

21

世纪高等院校教材

大学数学

钟谭卫 主编



科学出版社

www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

大学数学

钟谭卫 主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是华南农业大学教学改革成果之一,知识结构新颖,注重代数、几何和分析的相互融合.主要包括导数和微分、微分中值定理及导数的应用、积分、积分的应用、多元函数的微积分、行列式与矩阵、线性方程组及其解法、相似矩阵与二次型、无穷级数等9章,各章均配有适量习题,书末附有习题答案或提示.

本书可作为高等院校本科非数学专业的工、理、农、林、经、管、法等专业学生大学数学课程的教材,也可供科技人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学/钟谭卫主编. —北京:科学出版社,2003

(21世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-011577-5

I. 大… II. 钟… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 049292 号

责任编辑:李鹏奇/责任校对:栢连海

责任印制:安春生/封面设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2004年2月第二次印刷 印张:22 1/2

印数:5 001—8 000 字数:444 000

定价:27.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序

20 世纪后半叶计算机、计算技术、网络技术等的迅速发展极大地推动了科技和社会的进步,也凸显了数学科学的重要作用,各行各业对数学的要求日益增加,数学的应用也正向一切领域渗透.美国科学基金会(NSF)把数学科学创新项目作为该基金会 2001~2006 年的五大创新项目之首,美国有关专家在论述为什么要这样做时认为其“背后的推动力是所有科学和工程领域的‘数学化(mathematization)’”.作为用数学去解决各种实际问题的桥梁的“数学建模及与之相伴的计算正在成为工程设计的关键工具”.特别是,面对入世后激烈的高科技竞争,越来越多的人正在学习和应用数学建模的思想、方法去研究和解决本职工作中所碰到的各种实际问题.数学教育改革的问题也就自然成为当前十分重要和迫切的问题.

早在 20 世纪 80 年代工业发达国家为了研究他们国家的年轻人应该怎样应对 21 世纪的挑战就作了众多的调研,几乎所有的调研报告都认为数学和科学的教育改革是关键,有的甚至提出了数学、科学和技术三位一体的改革思想.增强学生的数学素质和应用数学去分析、解决实际问题的能力是培养具有创新和竞争力人才的必要前提和重要基础.为此,大学主干数学课程的教学改革就成了当务之急的关键,世界各国都在花大量的人力、物力和财力进行这方面的改革.这种改革包括从 21 世纪的社会和科技发展的角度重新审视大学主干数学课程的设置、指导思想、教学内容和方法、技术手段的使用、教材建设、因材施教和师资培训等诸多方面.实事求是地从学校和专业特点、学生的实际情况和将来的去向出发,不是一味追求向国内外顶尖学校靠拢的形式的做法,而是着重于培养的人才是否真正具有创新精神和竞争力又是这一改革浪潮中的明显特点.在这样的基础上确定改革措施、进行改革试验一步一个脚印地、实实在在地提高教学质量.在我国,多年来在教育部的领导和广大教师的努力下大学的数学教育改革已经取得了巨大的成绩.

华南农业大学张国权、钟谭卫等老师在校、院领导的大力支持下多年来对该校的主干数学课程的教学进行了颇有成效的改革,深受学生的欢迎.为扩大其教改成果,他们又编写了面向 21 世纪农林类本科主干数学课程的改革系列教材:大学数学、应用概率统计、数学实验.我认为他们编写的教材有以下特点:紧密结合农林类院校和学生的特点,在坚持数学的系统性的基础上突出重点、打好基

础，重在数学思维的熏陶、提高数学修养；着重培养分析和解决问题的能力，增加了数学建模等内容；充分认识到技术手段在学习和应用数学中的重要性，较早地把重要的数学软件包教给学生，并开设了数学实验课。我相信他们在使用新教材的过程中一定会取得更好的教学效果。我衷心地预祝他们在大学数学教育改革和培养人才的事业上取得更大的成绩。

叶其孝

于北京理工大学

前 言

21 世纪信息时代的来临, 随着计算机的广泛应用, 数学日益渗透到理、工、农、医、经、管、法各学科中, 应用范围日趋扩展, 人类的知识积累体系正面临着第三次数学化. 数学学科面貌将发生更巨大的变化, 数学教学的体系、数学教学内容、数学教学方法需要一场更深刻的变革. 作为 21 世纪初非数学类本科数学内容与课程体系模式的探讨研究成果, 《大学数学》、《应用概率统计》与《数学实验》系列教材正是为了适应新的数学教学体系与数学应用需要而编写的. 教材积聚课题组教师多年教学经验与 4 年艰苦试点探索的心血, 教材结合教改实践已三易其稿, 其编写完成是团队奋斗的成果.

这三本系列教材的特点是:

1. 体现创新. 经典内容用现代观点介绍; 新技术、新方法尽量优先选入, 力求做到数学内容现代化.

2. 突出应用. 在选材上突出数学理论应用的实际案例, 将数学建模引入教学改革, 以通俗易懂的方式介绍数学理论和方法在实际领域中的广泛应用.

3. 紧密结合计算机. 注重数学方法与计算机应用相结合, 充分发挥数学、统计软件包的作用, 以提高教学效率, 有效地培养学生应用数学方法解决各种实际问题的能力.

21 世纪初的数学课程改革是一项有组织有步骤的集体行动, 系列教材的编写更是一项复杂而艰巨的系统工程. 十分感谢华南农业大学领导为我们的改革提供了舞台; 十分感谢叶其孝教授在百忙之中审阅本系列教材, 提出不少指导性意见, 并为教材作序; 十分感谢 3 年来在实施本教改课题试点班的教学中倾注心血的付银莲、戴婉仪、卢建平老师; 对全体编写组人员的辛勤劳动表示衷心的感谢.

我们期望这三本系列教材的出版, 能为提高非数学类本科数学基础课的教学质量起到促进作用. 由于我们水平有限, 书中难免有不足之处, 尤其是在一些内容安排上, 恐有偏颇, 恳切希望读者批评指正.

本教材授课时数宜为 80~95 学时. 书中标“*”号的内容可根据教学需要和学时安排进行删减. 主编为钟谭卫 (第四章、第七章), 副主编为王石安 (第一章、绪论)、金玲玲 (第二章、第五章、第九章), 参加编写的还有付银莲 (第三章)、卢建平 (第六章)、赵立新 (第八章), 最后由钟谭卫统稿定稿.

本书可作为高等院校本科非数学专业的工、理（非数学专业）、农、经、管、法专业学生的大学数学课的教材，亦可供其他类型院校相关专业的师生和科技人员参考。

张国权 钟谭卫

目 录

绪论	(1)
第一章 导数和微分	(4)
第一节 函数	(4)
第二节 极限	(14)
第三节 导数	(30)
第四节 求导运算	(40)
第五节 微分	(53)
习题一	(59)
第二章 微分学中值定理及导数的应用	(65)
第一节 中值定理	(65)
第二节 洛必达法则	(70)
第三节 泰勒公式	(72)
第四节 导数的应用	(75)
习题二	(87)
第三章 积分	(90)
第一节 不定积分	(90)
第二节 定积分	(118)
第三节 广义积分	(136)
习题三	(141)
第四章 积分的应用	(150)
第一节 不定积分的应用	(150)
第二节 定积分的应用	(165)
习题四	(175)
第五章 多元函数微积分	(178)
第一节 空间解析几何简介	(178)
第二节 二元函数的概念	(184)
第三节 偏导数和全微分	(188)
第四节 多元复合函数与隐函数的微分法	(194)
第五节 多元函数的极值	(196)

第六节 二重积分	(201)
习题五	(216)
第六章 行列式与矩阵	(219)
第一节 n 阶行列式	(219)
第二节 行列式的性质及计算	(225)
第三节 克拉默法则	(230)
第四节 矩阵及其运算	(232)
第五节 逆矩阵和矩阵的秩	(239)
第六节 分块矩阵	(243)
第七节 矩阵的初等变换和初等矩阵	(246)
习题六	(250)
第七章 线性方程组及其解法	(257)
第一节 向量空间	(257)
第二节 向量组的线性相关性	(259)
第三节 线性方程组解的结构	(266)
第四节 线性方程组有解判别定理	(271)
第五节 线性方程组的解法——高斯消元法	(275)
习题七	(279)
第八章 相似矩阵与二次型	(285)
第一节 向量的内积与正交向量组	(285)
第二节 方阵的特征值与特征向量	(289)
第三节 相似矩阵	(293)
第四节 二次型及其标准形	(301)
习题八	(310)
*第九章 无穷级数	(313)
第一节 常数项级数	(313)
第二节 幂级数	(324)
第三节 函数展开成幂级数	(328)
习题九	(331)
习题答案	(335)
参考文献	(352)

绪 论

一、微积分发展简史

美国著名的数学史家和数学教育家克莱茵 (M.Kline) 说: “数学从微积分开始, 而不是以之为结束”. 这对微积分的推崇也许有些过分, 但也反应出微积分的发明对数学历史发展过程具有无与伦比的巨大作用. 回顾一下微积分发明的历史, 对于学好微积分应不无裨益.

早在从 15 世纪初开始的欧洲文艺复兴时期起, 工业、农业、航海事业及商贸的大规模发展, 形成了一个新的经济时代. 宗教改革和对教会思想禁锢的怀疑 (如日心说), 东方先进科学技术通过阿拉伯的传入, 以及拜占庭帝国覆灭后希腊大量文献流入欧洲, 在当时的知识界呈现出一个完全崭新的面貌, 等待着他们充分发挥聪明才智, 无数伟大的思想家在这种大时代气息的培育下应运而生, 时代科学 (包括时代数学) 也在与宗教迷信的顽强斗争中应运而生.

文艺复兴初期意大利一位多才多艺且有代表性的思想家 Leonardo da Vinci (1452~1519) 是现代科学先驱之一, 他提倡寻找数量关系, 认为: “人们的探讨不能称为是科学的, 除非通过数学上的说明和论证”. 时代的要求促成数学上一个空前活跃和富有创造性时期的诞生, 如航海、测量和地图绘制等促成几何学和三角学的发展; 而绘画对透视深入认识的要求成为射影几何发展的出发点, 更重要的是, 对解决各种问题的普遍科学方法的研究, 需要将代数方法和逻辑演绎几何学结合起来, 导致了 17 世纪费马 (Fermat) 与笛卡儿 (Descartes) 创造了坐标几何, 即解析几何, 为微积分的创立提供了必要的技术条件.

我们在中学里学的数学 (代数、几何、三角) 偏重于定量分析, 我们称之为初等数学. 就其本质而言, 基本上是指相对静止的自然现象的, 这就使得它和物理学相脱节——远离了运动, 我们研究自然界, 不仅要了解事物的“现在”, 更要研究它的“变化”或“运动”. 加上几何中对各种曲线的研究, 对数学提出了种种要求, 最后汇成四个核心的问题, 并通过解决这四个问题最终导致了微积分的产生. 这四个问题是:

问题 1: 运动中速度和路程的互求问题.

问题 2: 一般曲线求切线的问题.

问题 3: 求长度、面积、体积及重心问题.

问题 4: 求极大、极小值问题.

在费马、笛卡儿、帕斯卡(Pascal)、开普勒(Kapler)、沃利斯(Wallis)、巴罗(Barrow)、卡瓦列里(Cavalieri)、伽利略及惠更斯等难以数计的16,17世纪数学家和物理学家们的不断探索之下,第1,2,4问题导致微分概念的产生,第3问题又导致了积分概念的产生.虽然微分与积分在当时还是比较朦胧的概念,而且是独立地发展的,但至少巴罗就已经在他关于几何的讲义(1669年)中指出求曲线切线问题与求曲线下所围面积的关系,这不仅使他的学生牛顿亲受其益,即使是莱布尼茨,据说也是曾研究过巴罗的著作的.经过一个多世纪的酝酿,牛顿和莱布尼茨终于分别在1669年和1684年独立地认识到微分与积分是两个互逆的概念,并统一在微积分基本定理里.在他们参与下形成的崭新的统一的方法逐渐成为科学发展的强有力工具.正如恩格斯指出:微积分从此已大体上完成——微积分至此创立.由这一段历史过程可知,牛顿和莱布尼茨之所以能完成微积分的创立大业,正是由于他们站到了前辈巨人们的肩膀上,才能居高临下,高瞻远瞩,终于获得真理.

微积分创立后的200年间,又经历了一段既曲折又自然的发展过程.在18世纪期间,数学家们由于微积分解决问题的特殊能力,忙着致力于它的多种多样的应用,建立了不少的以微积分方法为主的分支学科,如无穷级数、微分方程、积分方程、微分几何等.对于微积分的理论基础则未曾顾及.进入19世纪,微积分本身的矛盾迭出,数学家们才不得不对微积分的基本概念与理论方法细加分析,通过建立函数的精确概念和 ϵ - δ 方法等来奠定了微积分的严实基础,所以极限方法是无数一流数学家在200年间艰难研究的结果.

在18,19世纪中,原来局限于单变量的微积分,也已推广到多变量的情形,但与把微分和积分作为互逆运算的牛顿-莱布尼茨微积分基本定理只限于单变量的情形相对应,如何扩展至多变量的情形,则似乎并非想像中那么容易,直到19世纪末法国数学家庞加莱指出了多重积分的体积元应有一个正负定向才有了转折.这一看似平凡的想法使得多重积分在坐标变换下原来有些拖泥带水的变换公式,有了一个精练的形式,并使牛顿-莱布尼茨定理到多变量情形的推广步入了坦途.庞加莱关于体积元有定向的这一发现,导致了外微分形式的出现,有关理论由Frobenius和嘉当(E. Cartan)等发扬光大,成为近代数学的重要篇章.对微积分本身来说,则原来的格林(Green)、高斯等人命名的不同形式的定理,统一推广成了一个简明的斯托克斯(Stokes)公式,这正是牛顿-莱布尼茨公式在多变量情形的推广.

从以上叙述可见,从15,16世纪的文艺复兴至17,18世纪的工业革命,使人类从农业经济时代进入工业经济时代,与时代的要求相应,在数学上出现了解析几何与微积分等伟大创造.当前,人类又将从工业经济时代进入又一崭新时代——信息和商品经济时代,为适应新时代的要求,数学又应有什么样的创新?人们将拭目以待.

二、大学数学的主要内容

大学数学包括两大部分内容，第一部分是高等数学，第二部分是线性代数。高等数学和线性代数的教材结构和主要内容可分别用如下框图表示（图中简明地给出所需学习内容的内在联系，虚线内的框图为主框图）。

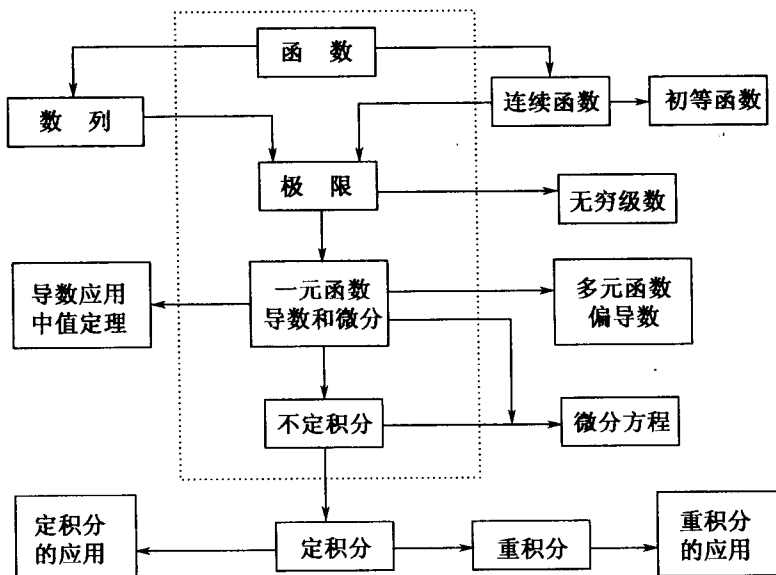


图1 高等数学结构图

线性代数的教材结构和主要内容可用如下框图表示：

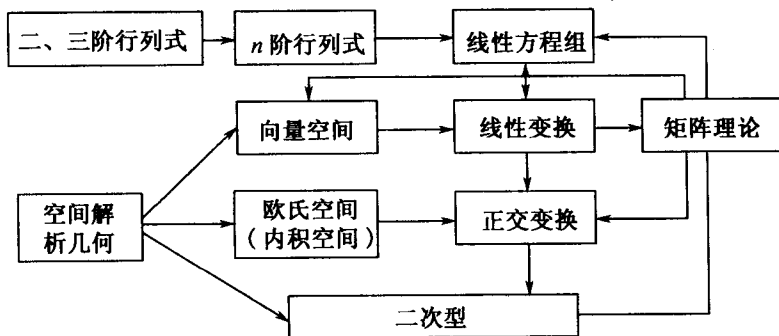


图2 线性代数结构图

第一章 导数和微分

微积分分为微分学和积分学两部分,从本章开始进入微积分学的主体之一——微分学,它的核心概念是导数.导数概念的产生是为了描述曲线的切线和运动质点的速度,更一般地说,是为了描述在自然科学和社会科学中起重要作用的变化率概念,它是打开通向数学知识与真理的巨大宝库之门的钥匙.在介绍导数概念之前,我们首先复习函数概念和讨论函数的极限,函数是微积分研究的基本对象,极限是微积分的中心概念,极限方法是微积分最基本方法,掌握函数概念、极限概念和极限方法是学好微积分的基础.

第一节 函 数

开始学习微积分之前,首先应弄清楚它的研究对象——变量及变量之间的相互依赖关系——函数.

一、常量与变量

从生产实践或科学实验中抽象出来的数学问题中的量如体积、重量、温度、距离、速度、电流、价格、成本等,大致可以分为两类:一类是它们的值在研究过程中相对保持不变的量,称之为常量;另一类是它们的值是可以变动的量,称之为变量.例如,在分析某种产品的总成本时,一般将它分成两部分:固定成本和变动成本,前者是由折旧费、车间经营费及企业管理费等构成,这些费用不随产品产量的增减而变化,因此它是一个常量;后者主要是由原材料费、直接参加生产的工人工资等构成,它们是随着产品产量的增减而增减的,因此它是一个变量.

一个量是常量还是变量,不是绝对的,要根据所讨论问题的具体情况来分析,如重力加速度 g ,在离地心距离不同的地点,其值亦不同,因而 g 是变量,但当要求精度不高时,在地面附近取 $g = 9.8\text{m/s}^2$,它便是常量了.在高等数学中,通常用字母 x, y, z 等表示变量,用字母 a, b, c 等表示常量.

变量和常量都可以用实数来表示,所以应该称它们为实变量或实常量,本书的研究对象都是实变量或实常量,也简称它们为变量或常量.实数和直线上的点有着一一对应关系,并称这条直线为实数轴.今后我们将经常利用实数轴上的点来表示实数,而把点和实数统一起来,不加区别.

变量的变化范围,是指变量的取值范围,当变量取实数值时,我们往往用区间(interval)表示:设 a, b 为实数,且 $a < b$,我们称满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的 x 的全体组成一个闭区间,记为 $[a, b]$,也可以说,变量的取值范围为闭区间 $[a, b]$. 称满足不等式 $a < x < b$ 的 x 的全体组成一个开区间 (a, b) ;称满足不等式 $a < x \leq b$ 或 $a \leq x < b$ 的 x 的全体组成半开半闭区间 $(a, b]$ 或 $[a, b)$;把满足 $x \geq a$ 的 x 的全体组成的区间记为 $[a, +\infty)$,而记满足 $x \leq b$ 的 x 的全体组成的区间为 $(-\infty, b]$;如果变量可以取实数轴上所有的数,我们把它的变化范围记为 $(-\infty, +\infty)$,在这里“ ∞ ”并不表示数量,它只不过是一个记号,前面的“+”,“-”表示方向.有时候,在并不需要指明区间是开的或闭的场合,我们也常用 I, J 等来表示区间.

二、函数的概念

1. 函数的定义

世界是普遍联系的,在现实生活或技术过程中,往往同时有多个变量一起变化,我们不仅要研究事物本身的量的变化,更重要的是研究不同的变量之间的依从关系,这种依从关系中的一种重要情况就是数学中的所谓函数关系.先考虑如下两个变量的情形.

例 1 自由落体问题 设物体下落的时间为 t ,下落的位移为 s .假定开始下落的时刻为 $t=0$,则 s 与 t 之间的依赖关系可由表达式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

给出,其中 g 是重力加速度,在此关系中,位移 s 随着时间 t 的变化而变化,当下落时间 t 在 $[0, +\infty)$ 内取定一个值如 $t=1$ 时,对应的位移 s 也随之有一个确定的数值如 $s = \frac{1}{2}g$ 与之对应.

例 2 销售量调查 某企业为了对其产品的销售量进行市场预测,调查了该产品 1~6 月份的销售量分别为 100、105、110、115、111、120(件).将其列成表格,得到月份与销售量有如下对应关系.

表 1.1 销售量调查表

月份 m	1	2	3	4	5	6
销售量 q (件)	100	105	110	115	111	120

这个表格反映了销售量 q 与月份 m 之间的依从关系.根据这个表格,当 m 取

定 1~6 月份的整数中的一值时, q 都有惟一确定的值与之对应, 例如当 $m=4$ 时, 从表中可以找到对应值 $q=115$ (件).

在上述例子中, 抽去所考虑量的具体意义, 我们看到它们都表达了两个变量间的对应关系: 当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时, 另一个变量就有惟一确定的一个值与之对应. 我们称此对应关系为一个函数.

定义 1 设 D 是一个非空实数集, 如果存在一个对应规则 f , 使得对集合 D 中的每一元素 x , 按此规则 f , 有 Y 内惟一确定的一个数值 y 与之对应, 则称此对应规则 f 为集合 D 上的函数(function), 记为

$$f: D \rightarrow Y: x \mapsto y \text{ 或 } y = f(x), x \in D$$

称集合 D 为函数 f 的定义域(domain), 记作 $D(f)$ 或 D_f .

对 $x \in D$, 函数 f 在 x 处的数值(称为函数值)是 y , 记为 $f(x)$, 即 $y = f(x)$; 有时我们也称这个 y 是 x 的像, 称 x 是 y 的一个原像. D 中所有元素的函数值构成的集合称为函数 f 的值域(range), 记为 $R(f)$ 或 R_f , 即

$$R(f) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

表示函数 f 的定义域 $D(f)$ 中的任意元素的符号 x 称为函数 f 的自变量, 而表示函数 f 的值域 $R(f)$ 中的任意元素的符号 y 称为函数 f 的因变量.

注意: (1) 对于一个函数 f 而言, 只要对应关系 f 和自变量的取值范围(即定义域 $D(f)$) 确定了, 则函数也就确定了, 而与自变量和因变量用什么字母表示无关. 例如, 函数 $y = f(x)$, $x \in D$ 和 $s = f(t)$, $t \in D$ 就表示同一函数, 这是因为它们的对应法则是同一 f 且定义域 D 也相同;

(2) 为了方便, 以后我们将函数的记号 $f: D \rightarrow Y: x \mapsto y$ 或 $y = f(x)$, $x \in D$ 简单地记为 $y = f(x)$ 或 $f(x)$, 例如函数 $y = \sin x$, 函数 $\ln x$ 等等, 但要请读者注意的是, 这仅仅是一种省略而已.

习惯上用字母 F, f, g, φ 等来表示函数的对应关系, 而用字母 x, y, z, s, t 等表示自变量和因变量. 形象地说, 函数 $y = f(x)$ 好像是一部机器, 如果将定义域 $D(f)$ 中的任意元素 x 看作是原材料的话, 将 x 输入机器, 则通过机器 f 的处理加工就得到产品 $y = f(x)$ 输出(见图 1.1).

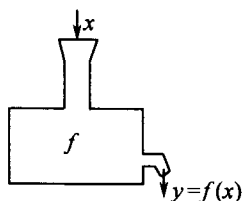


图 1.1 函数示意图

例 3 若用等式定义函数 $f(x) = x^2$, 则函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 是全体实数集 $\mathbf{R}$, 因为任意实数都有平方数与之对应.

例 4 若用等式 $f(x) = \sqrt{x}$ 来定义函数 $f(x)$, 则 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 是全体非负实数构成的非负实数集 $\mathbf{R}^* = \{x \mid x \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$.

在例 1 和例 2 中, 函数的定义域是相当明确给出

的,而在例3和例4中,函数是由一个数学公式表示,没有明确地给出定义域,那么,就按惯例,把使得函数表达式有意义的全体实数构成的集合作为函数的定义域,此时称它为函数的自然定义域.

例5 求函数

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+\ln x}$$

的自然定义域.

解 负数的平方根在实数范围内是没有意义的,而分式的分母为零又会使得分式没有意义,对数的真数应大于零,所以函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 是满足不等式组

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1+\ln x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

的所有实数 x 构成的集合,分别解上述不等式组中的每一个不等式并求它们的交集得

$$D(f) = \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right]$$

例6 设 n 边形的内角和为 F_n ,则由几何知识知道: $F_n = (n-2) \times 180^\circ$.我们可以说 F_n 是边数 n 的函数,函数的自变量是正整数 n ,由实际的几何意义知,该函数定义域应为 $\{n | n \geq 3, n \in \mathbf{N}\}$,其中 $\mathbf{N}$ 为正整数集.

2. 函数的图形及分类

研究函数,常常借助于它的几何直观——函数的图形.

定义2 设 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数,则称集合

$$G(f) = \{(x, y) | y = f(x), x \in D\} \quad (1.1)$$

为函数 $f(x)$ 的图形(graph)

函数的图形 $G(f)$ 作为一个桥梁建立了分析对象与几何对象之间的密切联系,从而使我们利用分析工具研究几何图形的性质;反过来,也可以利用几何性质研究分析性质.下面我们利用函数图形 $G(f)$ 的不同性态来对函数进行分类

1) 按有界性分类

定义3 设 $f(x)$ 是定义在集合 D 上的函数,若存在正数 M ,使对任意 $x \in D$ 都满足

$$|f(x)| \leq M \quad (1.2)$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界, 或称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数(bounded function), 每一个具有上述性质的正数 M 都是函数 $f(x)$ 的界.

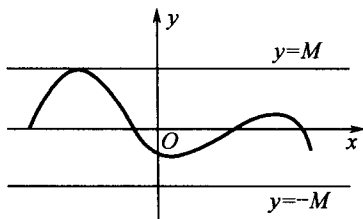


图 1.2 有界函数的图形

若具有上述性质的正数 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界, 或称函数 $f(x)$ 是 D 上的无界函数, 换言之, 对任意给定的正数 M , 不管它多么大, 总有某个 $x \in D$, 使不等式 $|f(x)| > M$ 成立, 则函数 $f(x)$ 在 D 上无界.

今后, 我们称一个函数为有界函数, 一般是指在其自然定义域上有界的函数, 有界函数的图形介于两条平行直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 之间(见图 1.2). 因此, 按有界性来分类, 函数可分为有界函数和无界函数.

2) 按单调性分类

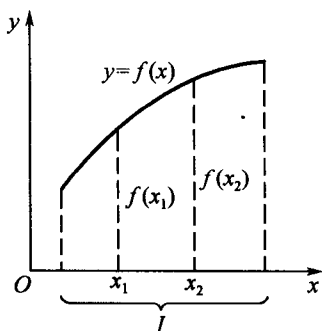
定义 4 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若对任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (或 } f(x_1) > f(x_2) \text{)} \quad (1.3)$$

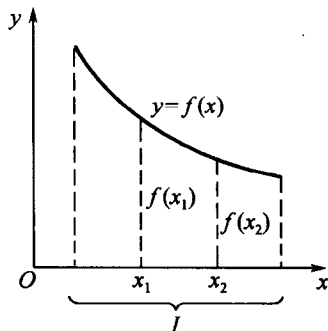
则称 $f(x)$ 是区间 I 上的单调增加函数(或单调减少函数).

单调增加或单调减少的函数统称为单调函数(monotone function).

单调增加函数的图形是向右方上升的曲线, 单调减少函数的图形是向右方下降的曲线(见图 1.3).



(a) 单调增加函数



(b) 单调减少函数

图 1.3 单调函数的图形