2001年最新版

GAOKAO
BEIKAO
CONGSHU

高考备考丛书

高考命题研究组 编著
王大赫 主编

# 高考数学考什么

北京教育出版社

2001年最新版

GK

GAOKAO
BEIKAO
CONGSHU

高考备考丛书

高考命题研究组　编著
王大赫　主编

# 高考数学考什么





北京教育出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高考数学考什么 / 高考命题研究组编著. - 北京:北京教育出版社,1999

(高考备考丛书　王大赫主编)

ISBN 7 - 5303 - 1975 - 2

Ⅰ. 高 ...　Ⅱ. 高 ...　Ⅲ. 数学课 - 高中 - 升学参考资料
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 52053 号

高考备考丛书

**高考数学考什么**

GAOKAO SHUXUE KAOSHENMO

高考命题研究组　编著

王大赫　主编

*

北 京 教 育 出 版 社 出 版

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码:100011

北京出版社出版集团总发行

新　华　书　店　经　销

北京市朝阳宏伟胶印厂印刷

*

850×1168 毫米　32 开本　9.625 印张　200000 字

2000 年 2 月第 1 版　　2001 年 1 月第 2 版第 3 次印刷

印数　40001 - 55000

ISBN 7 - 5303 - 1975 - 2

G·1949 定价: 12.00 元

《高考备考丛书》

丛 书 主 编:王大赫
语文学科主编:王大赫
数学学科主编:李松文
英语学科主编:何国贵
物理学科主编:梁敬纯
化学学科主编:陶谋靖
历史学科主编:陈隆涛
副主编:姜 菲 王树青
政治学科主编:李天章
副主编:王万军 程崇杰
本 册 编 者:李松文

# 前　言

为迎接新世纪的挑战，全面贯彻落实《面向21世纪教育振兴行动计划》，我国的高等教育和基础教育正在进行全面的改革。普教系统大力倡导素质教育，已在进行面向新世纪的课程改革，以利于在高考中选拔更加具有学习潜能和创新意识的人才。高考作为大学选拔新生所举行的考试，体现了国家的选才意志和标准，教育部教学［1999］3号文印发了《关于进一步深化普通高等学校招生考试制度改革的意见》和教育部考试中心关于《高考内容和形式改革方案》（征求意见稿），这两个文件是这次高考改革的重要的纲领性文件。高考内容改革包括知识要求和能力要求，特别是高考命题思想的改变——过去是“以知识立意”，现在改为“以能力立意”，许多人由于理解不正确，因而导致备考工作误入歧途。本丛书的编写工作是在原版的基础上作了较大的修订使之更加贴近“3+2”的命题思路，又如高考命题怎样“遵循教学大纲，但不拘泥教学大纲”？高考能力性、应用性试题的构成是怎样的？怎样进行学科综合能力的训练？对这些至关重大的话题，均作了科学、具体的阐述。2001年高考考什么？怎么考？不是一般人能够回答正确的，我们在这里特聘了考试研究专家、学科专家和多年从事备考工作的特高级教师，做了比较正确、深刻的阐述，并且配备了足够数量的试题，供考生训练，相信它可以起到题海拾贝、撷其精华的作用。在同类备考书中，此套丛书无论是“3+2”

或“3+X”考试都是步入高考成功之路的最明智的选择。

《高考备考丛书》包括语文、数学、英语、物理、化学、政治、历史七科，还有高考文科等值模拟试题和高考理科等值模拟试题。其特点是：1. 认真分析近几年高考出现的新题型，提高考生对必考题、疑难题、易错题的综合解题能力；2. 预测 2001 年高考命题思路，编写针对性强，体现“能力立意”的综合练习题，并附有详细的解题指导；3. 本丛书的作者具有较高的权威性，其内容对考生有很强的指导性和实用性。

本套丛书的编写工作，得到了命题专家、考试工作者、省高考阅卷组和许多教师的指导和关心，在这里谨向他们表示谢意。由于编写工作时间紧迫，又要反映最近最新的信息及出版时间的要求，不免有不当之处，敬请谅解。

王大赫

2000 年 8 月

# 目 录


**第一部分 近届高考数学科考生答卷错误借鉴**…………（1）

一、代数方面 …………（4）

二、三角方面 …………（41）

三、立体几何方面 …………（51）

四、解析几何方面 …………（58）

**第二部分 高考数学科命题原则及新思路**…………（68）

一、数学高考考试内容改革的回顾 …………（68）

二、高考考试内容改革的指导思想 …………（71）

三、近两年的数学高考试题的特点 …………（73）

四、对 2001 年数学高考的展望 …………（84）

**第三部分 高考数学科能力性、应用性、创造性试题题型的构成**…………（87）

一、数学科能力性试题的构成 …………（87）

二、数学科应用性试题的构成 …………（97）

三、数学科创造性试题的构成 …………（116）

**第四部分 高考数学科能力考查要求**…………（126）

一、高考数学科考试内容概述 …………（126）

二、高考数学科能力考查要求 …………（129）

**第五部分 高考数学科综合能力培养系列训练**…………（184）

参考答案…………（259）

# 第一部分

## 近届高考数学科考生答卷错误借鉴

从考生的答卷情况，多数考生对基础知识、基本技能、基本思想方法的掌握有所加强，对基础题和常见的题目做得较好，学生的能力有所提高，注意掌握和运用数学思想方法，综合运用知识和方法，提高了分析问题和解决问题的能力．但在考生的答卷中存在着一些带有普遍性的问题，这些问题是造成考生失分的主要原因．．

在进行高三数学总复习的过程中，要善于汲取别人成功的经验和失败的教训，有的放矢地进行复习，不断提高数学素养，这是我们分析考生答卷错误的根本原因．

多年来，从数学高考考生答卷中反映出来的主要错误有以下五个方面：

**1．对基础知识的理解不深刻、掌握不牢固、运用不灵活**

数学高考要求理解《考试说明》中各部分知识内容和每一个知识点，不仅要记住，关键是在特定的数学背景下，考生对数学规律（包括性质、法则、公式、公理和定理等）的掌握和运用，能否运用相应的知识和方法去解决问题．

在高考试题中，比较注重在各知识点的内在联系上设计题目，一道小题（选择题或填空题）分值不高，但考查的一般不是单一的知识点，而是多个知识点的综合，需要综合运用各种知识和

方法于一道小题之中才能解决.

从考生的答卷看,不少考生在概念的理解上深度不够,尤其是当一个概念以变式出现或与其他内容综合在一起时,就出现各种各样的错误.

**2.运算能力较低**

主要表现在:运算过程的合理性差,运算结果的正确率低,尤其在进行字母运算时,不能正确地推演一般表达式.

运算能力是运算技能和逻辑思维能力的结合,要求考生不仅会根据法则、公式正确地进行运算,而且要理解算理,能够根据条件寻求合理、简捷的运算途径,要迅速准确.运算,不仅求出结果,有时还要辅助证明.

运算能力的问题也反映一些认识问题,只求想的对,但算不对,有时思路是对的,但运算过程是错的,认为是"粗心大意"造成的,这实际上是素质不高的表现,是能力低的反映.

**3.推理论述不严密,语言表达能力差**

不少考生在做计算题或证明题时,在推理方面,出现前提和结论脱节,甚至因果倒置、逻辑混乱的情况,不能正确地运用语言来表现自己的思想,似乎会做,但表述不清楚的现象很常见.由于逻辑推理不严密,造成失分严重,但考后不少考生往往自我感觉良好,但当公布分数后,却感到后悔莫及.

在高考试题中,一些解答题,不论是计算求值题,还是证明题;不论是代数、三角,还是立体几何、解析几何,经常需要边推理,边计算,计算时有推理,推理时需要计算(个别证明除外),推理时要讲严密性,运算时要讲准确性,这些往往是考生经常出错的地方,反映出语言表达、书面表述的能力较差.

**4.综合、灵活地运用有关数学知识和方法来解决问题的能力薄弱**

这个问题主要反映在解答题中的综合性大题上.主要反映

以下问题：

(1)缺乏对问题进行分解、重新组合的能力.

多数考生在单一地直接地运用某一知识进行解题时表现较好，但要综合地或变式地运用某些知识解题时感到困难，不知从哪一方面入手，生搬硬套的现象也常发生.

在解综合题时，找不出已知和未知的联系，不能根据题中的信息，运用已学的数学知识和方法进行重新组合，寻求解决问题的方案.

(2)运用数学思想方法的意识较差.

解题时要涉及数学思想和方法，而数学思想和方法蕴涵在所用的数学知识和方法之中，蕴涵在运用概念、定理、公式、法则进行解题的过程之中.解题时需要将知识、方法、思想融为一体，考生在这方面是比较欠缺的.

(3)能力方面，尤其在分析问题和解决问题能力方面，在创造性方面比较薄弱.

**5.缺乏解决数学应用问题的能力**

最近几年来，加大了数学应用问题的考查力度.数学应用问题的考查对中学数学教学的导向是好的，让学生在学习数学知识和方法的基础上，引导学生把数学知识和方法应用于实际.数学源于实际、又要回到实际，去解决社会生产、生活和相关学科中的一些问题，培养学生应用数学的意识.

通过数学应用问题的考查，引导学生从所熟悉的生产、生活和相关学科的实际问题出发，通过分析、归纳、抽象出数学概念和规律，然后运用有关的数学知识和方法加以解决，这对于让学生更深入地掌握数学基本理论、基本方法，不断提高能力是很有益处的.

数学应用问题的考查一般与阅读理解能力的考查相结合，要求考生自己阅读材料，读懂题意，获取信息，理解问题中数学

语言和非数学语言，抽象其中的数量关系，将日常文字语言转化为数学语言，运用数学的知识、技能、方法、思想去解决问题.这就要求考生具有一定的学习能力、独立获取知识的能力.这种能力的提高，对人的一生的发展有深远的影响，这就是高考所强调的人的潜能的表现.

下面结合代数、三角、立体几何、解析几何近几年的高考试题，分析考生的答卷失误的原因，以利于学生在今后高三总复习过程中，不断地加以解决.

## 一、代数方面

### 1.集合与函数

**例 1** 1992 年全国高考(文)0.25(理)0.44

设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 $S$，其中由 3 个元素组成的子集数为 $T$，则$\frac{T}{S}$的值为________.

**分析** 高考对文字语言的考查突出表现在对数学概念理解的考查.本题中的“元素”、“子集”、“子集数”、“全部子集数”是考查的重点.考生出错误往往反映在对概念的理解上.

首先，对“含有 10 个元素的集合的全部子集数”，这个数是什么？怎么求？这句话包含了由 10 个元素，9 个元素，…，2 个元素，1 个元素组成的子集以及空集，其个数总和为

$$S = C_{10}^{10} + C_{10}^{9} + C_{10}^{8} + \cdots + C_{10}^{2} + C_{10}^{1} + C_{10}^{0} = 2^{10} = 1024.$$

其中 $T$ 是“由三个元素组成的子集数”，则

$$T = C_{10}^{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120.$$

$$\therefore \frac{T}{S} = \frac{120}{1024} = \frac{15}{128}.$$

学生失分的主要原因是对集合中的有关概念理解不深刻，

不少考生丢掉了空集，答数为$\frac{120}{1023}$. 也有的考生对 $S = C_{10}^{10} + C_{10}^{9} + \cdots + C_{10}^{1} + C_{10}^{0}$怎么进行计算不清楚了，忘掉了$(a+b)^n$ 展开式中的系数和等于 $2^n$，结果也无法计算.

**例 2**　1995 年全国高考(理)0.86

已知 $I$ 是全集，集合 $M$、$N \subset I$，若 $M \cap N = N$，则(　　).

(A)$\overline{M} \supseteq \overline{N}$　　　　(B)$M \subseteq \overline{N}$

(C)$\overline{M} \subseteq \overline{N}$　　　　(D)$M \supseteq \overline{N}$

**分析**　本题主要考查对集合中有关数学符号语言的理解和应用.

关键是对符号 $M \cap N = N$ 怎么理解，这里是指对集合 $N$ 中任意元素 $x$，都有 $x \in M$，因此 $N \subseteq M$，故有 $\overline{M} \subseteq \overline{N}$. 这个关系对 $N$ 是空集或 $M$、$N$ 都是空集时也适用. 故选(C).

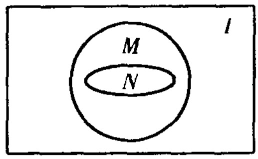

图 1－1

考生出错，主要是对数学符号表示的意义不能理解，经常是记住符号，不会应用. 本题若画出韦氏图 1－1，就看得更清楚了.

**例 3**　1993 年全国高考(文)0.47(理)0.63

设 $a$、$b$、$c$ 都是正数，且 $3^a = 4^b = 6^c$，那么(　　).

(A)$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$　　　　(B)$\frac{2}{c} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$

(C)$\frac{1}{c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$　　　　(D)$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$

**分析**　本题主要通过等式考查指数和对数的概念和性质，以及基本运算能力.

关键是如何利用已知条件进行恒等变形，探求 $a$、$b$、$c$ 的关系.

**方法一**　由已知 $3^a = 4^b = 6^c$，取对数

得 $a\lg 3=b\lg 4=c\lg 6$,

$\therefore \dfrac{c}{a}=\dfrac{\lg 3}{\lg 6}=\log_6 3$,

$\dfrac{c}{b}=\dfrac{\lg 4}{\lg 6}=\log_6 4$.

$\dfrac{2c}{a}+\dfrac{c}{b}=2\log_6 3+\log_6 4=2$.

$\therefore \dfrac{2}{c}=\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$. 故选(B).

**方法二** 记 $m=3^a=4^b=6^c$,则 $m>0$ 且 $m\neq 1$,

$\therefore \dfrac{1}{a}=\log_m 3,\dfrac{1}{b}=\log_m 4=2\log_m 2$,

$\dfrac{1}{c}=\log_m 6=\log_m 2+\log_m 3$.

$\therefore \dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{a}$,即 $\dfrac{2}{c}=\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$.

本题考生得分较低,主要是对已知条件如何进行变形,探求 $a$、$b$、$c$ 的关系式,这个思路不明确,得出 $a\lg 3=b\lg 4=c\lg 6$ 之后也不知如何处理,反映出对对数的运算不熟练,对将指数式转化为对数式的过程不明确.

**例 4** 1995 年全国高考(理)0.63

已知 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 $x$ 的减函数,则 $a$ 的取值范围是(　　).

$0<2-ax<1$

$0<a<1$

(A) $(0,1)$　　(B) $(1,2)$　　(C) $(0,2)$　　(D) $[2,+\infty)$

**分析** 本题考查对数函数的单调性与底数 $a$ 的关系,由函数的单调性确定底数 $a$ 的取值范围,而且把单调性限定在区间 $[0,1]$ 上,加强了对逻辑思维能力的考查,本题有一定的综合性,解法上也多种多样,有效地考查了考生的灵活运用知识的能力.

**方法一** 因为 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 $x$ 的减函数,由对数函数的定义知 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

所以 $2-ax$ 是减函数,$x\in[0,1]$,且有 $2-ax>0$. 故 $x=1$

时，有 $2-a>0$，$\therefore a<2$.

由 $2-ax$ 是减函数，$y=\log_a(2-ax)$ 是减函数. 故 $y=\log_a u$ $(u=2-ax)$ 是增函数，$\therefore a>1$.

综合可知 $1<a<2$. 故选(B).

**方法二** 当 $a\in(0,1)$ 时，若 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，则有 $2-ax_1>2-ax_2$，故 $\log_a(2-ax_1)<\log_a(2-ax_2)$.

即 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 $x$ 的增函数，而不是减函数，故排除(A)、(C).

当 $a>2$ 时，函数 $y$ 在 $x=1$ 处无定义，故排除(D). 因此，选(B).

**方法三** $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 $x$ 的减函数的充要条件是：

$$\begin{cases} a>0 \text{ 且 } a\neq 1, \\ 0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1, \\ \log_a(2-ax_1)>\log_a(2-ax_2). \end{cases}$$

等价于下列两个不等式组：

$$(1)\begin{cases} 0<a<1, \\ 0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1, \\ 0<2-ax_1<2-ax_2, \end{cases} \quad \text{或}(2)\begin{cases} a>1, \\ 0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1, \\ 2-ax_1>2-ax_2>0. \end{cases}$$

解不等式组(1)无解，因为当 $0<a<1$ 时，$0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$ 与 $0<2-ax_1<2-ax_2$ 是矛盾的；

解不等式组(2)，由 $2-a>0$（$x=1$ 时），得 $a<2$. 又 $a>1$，得 $1<a<2$.

学生出错多种多样，主要是思维不周造成的. 不少考生选(A)，把 $y=\log_a(2-ax)$ 和 $y=\log_a x$ 混同. 认为是 $0<a<1$.

**例 5** 1997 年全国高考(文)0.41

设函数 $y=f(x)$ 定义在实数集上，则函数 $y=f(x-1)$ 与

$y=f(1-x)$的图象关于(　　).

(A)直线 $y=0$ 对称　　　(B)直线 $x=0$ 对称

(C)直线 $y=1$ 对称　　　(D)直线 $x=1$ 对称

**分析**　考查函数图象的变换,两个函数函数图象之间的关系,考查运动变换的思想方法.本题有多种处理方法.

**方法一**　令 $t=x-1$,则 $1-x=-t, t\in R$.

则函数 $f(t)$与函数 $f(-t)$的图象关于直线 $t=0$ 对称,即直线 $x=1$ 对称.故选(D).

**方法二**　函数 $y=f(x-1)$是将 $y=f(x)$的图象向右平移一个单位.

函数 $y=f(1-x)=f[-(x-1)]$,则 $y=f(-x)$与 $y=f(x)$关于 $y$ 轴对称.将 $y=f(-x)$向右平移一个单位可得 $y=f[-(x-1)]$的图象.

故 $y=f(x-1)$与 $y=f[-(x-1)]$的图象关于直线 $x=1$ 对称,即 $y=f(x-1)$与 $y=f(1-x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称.故选(D).

该题有不少考生选(B),出错的主要原因是将函数 $y=f(x-1)$和函数 $y=f(1-x)$理解为是 $f(x-1)=f(1-x)$.故关于直线 $x=0$ 对称,造成错误.

因此,在研究函数的图象的对称问题,首先要注意区分是指两个函数的图象对称问题,还是一个函数 $y=f(x)$的图象的对称问题,两者不能混淆.

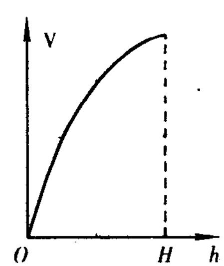


图 1-2

**例 6**　1998 年全国高考(文)0.45(理)0.68

向高为 $H$ 的水瓶中注水,注满为止.如果注水量 $V$ 与水深 $h$ 的函数关系如图 1-2 所示,那么水

瓶的形状(图 1－3)是(　　).

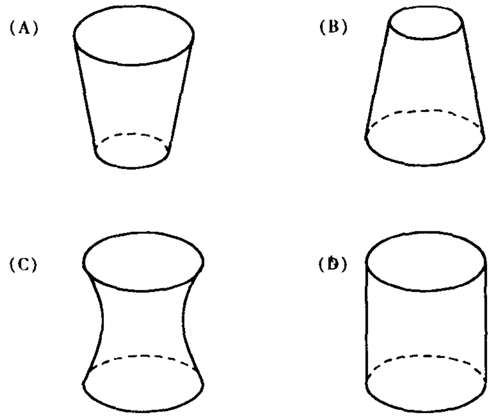


图 1－3

**分析**　本题是一道应用题,其背景是向水瓶注水.通过识图,如图 1－2,给出了注水量 $V$ 与水深 $h$ 的函数关系的图象,要求辨别水瓶的形状.识图的思维过程渗透了考查函数的对应关系,有效地考查了思维能力.

**方法一**　记注水量 $V$ 与水深 $h$ 的函数关系为 $V=f(h)$ 的图象的一段曲线段. $V$ 随 $h$ 的增加而增加,而且开头增加的比较快,然后逐渐变慢,因此,瓶的口径是下部大上部小,故选(B).

**方法二**　记函数图象所表示的函数为 $V=f(h)$,依图可见,有 $f\left(\frac{H}{2}\right)>\frac{1}{2}f(H)$.

由于(A)瓶是上粗下细,所以应有 $f\left(\frac{H}{2}\right)<\frac{1}{2}f(H)$,(C)、(D)瓶都是关于中位面上下对称,因此有 $f\left(\frac{H}{2}\right)=\frac{1}{2}f(H)$,都与题设图象不符,只有(B)符合题设图象的要求.

**本题对数学思维能力考查有所创新,它不是从思维的严密**

和数学的精细的角度进行考查,而是从观察现象抽象其本质的角度考查考生的思维能力,要求考生通过对图象的观察和分析,经过思考和概括,抓住问题的本质,发现事物的变化趋势,从而做出判断,得出结论.

考生出错表现在各个方面,有的考生总想通过各个瓶的注水量 $V$ 与水深 $h$ 的函数关系,把 $V=f(h)$ 的函数表达式求出来,然后再进行判断,因运算量太大,而得不出结果;有的同学观察时抓不住本质,不知如何从图象判断 $V$ 与 $h$ 的函数关系的图象形状,找不出对于 $V$ 和 $h$ 的函数对应关系反映在图象上(A)、(B)、(C)、(D)的大致变化趋势的差别是什么,找不出差别也就无法判断.

**例 7** 1991 年全国高考(理)0.62

根据函数单调性的定义,证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

**分析** 本题考查考生对函数单调性的概念理解和应用的程度,考查逻辑推理能力.

**证明** 在 $(-\infty,+\infty)$ 上任取 $x_1,x_2$,且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_2)-f(x_1)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$

$\because x_1<x_2,\quad \therefore x_1-x_2<0,$

若 $x_1x_2<0$,有

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2>0,$$

若 $x_1x_2\geqslant 0$,有 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$,

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0,$

即 $f(x_2)<f(x_1)$.

所以,函数 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

本题并不难,但考生的得分率并不高,主要错误:

(1)不少考生对如何应用函数单调性的定义去证明函数的