非常简单的, 按定义直接验证就可以了. 比如验证(2), $x\in f^{-1}(B^c)$ 等价于 $f(x)\in B^c$, 等价于 $f(x)\notin B$, 或 $x\notin f^{-1}(B)$, 因此等价于 $x\in(f^{-1}(B))^c$.

固定一个集合 X, 交、并、补等是作用在其子集上的运算, 就像加减乘除是作用在数上的运算一样. X 的子集的全体称为是 X 的幂集, 记为 2^X. 幂集的子集称为是 X 的子集类, 就是 X 的某些子集组成的集合, 通常用花体字母表示. 说一个子集类对某种运算封闭是指子集类中的集合经过此运算后得到的集合仍然在此子集类中.

下面我们简单讨论集合的势, 以便读者理解可数的概念. 一个集合 A 称为是有限集, 如果它仅有有限多个元素, 也就是说它是空集或者存在一个自然数 n, 使得 A 与 $\{1,2,\cdots,n\}$ 一一对应. 集合 A 的元素个数也称为 A 的势, 记为 $|A|$. 不是有限集的集合称为无限集. 但是无限集的情况要复杂得多, 因为无法直接数其元素的个数. 那么有没有办法比较无限集的势呢? 答案是肯定的, 但不是直接去数而是用一一对应的方法. 两个集合称为等势, 如果两者间有一个一一对应. 显然对于有限集合, 这和元素个数相等的意义是相同的. 但是不是所有的无限集都是等势的呢? 如果都是等势的, 那么等势这个概念就意义不大了. 下面的定理说明答案是否定的.

定理 1.1.2 设 A 是非空集合, 那么 A 和 A 的幂集不是等势的.

证明 假设 A 与幂集 2^A 之间有一个一一对应记为 ϕ. 对任何 $a \in A$, $\phi(a) \subset A$. 定义

$$B := \{a \in A:\ a \notin \phi(a)\},$$

那么就引起矛盾了. 因为 $B \subset A$ 有一个逆像记为 b, 而我们不能判断是否 $b \in B$: 如果 $b \in B$, 则按照 B 的定义 $b \notin B$, 而若 $b \notin B$, 则同样由 B 的定义推出 $b \in B$. □

定理 1.1.2 说明集合中没有最大的势. 那么有没有最小的势呢? 下面的定理回答了这个问题.

定理 1.1.3 在无限集合中, 自然数集的势是最小的. 确切地说, 任何无限集合 A 都有一个子集和自然数集合 $\mathbf{N}$ 等势.

证明 任取 A 的一个元素, 记为 a_1, 当然因为是无限集, 所以 $A\backslash\{a_1\}$ 非空, 从中取一个元素记为 a_2, 而 $A\backslash\{a_1, a_2\}$ 仍然非空 $\cdots\cdots$, 可以一直继续下去. 记 $B := \{a_1, a_2, \cdots\}$. 自然 B 是 A 的一个子集, 而它与自然数的集合之间有一个自然的一一对应. □

与自然数等势的集合称为可列集或可数集, 其他的无限集称为不可列集. 一个至多可列集是指集合是有限的或者可列的. 可列集合的元素可以像自然数那样排列起来. 显然自然数的无限子集一定是可列的. 或者说任何可列集的无限子集是可列的. 另外自然数的乘积集 $\mathbf{N}^2$ 也是可列的, 事实上, 可以这样来排列: 因为对任何 $k \geq 2$, $\{(n, m) \in \mathbf{N}^2 : n + m = k\}$ 是有限集, 以某种方式排好它, 然后再按 k 从小到大排好就可以了. 因此有限个或者可列个可列集的并仍然是可列的, 不可列集去掉一个可列子集后仍然是不可列的.

由此推出有理数集也是可列的, 因为(至少正的)有理数集实际上和 $\mathbf{N}^2$ 是一个(互素对)子集, 是等势的. 就是说可以把有理数排列出来, 但它显然不能像自然数那样按数的大小排列出来, 因为任何两个有理数之间一定还有有理数. 下面我们来证明实数集是不可列的.

定理 1.1.4 实数集 $\mathbf{R}$ 是不可列的.

证明 实际上等价于证明单位区间 $[0, 1]$ 不可列. 通常有两种方法证明之. 一是证明 $[0, 1]$ 可以与 $2^{\mathbf{N}}$ 一一对应. 设 A 是 $\mathbf{N}$ 的子集, 把它从小到大排列好. 定义

$$a_n := \begin{cases} 1, & n \in A, \\ 0, & n \notin A, \end{cases}$$

及

$$\phi(A) := 0.a_1a_2\cdots,$$

其中右边是小数的 2 进制表示. 那么 ϕ 是 $2^{\mathbf{N}}$ 到 $[0,1]$ 的满射, 但还不是单射, 原因是有限小数的表示不唯一, 例如, $0.1 = 0.01111\cdots$. 但是读者可以自己证明这样的数只有可列多个.

另一个方法也是经典的, 称为对角线法. 假设 $[0,1]$ 可列, 那么把它们写成 2 进制排列出来 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, 其中 $x_n = .a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\cdots$. 定义 $b_n := 1 - a_n^{(n)}$, $n \geq 1$ 及 $y = .b_1b_2b_3\cdots$. 那么 $y \in [0,1]$ 但 y 不等于任何 x_n, 原因是 y 与 x_n 的第 n 位小数不同. 因此矛盾. □

从势的意义上讲, 实数集与有理数集有本质的差别. 有限与无限之间有本质的不同, 比如有理数的有限次四则运算仍然是有理数, 但是任何无理数都可以表示为可列个有理数的和. 因此可列次运算会产生本质的变化, 极限实际上就是无限次运算. 在无限中, 可列与不可列经常也有本质的不同, 以后我们会发现, 概率论中重要的是可列次运算.

最后简单介绍计数的问题, 也就是组合理论. 最重要的是下面的乘法原理.

定理 1.1.5　设完成一件事情分 r 个顺序的步骤, 第一步有 n_1 种选择, 固定第一步的选择后, 第二步有 n_2 种选择, 固定前两步的选择后, 第三步有 n_3 种选择, $\cdots$, 那么完成这件事情共有 $n_1n_2\cdots n_r$ 种选择.

从 n 个学生中选 r 个学生排成队列是典型的例子, 这时第一步有 n 种选择, 第一个人选定后, 第二个人有 $n-1$ 种选择, $\cdots$, 由乘法原理共有

$$n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

种排列的方法, 记此数为 $(n)_r$ 称为 n 个对象中选 r 个的排列数. 如果 $n = r$, 这等于说 n 个学生有多少种不同的顺序, 共有 $n!$ 种. 这里注意选择数是指固定前面步骤中的选择后的选择数, 单独地看第二步, 它和第一步一样有可能选择到所有的人, 因此也有 n 种选择, 但选好了第一个, 第二步就只有 $n-1$ 个选择了. 这是不可重复的情形, 在其他一些情形下选择也许是可以重复的, 比如选号码, 设 r 个人都从 $1, 2, \cdots, n$ 中选个号码, 因为可以重复, 每个人都有 n 种选择, 我们讲选择是独立的, 这时共有 n^r 种不同选择.

将上面 n 个对象取 r 个排列分成如下两步: 先取出 r 个对象, 然后再将它们排顺序. 第一步的不同选择数称为是 n 个对象中取 r 个的组合数, 记为 $\binom{n}{r}$ 或 C_n^r, 与排列数的不同处是它不计顺序, 第二步是 r 个对象的排列有 $r!$ 这么多选择. 再用乘法原理得

$$(n)_r = \binom{n}{r} \cdot r!,$$

因此

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

组合数也被理解为 n 个不同元素的组分为包含 r 个与 $n-r$ 个元素的两个组的分组数.

例 1.1.2 掷一个骰子, 有 6 种可能; 掷两个骰子, 有 36 种可能. 若区别骰子, 两个骰子点数不同有 $6 \times 5 = 30$ 种可能, 3 个骰子点数互相不同有 $6 \times 5 \times 4 = 120$ 种可能. 若不区别骰子, $2,1,3$ 与 $1,2,3$ 就不区分了, 这时两个骰子点数不同有 $6 \times 5/2! = 15$ 种可能, 3 个骰子点数互相不同有 $6 \times 5 \times 4/3! = 20$ 种可能. 从标准的 52 张扑克牌中取 5 张牌, 当然通常不在意牌的顺序, 共有 $\binom{52}{5}$ 种选择. 其中没有重复的牌点的可能选择共有 $\binom{13}{5} \cdot 4^5$ 种, 恰有一个对子的可能选择有 $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3$ 种, 恰有两个对子的可能选择有 $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4$ 种. 恰是三带二(full house)的可能选择有 $13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}$ 种. ∎

在估计 $n!$ 时, 下面的 Stirling 公式是重要的, 其证明参考 [3],

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}.$$

习 题

1. 证明 De Morgan 公式与定理 1.1.1.
2. 设 f 是集合 X 到 Y 的映射, $\mathscr{B}$ 是 Y 的一个子集类, 定义 X 的子集类

$$f^{-1}(\mathscr{B}) := \{f^{-1}(B):\ B \in \mathscr{B}\}.$$

证明: 如果 $\mathscr{B}$ 对补运算(对应地, 并运算, 交运算)封闭, 那么 $f^{-1}(\mathscr{B})$ 也对补运算(对应地, 并运算, 交运算)封闭.

3. 设 f 是集合 X 到 Y 的映射, $\mathscr{A}$ 是 X 的一个子集类, 定义 Y 的子集类

$$\mathscr{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}.$$

证明: 如果 $\mathscr{A}$ 对补运算(对应地, 并运算, 交运算)封闭, 那么 $\mathscr{B}$ 也对补运算(对应地, 并运算, 交运算)封闭.

4. 证明: 可列个可列集的并仍然是可列的.
5. 证明: 代数数集合是可列的.
6. 一个 0-1 序列是指取值是 0 或者 1 的数列. 证明: 至多只有有限多元素不等于 0 的 0-1 序列的集合是可列的.
7. 证明: 在 $[0,1]$ 与 $(0,1)$ 之间存在一个一一对应. 你能否构造出一个来?
8. 从标准的 52 张扑克牌中取 5 张牌, 求下列情况各有多少不同选择:

   (1) 正好是个顺子;

   (2) 正好是个同花顺子;

   (3) 4 种花色都出现.
9. Morse码是由一列横线和点组成的. 不超过10个这样的符号可以表示多少个字?
10. 设 T_n 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 不同划分的数目, 如 $T_1=1$, $T_2=2$. 证明:

$$T_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T_k.$$

§1.2 古典概率模型

让我们来看看概率的直观背景, 体会应该怎样来建立概率论的公理体系. 这一节有些细节可能不是严格的逻辑推理, 请读者注意并在阅读了以后的章节后补上这些漏洞. 随机的特点是有许多可能出现的结果, 而无法给出预测. 我们把这样的事情称为随机试验, 通常用 E 表示. 可能出现的结果全体作为一个集合称为样本空间, 可以是有限集, 也可以是无限集, 通常用 Ω 表示, 其中的元素称为样本点或基本事件. 要注意的是这里所说的可能出现的结果依赖于你关心的问题或解决问题的方法.