清华大学公共基础平台课教材

大学数学实验

姜启源 邢文训 谢金星 杨顶辉 编著

清华大学出版社

清华大学公共基础平台课教材

大学数学实验

姜启源 邢文训 谢金星 杨顶辉 编著

清华大学出版社
北 京

内容简介

数学实验课的宗旨是：在教师指导下以学生在计算机上动手、动眼、动脑为主，通过用数学软件做实验，学习解决实际问题常用的数学方法，并在此基础上分析、解决经过简化的实际问题，提高学数学与用数学的兴趣、意识和能力。本书通过14个实验介绍数值计算、优化方法和数理统计的基本原理、有效算法及软件实现，并提供若干简化的实际问题，让读者利用学到的数学方法及适合的数学软件在计算机上完成数学建模的全过程。本书适用于学过微积分和线性代数的读者进一步提高利用数学工具和计算机技术分析、解决实际问题的能力。

本书可作为高等院校理工、经管类专业数学实验、数学建模课程的教材或参考书，大学生数学建模竞赛的辅导教材，也可供专业人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学实验/姜启源等编. 一北京：清华大学出版社，2005.2

ISBN 7-302-10140-X

Ⅰ.大…　Ⅱ.姜…　Ⅲ.高等数学－实验－高等学校－教材　Ⅳ.O13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第133449号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

组稿编辑：刘　颖

文稿编辑：王海燕

印 刷 者：北京市昌平环球印刷厂

装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　本：185×230　**印张**：28.25　**字数**：584千字

版　次：2005年2月第1版　2005年2月第1次印刷

书　号：ISBN 7-302-10140-X/O・429

印　数：1～3000

定　价：33.00元

前言

电子计算机的出现和飞速发展是20世纪科学家和工程师对人类做出的最伟大的贡献之一。今天，不论你走进大型工厂的控制间、建筑公司的设计室，还是政府机关的办公楼、学校的多媒体教室，计算机都会立刻进入你的眼帘。刷卡购物、刷卡乘车、刷卡入住、刷卡注册……人们的日常生活越来越离不开计算机。今天我们难以想像在不久的未来计算机会给人类生活带来多么巨大的变化。

数学作为一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学，在它产生和发展过程中，一直是和人们的实际需要密切相关的，历史上许多科学技术的重大发明都离不开数学，电子计算机的出现也应归功于数学家的奠基性工作。反过来，科学技术和生产活动的进步，又促进了数学的发展。特别是电子计算机技术的飞速进步为古老的数学提供了威力巨大的工具，彻底改变了长期以来仅靠一张纸、一支笔做数学题的传统，使数学的应用在广度和深度上都达到了前所未有的程度，促成了从数学科学到数学技术的转化，并使数学技术成为当今高科技的一个重要组成部分和显著标志。同时也把数学从数学家的书斋里和课本中解放出来，成为各行各业认识自然、改造社会的有力武器。

教育必须跟踪、反映并预见社会发展的需要，大学的数学教育更应如此。我们看到，先是出现了一些计算机语言和编写程序的课程，让学生熟悉和学会使用计算机，继而引入各种形式的数学建模课程，架起数学知识和应用之间的桥梁，弥补了学生学完传统数学课程仍不会用的缺陷，对数学教学改革起了显著的促进作用。但是上面两类课程尚未很好地融合，计算机程序一类课程很少涉及数学的应用，数学建模课程又往往是纸上谈兵，学生少有机会自己动手，用计算机这个强有力的工具去分析、解决哪怕是简化的实际问题。目前正蓬勃开展的全国大学生数学建模竞赛，可以说是二者相结合的一个范例，而那毕竟只是少数学生参加的课外科技活动。

作为探索计算机技术和数学软件引入教学后数学教育改革的一项尝试，1996年在教育部立项的面向21世纪非数学专业数学教学体系和内容改革的总体构想中，把“数学实验”列为数学基础课之一，清华大学数学系参加了这项教改的一个课题组，并于1998年进行了数学实验课的试点。在此基础上姜启源等编写了《数学实验》一书（萧树铁教授主编

的面向21世纪课程教材《大学数学》丛书中的一本，高等教育出版社1999年出版）。

近几年国内不少高等院校相继开设了数学实验课，也出版了好几本教材，从中可以看出，大家对于这门课程基本宗旨的认识大体上是一致的，即以学生在计算机上动手、动眼、动脑为主，在教师的指导下，通过用数学软件做实验，学习解决实际问题常用的数学方法，分析、解决经过简化的实际问题，提高学数学、用数学的兴趣、意识和能力。当然，在课程的模式和实验的内容上，各校根据各自的具体情况有所不同，这是十分正常的现象，应当鼓励不同形式的课程模式、内容和方法的大胆探索。

在清华大学新制定的非数学类专业数学教学体系中，数学实验是4门主干课程的最后一门（前3门是微积分、代数与几何、随机数学方法），起着承上（上述3门数学课）、启下（后续课、研究生课程及数学的应用）的作用。我们将它设计为一门重组课程，集数值计算、优化方法、数理统计、数学建模以及数学软件于一体，以"了解数学基本原理、知道主要数值算法、会用数学软件实现、培养数学建模能力"为基本要求，使之既是上述3门数学课程的巩固和提高，又在基本数学知识和数学的应用之间架起一座桥梁。

目前不少院校正在开展"本硕贯通"的教育改革，本科阶段的数学实验课只介绍相关数学知识的基本原理、方法、软件实现及其应用，为研究生阶段要求掌握更深入的理论和方法的数学课程（如数值分析、数学规划、高等数理统计等）提供了许多实际背景，也留下了一些需要进一步解决的问题，从而刺激了学生再学习的愿望。

按照上述的基本思路，从2000年起清华大学在全校范围内大规模地开设数学实验课，每学期3～4个大班（每班约200人），得到同学们的肯定和好评，我们也在教学中不断明确和修正这门课程的指导思想和目的要求，逐步改进和完善课程的具体内容和教学方法，这本教材就是在4年来教学实践的基础上由主要授课教师集体编写的。

基于上面的认识与实践，这本教材的编写遵循了以下原则：

1. 在上述3门数学主干课程的基础上，介绍一些最常用的解决实际问题的数学方法，包括数值计算、优化方法和数理统计的基本原理及主要算法，一般不讲证明，基本上不做笔头练习。

2. 选择合适的数学软件平台（以MATLAB为主，辅之以LINDO和LINGO），能够方便地满足以上内容的软件实现。

3. 数学建模的思想和方法贯穿全书，从建模初步练习开始，以建模综合练习结束，每个实验尽量从实际问题的建模引入，并落实于模型的求解。

4. 精心安排学生的实验，学生自己动手在计算机上做练习的时间和条件必须保证，建议讲课与实验的学时比例至少为1：2，并且对实验报告的内容和格式提出明确的要求。

按照这些原则本书共包含14个实验：数值计算5个实验、优化方法3个实验、数理统计3个实验、数学建模2个实验，另外还有人工神经网络1个实验。这些实验基本上相互

独立，教师可根据具体情况选用。一个实验的内容可在3～4学时内讲完。每个实验都备有充分的、供学生动手做的练习，部分练习题附有提示或参考答案。MATLAB的基本用法编入附录。

针对数学实验课需要知识面广、实例多、计算方法与软件实现相互交叉等特点，课堂讲授宜采用多媒体教学，可以做到实例生动、信息量大、便于接受。我们研制了与本书配套的多媒体课件，交由清华大学出版社出版。

本书实验1,2,12,14由姜启源编写，实验3,10,11,13由邢文训编写，实验6,7,8,9及附录由谢金星编写，实验4,5由杨顶辉编写，张立平统编了部分实验练习的参考答案，黄红选、张立平参加了审阅，全书由姜启源统稿。在清华大学讲授过数学实验课的还有李建国、李津等，他们都对这本教材的编写做出了贡献，在此表示衷心的感谢。

编者

2004.6

目 录

实验 1 数学建模初步

数学建模指的是建立、求解、分析和验证一个实际问题的数学模型的全过程，这个实验在简要说明什么是数学模型之后，通过几个实例介绍建立数学模型的过程，以及数学实验方法在建模中的应用，然后归纳数学建模的基本方法和步骤，并简单阐述学习数学建模的重要意义.

1.1 什么是数学建模

人们在认识、研究现实世界里的某个客观对象时，常常不是直接面对那个对象的原型，而是设计、构造它的各式各样的模型：玩具、照片及展览厅里的三峡大坝模型、神舟飞船模型是直观且形象的实物模型；水箱中的舰艇模型用来模拟波浪冲击下舰艇的航行性能，风洞中的飞机模型用来试验飞机在气流中的动力学特性，它们是工程师们进行舰艇、飞机设计时用的物理模型；汽车司机对方向盘的操纵，钳工师傅对工件的手工操作，依赖于他们头脑中的思维模型；人们常用的地图，电工、电子设计中用的电路图，化学中的分子结构图，是经过某种抽象并按照一定形式组合起来的符号模型. 这些模型都是人们为了一定目的，对客观事物的某一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物，它虽不是原型的复制品，却集中反映了原型中人们需要的那一部分特征，因而有利于人们对客观对象的认识.

数学模型（mathematical model）当然比上面这些模型更加抽象，它是当人们要认识客观对象在数量方面的特征、定量地分析对象的内在规律、用数学的语言和符号去近似地刻画要研究的那一部分现象时，所得到的一个数学表述. 建立数学模型的过程简称为**数学建模**（mathematical modeling）.

数学建模似乎是个新名词，其实作为用数学方法解决实际问题的第一步，它与数学本身有着同样悠久的历史. 两千多年前创立的欧几里得几何，17 世纪发现的牛顿万有引力定律，都是科学发展史上数学建模的成功范例. 在我们日常生活中数学建模的应用也不少见，贷款买房时比较各种不同的还款方案，校园和居民小区里为限制车速而设计路障，为

肥胖者安排合理、有效的减肥方案，都可以建立简单的数学模型加以解决.

为了具体地说明数学建模过程中的要点，举一个中学课程中学过的“航行问题”：

甲乙两地相距 750km，船从甲地到乙地顺水航行需 30h，从乙地到甲地逆水航行需 50h，问船的速度是多少.

读者大概是这样做的：用 x，y 分别表示船速和水速，列出方程

$$\begin{cases}(x+y)\times 30 = 750,\\(x-y)\times 50 = 750.\end{cases}$$

求解得到 $x=20$，$y=5$，于是回答船速为 20km/h.

这是一个代数应用题，稍微仔细分析一下解这道题的过程，里面已经包含了建立数学模型的基本内容，即

- 根据问题背景和建模目的做出必要的简化假设——航行中船速和水速均为常数；
- 用字母和符号表示有关的量——x，y 分别表示船速和水速；
- 利用相应的物理(或其他)规律——匀速运动的距离等于速度乘以时间，列出数学式子——二元一次方程；
- 求解方程，得到数学上的解答——$x=20$，$y=5$；
- 用这个结果回答原问题——船速为 20km/h；
- 对于实际问题，以上结果必须用实际信息来检验.

一般地说，为了定量地解决一个实际问题，从中抽象、归结出来的数学表述就是数学模型. 详细一点，数学模型可以描述为，对于现实世界的一个研究对象，为了一个特定目的，做出必要的简化假设，根据对象的内在规律，运用适当的数学工具，得到的一个数学表述. 而数学建模包括模型的建立、求解、分析和检验的全过程. 从实际问题到数学模型，又从数学模型的求解结果回到现实对象，数学建模的全过程可以表示为图 1.1.

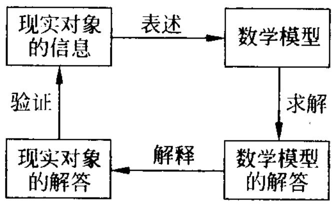


图 1.1 数学建模的全过程

图 1.1 揭示了现实对象和数学模型的关系. 一方面，数学模型是将现象加以归纳、抽象的产物，它源于现实，又高于现实. 另一方面，只有当数学建模的结果经受住现实对象的检验时，才可以用来指导实际，完成实践——理论——实践这一循环.

1.2 数学建模实例与数学实验方法

本节介绍几个数学建模的实例，并说明数学实验方法在建模过程中的应用.

1.2.1 汽车刹车距离

问题 汽车司机在行驶过程中发现前方出现突发事件,会紧急刹车,人们把从司机决定刹车到车完全停止这段时间内汽车行驶的距离,称为刹车距离.常识告诉我们,车速越快,刹车距离越长.那么,刹车距离与车速之间是线性关系,还是更复杂的关系.为了得到二者之间的数量规律,首先做了一组实验:用固定牌子的汽车,由同一司机驾驶,在不变的道路、气候等条件下,对不同的车速测量其刹车距离,得到的数据如表1.1.试从物理上的分析入手,参照这组数据,建立刹车距离与车速之间的数学模型.

表1.1 车速和刹车距离的一组数据

车速/km/h	20	40	60	80	100	120	140
刹车距离/m	6.5	17.8	33.6	57.1	83.4	118.0	153.5

问题分析 为了更直观起见,用MATLAB对表1.1的数据作图(图1.2),可以看到,刹车距离与车速之间并非线性关系,我们需要对刹车距离从机理上作较仔细的研究.

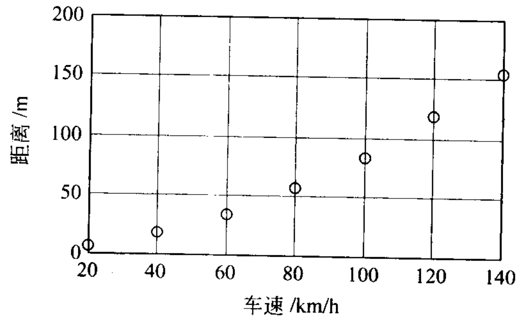


图1.2 表1.1的数据(实际刹车距离)

刹车距离由反应距离和制动距离两部分组成,前者指从司机决定刹车到制动器开始起作用这段时间内汽车行驶的距离,后者指从制动器开始起作用到汽车完全停止所行驶的距离.

反应距离由反应时间和车速决定,反应时间取决于司机个人状况(灵巧、机警、视野等)和制动系统的灵敏性(从司机脚踏刹车板到制动器真正起作用的时间),对于固定牌子的汽车和同一类型的司机,反应时间可以视为常数,并且在这段时间内车速尚未改变.

制动距离与制动器作用力、车重、车速以及道路、气候等因素有关,制动器是一个能量耗散装置,制动力做的功被汽车动能的改变所抵消.设计制动器的一个合理原则是,最大制动力大体上与车的质量成正比,使汽车大致做匀减速运动,司机和乘客少受剧烈的冲击.而道路、气候等因素对一般规则来说只能看作是固定的.

模型假设 基于上述分析,做以下假设:

(1) 刹车距离 d 等于反应距离 d_1 与制动距离 d_2 之和.

(2) 反应距离 d_1 与车速 v 成正比,比例系数为反应时间.

(3) 刹车时使用最大制动力 F,F 做的功等于汽车动能的改变,且 F 与车的质量 m 成正比.

模型建立 由假设(2),有

$$d_1 = k_1 v, \tag{1}$$

k_1 为反应时间. 由假设(3),在 F 作用下行驶距离 d_2 做的功 Fd_2 使车速从 v 变成 0,动能的变化为 $mv^2/2$,从而有 $Fd_2 = mv^2/2$. 又 F 与 m 成正比,按照牛顿第二定律可知,刹车时的减速度 a 为常数,于是

$$d_2 = k_2 v^2, \tag{2}$$

k_2 为比例系数,实际上 $k_2 = \frac{1}{2a}$. 由假设(1),刹车距离为

$$d = k_1 v + k_2 v^2. \tag{3}$$

即刹车距离 d 与车速 v 之间是二次函数关系.

参数估计 虽然(3)式中的参数 k_1,k_2 有一定的物理意义,但是它们难以从机理上确定,常用的办法是根据表 1.1 的数据来拟合(3)式中的参数,称为数据拟合,其算法及软件实现将在实验 5 中介绍. 把表 1.1 中车速的单位先化成 m/s,得到的估计结果为 $k_1 = 0.6522$,$k_2 = 0.0853$. 将它们代入(3)式计算出的刹车距离列在表 1.2 的第 3 行,可与第 2 行的实际刹车距离比较. 计算刹车距离曲线如图 1.3 所示.

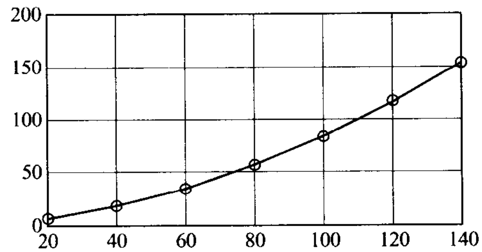


图 1.3 计算刹车距离曲线

表 1.2 计算刹车距离与实际刹车距离的比较

车速/km/h	20	40	60	80	100	120	140
实际刹车距离/m	6.5	17.8	33.6	57.1	83.4	118.0	153.5
计算刹车距离/m	6.26	17.78	34.56	56.61	83.92	116.49	154.33

从 k_1,k_2 的估计结果可知,反应时间为 $k_1 \approx 0.65\text{s}$,刹车时的减速度 $a = \frac{1}{2k_2} \approx 6\text{m/s}^2$. 这些数值是根据表 1.1 的数据算出的,并不具有一般性.

1.2.2 市场经济中的蛛网模型

问题 在自由贸易的集市上常会出现这样的现象：一个时期以来某种消费品(如鸡蛋)的上市量远大于需求，由于销售不畅致使价格下跌，生产者发现养鸡赔钱，于是转而经营其他农副业. 过一段时间鸡蛋上市量就会大减，供不应求将导致价格上涨，生产者看到有利可图又重操旧业，这样下一个时期又会重现供过于求、价格下跌的局面.

商品数量和价格的这种振荡现象在自由竞争的市场经济中常常是不可避免的. 进一步的观察可以发现，振荡有两种完全不同的形式，一种是振幅逐渐减小，市场经济趋向平稳，另一种是振幅越来越大，如果没有外界如政府的干预，将导致经济崩溃. 试建立一个简化的数学模型描述这种现象，研究经济趋向平稳的条件，并讨论当经济趋向不稳定时政府可能采取的干预方式.

蛛网模型 商品在市场上的数量和价格出现反复的振荡，是由消费者的需求关系和生产者的供应关系决定的. 记商品第 k 时段的上市数量为 x_k，价格为 y_k. 这里我们把时间离散化为时段，1 个时段相当于 1 个生产周期，对于肉、禽等指牲畜饲养周期，蔬菜、水果等指种植周期.

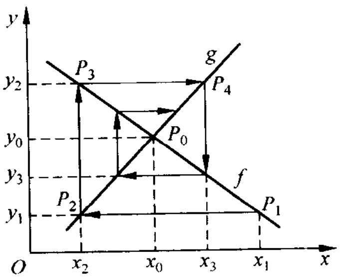
按照经济规律，价格 y_k 依赖于数量 x_k，由消费者的需求关系决定，记作 $y_k=f(x_k)$，称**需求函数**. 因为上市数量越多，价格越低，所以 f 是减函数. 下一时段商品数量 x_{k+1} 依赖于上一时段的价格 y_k，由生产者的供应关系决定，记作 $x_{k+1}=h(y_k)$，称**供应函数**. 因为价格越高，生产量(即下一时段上市量)越大，所以 h 是增函数. 设 h 的反函数为 g，即 $y_k=g(x_{k+1})$，g 也是增函数.

在商品数量和价格变化不大的范围内，可以将 f 和 g 简化为线性函数，在图 1.4(a)和图 1.4(b)中用两条直线表示，它们相交于 $P_0(x_0, y_0)$ 点. P_0 点称为**平衡点**，意思是一旦某一时段 k 商品的上市量 $x_k= x_0$，则由 $y_k=f(x_k)$ 和 $x_{k+1}=h(y_k)$ 可知，$y_k= y_0$，$x_{k+1}= x_0$，$y_{k+1}= y_0$，…，即以后的上市量和价格将永远保持在 $P_0(x_0, y_0)$ 点. 但实际上由于种种干扰使得数量和价格不可能保持不变，不妨设 x_1 偏离 x_0，如图 1.4. 我们分析 x_k，y_k 的变化.

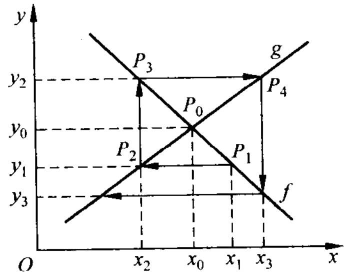
商品数量 x_1 给定后，价格 y_1 由直线 f 上的 P_1 点决定. 数量 x_2 又由 y_1 和直线 g 上的 P_2 点决定，y_2 由 x_2 和 f 上的 P_3 点决定，这样在图 1.4(a)上得到一系列的点 P_1，P_2，P_3，…，这些点按图上箭头方向趋向 P_0 点，称 P_0 为**稳定平衡点**，意味着商品的数量和价格的振荡将趋向稳定.

但是如果直线 f 和 g 由图 1.4(b)给出，类似的分析可以发现，P_1，P_2，P_3，…沿着箭头的方向，将越来越远离 P_0 点，称 P_0 为**不稳定平衡点**，意味着商品的数量和价格将出现越来越大的振荡. 图 1.4(a)和 1.4(b)中的折线 $P_1P_2P_3$…形似蛛网，在经济学中称为**蛛网模型**.

为什么会有这样截然相反的现象呢？分析一下图1.4(a)和图1.4(b)的不同之处就可发现，图1.4(a)的f比g平，而图1.4(b)的f比g陡. 用K_f和K_g分别表示f和g的斜率(取绝对值)，可以看出，当$K_f < K_g$时P_0稳定；当$K_f > K_g$时P_0不稳定.



(a) 蛛网模型，P_0稳定



(b) 蛛网模型，P_0不稳定

图 1.4

方程模型 为了定量地分析上述现象，将需求函数f表示为

$$y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0), \quad \alpha > 0, \quad k = 1,2,\cdots \tag{4}$$

供应函数h表示为

$$x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0), \quad \beta > 0, \quad k = 1,2,\cdots \tag{5}$$

从(4)式，(5)式中消去y_k可得

$$x_{k+1} - x_0 = -\alpha\beta(x_k - x_0), \quad k = 1,2,\cdots \tag{6}$$

知道了x_0，y_0，x_1，α，β，可以用(4)式，(5)式或(6)式计算x_k，y_k.

为了讨论时间充分长以后(即$k\to\infty$时)x_k的变化趋势，由(6)式可递推地解出

$$x_{k+1} - x_0 = (-\alpha\beta)^k(x_1 - x_0), \quad k = 1,2,\cdots \tag{7}$$

显然，当方程的系数(取绝对值)小于1，即

$$\alpha\beta < 1 \quad 或 \quad \alpha < 1/\beta \tag{8}$$

时$x_k \to x_0$，P_0点稳定；而当

$$\alpha\beta > 1 \quad 或 \quad \alpha > 1/\beta \tag{9}$$

时$x_k \to \infty$，P_0点不稳定.

注意到(4)式，(5)式的系数α，β有$K_f = \alpha$，$K_g = 1/\beta$(因为$K_h = \beta$)，所以条件(8)，(9)与蛛网模型中的分析是完全一致的.

看一个例子. 设某种商品在市场上处于平衡状态时的数量为$x_0 = 100$(单位)，$y_0 = 10$(元/单位)，开始时段商品数量为$x_1 = 110$. 若上市量减少1个单位价格上涨0.1元，而价格上涨1元下一时段供应量增加5个单位，即$\alpha = 0.1$，$\beta = 5$，则按照方程(4)及方程(5)计算得到的x_k，y_k($k = 1,2,\cdots,10$)如图1.5所示，可以看出x_k，y_k分别趋向x_0，y_0. 当α升高至0.24时(β不变)，得到的结果如图1.6所示，x_k，y_k越来越大.

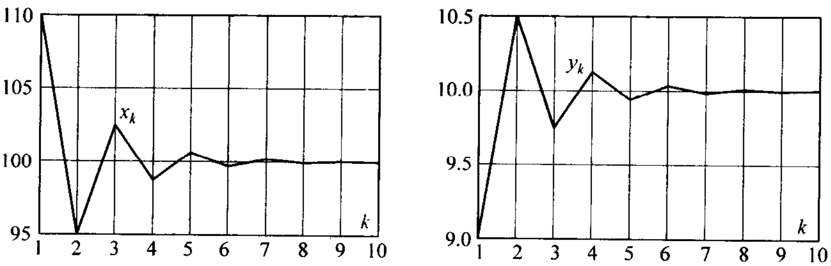


图 1.5 $\alpha=0.1,\beta=5$ 时蛛网模型 x_k,y_k 的变化

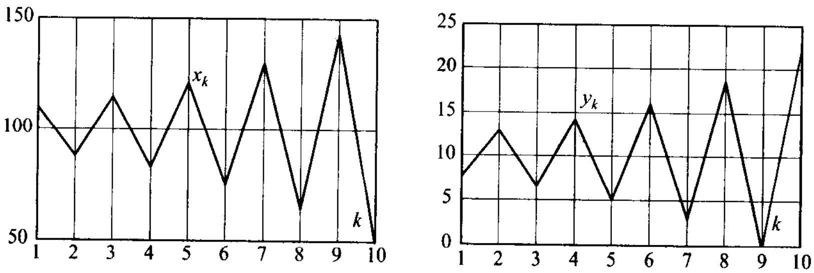


图 1.6 $\alpha=0.24,\beta=5$ 时蛛网模型 x_k,y_k 的变化

(4)式,(5)式或(6)式表示了 x_k, y_k 和 x_{k+1}, y_{k+1} 之间的关系,称为**差分方程**,实验 2 将专门讨论用差分方程描述的离散动态过程.

结果解释 考察 α,β 的含义,可以对市场经济是否会趋于平稳做出合理的解释. 由(4)式可知,α 表示商品上市量减少 1 个单位时价格的上涨幅度;由(5)式可知,β 表示价格上涨 1 个单位时(下一时段)供应量的增加. 所以 α 反映消费者需求的敏感程度,如果是生活必需品,消费者处于持币待购状态,商品数量稍缺,人们立即蜂拥抢购,α 就会较大;反之,若消费者购物心理稳定,则 α 较小. β 的数值反映生产经营者对价格的敏感程度,如果他们目光短浅,热衷于追逐一时的高利润,价格稍有上涨就大量增加生产,β 就会较大;反之,若他们素质较高,有长远的计划,则 β 较小. 定量分析的结果(8)式表明,当 α,β 的乘积小于 1 时,P_0 是稳定平衡点,商品数量和价格的振荡会趋向平稳.

政府的干预 基于上述分析可以看出,当经济趋向不稳定时政府有两种干预办法.

一种办法是使 α 尽量小,不妨考察其极端情况 $\alpha=0$,即需求直线 f 变为水平,这时不管供应函数如何,即不管 β 多大,(8)式恒成立,经济总是稳定的. 实际上这种办法相当于政府控制价格,无论商品上市量有多少,命令价格 y_0 不得改变(图 1.7(a)).

另一种办法是使 β 尽量小,极端情况是 $\beta=0$,即供应直线 g 变为竖直,于是不管需求函数如何,即不管 α 多大,(8)式恒成立,经济稳定. 实际上这相当于政府控制商品的上市数量,当供应量少于需求时,从外地收购,投入市场;而当供过于求时,收购过剩部分,维持