

高等学校适用教材

# 线性代数

杨纶标 编著

 机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



高等学校适用教材

# 线性代数

杨纶标 编著



机械工业出版社

本书包括行列式、矩阵、线性方程组、 $n$  维向量与向量空间、特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等 7 章内容。书后附有补充题、习题答案与解答提示。

本书层次清楚，内容深入浅出、简明扼要，可作为普通高等教育工科院校教材，也可作为工程技术人员自学用书。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数/杨纶标编著. —北京: 机械工业出版社, 2003.2

高等学校适用教材

ISBN 7-111-11604-6

I. 线... II. 杨... III. 线性代数—高等学校—教材  
IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 005229 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 王霄飞 郑丹 版式设计: 冉晓华 责任校对: 李秋荣

封面设计: 饶薇 责任印制: 路琳

北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·6 印张·232 千字

0 001—4 000 册

定价: 16.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

本社购书热线电话 (010) 68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

# 前 言

本书是在华南理工大学(全校各专业)使用多年的《线性代数》教材的基础上,结合作者长期从事线性代数教学与研究的经验,并吸取国内外优秀教材的思想和方法反复修改而成的.由于经多年使用和修改,本书已成为一本适合工科各专业要求的较成熟的教材.

本书得到国家工科数学教学基地建设项目及我校教务处的资助.

本书具有以下主要特点:

1. 本书具有与同类教材不同的新系统<sup>[1]</sup>、新思想和新方法,主要特点是贯穿用“矩阵的秩”讨论问题的思想方法,并且把向量的线性表示与非齐次方程组、向量的线性相关性与齐次方程组紧密结合,因而极容易得到有关向量的一系列结论.由于采用“矩阵的秩”来研究问题,使许多推导证明得以简化<sup>[2][3]</sup>.

2. 关于行列式.本书采用递归定义,这比用逆序数法定义简单,可省一些学时.不过这样定义的行列式展开定理的证明很麻烦,这里重新给出证明,比原来的证明简单一些.

3. 关于习题.选取时注意了工科学生的特点,在难度和分量方面均比较适中,并有习题答案或解答提示,书后还附有补充题,供学生复习提高用.

本书是工科本科(含管理工程和经济类)学生的教材,前6章的内容(除打\*号外)为线性代数的基本要求,适合32学时学生的教学.讲完全书内容约需48学时.

本书在编写和使用过程中,得到我校教务处和数学系领导的积极支持,使用本书的广大教师提出了许多宝贵意见.本书的编写参考了许多《线性代数》教材,尤其是杨茂信、陈璞华、庾镜波和谢乐军等编的《线性代数》,得到不少启发和帮助.机械工业出版社对本书的出版给予了大力支持,在此一并表示衷心的感谢.

尽管本书经过多次使用和修改,但由于作者水平所限,不妥之处在所难免,恳请广大读者批评指正.

编 者

2003年1月

# 目 录

前言

<b>第 1 章 行列式</b> .....	1
1.1 二、三阶行列式 .....	1
1.2 $n$ 阶行列式 .....	4
1.3 $n$ 阶行列式的性质 .....	10
1.4 拉普拉斯 (Laplace) 定理 .....	18
习题 1 .....	20
<b>第 2 章 矩阵</b> .....	23
2.1 矩阵的概念 .....	23
2.2 矩阵的运算 .....	25
2.3 逆矩阵 .....	34
2.4 矩阵的秩与初等变换 .....	38
2.5 分块矩阵 .....	45
习题 2 .....	50
<b>第 3 章 线性方程组</b> .....	54
3.1 方程组的初等变换 .....	54
3.2 线性方程组的解法 .....	56
3.3 线性方程组解的讨论 .....	58
习题 3 .....	62
<b>第 4 章 <math>n</math> 维向量与向量空间</b> .....	65
4.1 $n$ 维向量及其线性运算 .....	65
4.2 线性表示与线性组合 .....	67
4.3 线性相关与线性无关 .....	70
4.4 最大无关组与等价向量组 .....	75
4.5 线性方程组解的结构 .....	80
4.6 向量空间 .....	89
习题 4 .....	101
<b>第 5 章 特征值与特征向量</b> .....	105
5.1 矩阵的特征值与特征向量 .....	105
5.2 相似矩阵与矩阵对角化条件 .....	108

5.3 实对称矩阵的对角化 .....	115
习题 5 .....	119
<b>第 6 章 二次型</b> .....	<b>121</b>
6.1 二次型及其矩阵表示 .....	121
6.2 用正交变换化二次型为标准形 .....	123
6.3 用配方法化二次型为标准形 .....	126
6.4 正定二次型 .....	128
习题 6 .....	131
<b>第 7 章 线性空间与线性变换</b> .....	<b>132</b>
7.1 线性空间的概念 .....	132
7.2 线性空间的基、维数与向量的坐标 .....	135
7.3 线性变换 .....	142
7.4 线性变换的矩阵 .....	145
习题 7 .....	152
<b>附录</b> .....	<b>155</b>
附录 A 行列式的引理 1 的证明 .....	155
附录 B 习题答案或解题提示 .....	156
附录 C 补充题及其答案或解题提示 .....	170
<b>参考文献</b> .....	<b>186</b>

# 第 1 章 行 列 式

在线性代数中，行列式是不可缺少的工具，它在后面各章，如矩阵、方程组、向量的线性相关性、特征值及二次型中均有重要的应用。为此，先介绍行列式。

## 1.1 二、三阶行列式

用消元法不难求得含有两个未知数的一次方程组（称为二元线性方程组）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

的解为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} \quad (1.2)$$

这个解由方程的系数和常数项表示。对于任意一个二元线性方程组，只要  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ ，便可由式 (1.2) 求得它的解。为了便于记忆，引入行列式的概念。

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

称记号  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  为二阶行列式。它的横排为行，竖排为列，其中  $a_{11}$ ， $a_{12}$ ， $a_{21}$ ， $a_{22}$  称作元素，每个元素第一下标表示行数，第二下标表示列数。

二阶行列式的代数和，符合如下的对角线规则：实线连接的两个元素的乘积，减去虚线连接的两个元素的乘积，等于二阶行列式的值，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

这种方法叫做按对角线展开。

**例 1.1** 设  $D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ . 问 (1)  $\lambda$  为何值时,  $D=0$ ? (2)  $\lambda$  为何值时,  $D \neq 0$ ?

**解** 
$$D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda$$

如果  $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ , 则  $\lambda = 0$  或  $\lambda = 3$ .

所以(1) 当  $\lambda = 0$  或  $\lambda = 3$  时,  $D = 0$ .

(2) 当  $\lambda \neq 0$  且  $\lambda \neq 3$  时,  $D \neq 0$ .

将行列式用于方程组 (1.1), 则称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为方程组的系数行列式. 若其值  $D \neq 0$  时, 则方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

其中,  $D_1$  为  $D$  的第 1 列换为常数项后的行列式, 而  $D_2$  为  $D$  的第 2 列换为常数项后的行列式.  $x_1$  和  $x_2$  的分母都是系数行列式.

**例 1.2** 用行列式解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

**解** 由系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13 (\neq 0)$$

知方程组有解. 又因

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

所以得到方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{13}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{13}$$

类似地, 研究三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.3)$$

的解.

可引入三阶行列式的定义, 称



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为三阶行列式，它表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

这个和式共有 6 项，其中有 3 项前面带正号，另 3 项带负号，每一项都是 3 个元素的乘积，这 3 个元素取自不同行不同列。

三阶行列式也有对角线展开规则（见图 1.1）：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

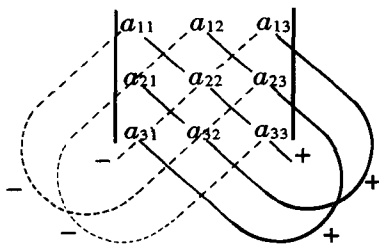


图 1.1

$$a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

这个和式中，实线连接的 3 个元素的乘积取正号，虚线连接的 3 个元素的乘积取负号。

例如，用行列式定义计算

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 5 + 3 \times 3 \times 4 - 2 \times 2 \times 4 - 2 \times 3 \times 1 - 3 \times 1 \times 5$$

$$= 2 + 20 + 36 - 16 - 6 - 15 = 21$$

类似于二元线性方程组，用消元法解三元线性方程组 (1.3) 得到的解，当系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，也可以用行列式表示，且有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中， $D_j$  为  $D$  的第  $j$  列换为常数项后的行列式， $j=1, 2, 3$ 。

例 1.3 解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

解 先计算系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3) + (-12) + 0 - 2 - 0 - (-9) = -8$$

由  $D \neq 0$  知方程组有惟一解. 再计算  $D_1, D_2, D_3$ , 用对角线展开规则, 得

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

得方程组的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -1, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 2$$

请注意, 行列式按对角线展开法, 只适用于二、三阶行列式. 有关更高阶行列式的计算问题, 将在 1.2 节讨论.

## 1.2 $n$ 阶行列式

设有  $n^2$  个数  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 将其排列如下:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称  $D$  为  $n$  阶行列式或记为  $D_n$ , 它表示一个数.  $a_{ij}$  叫做行列式的元素, 其中第一个下标  $i$  表示第  $i$  行, 第二个下标  $j$  表示第  $j$  列, 即  $a_{ij}$  表示第  $i$  行第  $j$  列上的元素.  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  称为主对角线上的元素.

行列式是一个算式, 下面研究它的一般算法, 为此先给出余子式和代数余子式的概念.

在  $n$  阶行列式中, 划去  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行和第  $j$  列, 余下的元素按照原来的顺序, 排成一个  $n-1$  阶行列式, 称为  $a_{ij}$  的余子式, 记为  $M_{ij}$ . 而

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称为  $a_{ij}$  的代数余子式.

例如, 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$a_{23}$ 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

#### 例 1.4 求行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

的代数余子式  $A_{13}$  和  $A_{23}$ .

解 按代数余子式的规定

$$\begin{aligned} A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\ &= + (18 + 20 - 2 - 1 + 48 - 15) = 68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\ &= - (36 + 0 - 10 - 2 - 0 - 75) = 51 \end{aligned}$$

不难发现, 代数余子式只与  $a_{ij}$  的位置有关, 而与  $a_{ij}$  的大小无关.

下面用递归的方法来定义  $n$  阶行列式的值, 即用已经定义好的  $n-1$  阶行列式来定义  $n$  阶行列式.

定义 1  $n$  阶行列式  $D$ , 当  $n=1$  时, 规定  $D=a_{11}$ ; 当  $n \geq 2$  时, 规定

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \quad (1.4)$$

其中,  $A_{1j}$  是  $a_{1j}$  的代数余子式 ( $j=1, 2, \dots, n$ ). 式 (1.4) 称为行列式按第一行展开式.

显然, 定义 1 给出了一个计算  $n$  阶行列式的方法: 将  $n$  阶行列式化为  $n-1$  阶, 再化为  $n-2$  阶, ……最后求出行列式的值.

例如

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 = & a_{11} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
 = & a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
 = & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}
 \end{aligned}$$

此例表明, 用按第一行展开法与用按对角线展开法, 求二、三阶行列式的值, 结果一样.

### 例 1.5 用定义计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解 根据定义 1, 得

$$\begin{aligned}
 D &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\
 &= 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \\
 &\quad (-1) \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(-5) + 2(-23) - 3 = -59
 \end{aligned}$$

由定义 1 可以推得行列式的展开法则. 先介绍引理.

引理 1<sup>[4]</sup> 行列式第一行与第二行对调后, 其值只改变正负号.

证 (见附录 A)

引理 2 行列式的相邻两行对调, 其值只改变正负号.

证 (归纳法) 设  $n$  阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据引理 1, 行列式的第 1 行与第 2 行对调, 结论成立.

现假设第  $i-1$  行与第  $i$  行对调 ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 结论成立, 证明第  $i$  行与第  $i+1$  行对调时, 结论也成立.

将第  $i$  行与第  $i+1$  行对调, 所得的行列式记为  $\bar{D}$ , 将其按第 1 行展开, 得

$$\begin{aligned}
 \bar{D} &= a_{11}\bar{A}_{11} + a_{12}\bar{A}_{12} + \cdots + a_{1n}\bar{A}_{1n} \\
 &= a_{11}(-1)^{1+1}\bar{M}_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\bar{M}_{12} + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}\bar{M}_{1n} \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中,  $\bar{M}_{1j}$  是  $\bar{D}$  中元素  $a_{1j}$  的余子式, 它与  $D$  中  $a_{1j}$  的余子式  $M_{1j}$  经第  $i-1$  行与第  $i$  行对调所得的行列式相同, 由假设知

$$\bar{M}_{1j} = -M_{1j} \quad (2)$$

将式 (2) 代入式 (1), 得

$$\begin{aligned} \bar{D} &= a_{11} (-1)^{1+1} (-M_{11}) + a_{12} (-1)^{1+2} (-M_{12}) + \cdots \\ &\quad + a_{1n} (-1)^{1+n} (-M_{1n}) \\ &= -[a_{11} (-1)^{1+1} M_{11} + a_{12} (-1)^{1+2} M_{12} + \cdots + a_{1n} (-1)^{1+n} M_{1n}] \\ &= -D \end{aligned}$$

即第  $i$  行与第  $i+1$  行对调结论也成立, 故引理 2 成立.

根据引理可推得行列式的展开法则.

**定理 1<sup>[4]</sup>** 行列式的值等于任一行的各元素与其代数余子式的乘积之和, 即对  $i=1, 2, \dots, n$ , 均有

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (1.5)$$

称式 (1.5) 为行列式按第  $i$  行展开法则.

**证** 将第  $i$  行依次与上一行对调, 直至第 1 行, 即作  $i-1$  次相邻两行对调, 按引理 2, 行列式的符号改变了  $i-1$  次, 于是

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i-1} [a_{i1} (-1)^{1+1} M_{i1} + a_{i2} (-1)^{1+2} M_{i2} + \cdots + a_{in} (-1)^{1+n} M_{in}] \\ &= a_{i1} (-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2} (-1)^{i+2} M_{i2} + \cdots + a_{in} (-1)^{i+n} M_{in} \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \end{aligned}$$

由展开法则可知, 若元素为 0, 则这一项便不用计算. 所以, 计算行列式时, 应选 0 比较多的行列展开, 计算起来比较方便.

### 例 1.6 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

**解** 第二行 0 最多, 故按此行展开. 由展开法则, 有

$$\begin{aligned}
 D &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = a_{21}A_{21} + a_{24}A_{24} \\
 &= 3 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= -3 \left[ 2 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right] + \\
 &\quad 2 \left[ (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right] \\
 &= -3(-4+8) + 2(-2-8) = -32
 \end{aligned}$$

例 1.7 证明  $n$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

此式称为上三角形行列式 (当  $i > j$  时,  $a_{ij} = 0$ )

(用归纳法容易证明, 请读者证之.)

类似地有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

此式称为下三角形行列式 (当  $i < j$  时,  $a_{ij} = 0$ ).

特别地, 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n$$

(注: 未写出的元素均为 0.)

例 1.8 计算  $n$  阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

(注: 每一行均有  $a$ 、 $b$ , 其余元素为 0.)

解 按第一行展开, 得

$$D_n = a \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix} + b (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

这两个行列式, 第一个是下三角形行列式, 第二个是上三角形行列式, 故有

$$D_n = ab^{n-1} + (-1)^{n+1} ba^{n-1}$$

例 1.9 证明

$$D_n = \begin{vmatrix} & & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & \\ & & \ddots & & \\ & a_{n-1,2} & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

证  $n=2$  时, 等式显然成立. 假设  $n-1$  时等式成立, 现在证明对  $n$  阶行列式成立. 按第  $n$  行展开, 得

$$D_n = a_{n1} \cdot (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} & & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & \\ & & \ddots & & \\ & a_{n-1,2} & & & \end{vmatrix}$$

右端的行列式为  $n-1$  阶行列式, 按假设其值为

$$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2}$$

于是

$$\begin{aligned} D_n &= a_{n1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \cdot a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \end{aligned}$$

1.3  $n$  阶行列式的性质

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称  $D'$  为  $D$  的转置行列式.

转置是指行列互换, 即若把  $D'$  中的元素记为  $a'_{ij}$ , 则  $a'_{ij} = a_{ji}$ .

**性质 1** 行列式转置后, 它的值不变, 即  $D' = D$ .

**证** (归纳法) 当  $n=1$  时, 结论显然成立. 今假设对  $n-1$  阶行列式, 结论成立, 证明对  $n$  阶行列式也成立.

将  $D$  按第  $i$  行展开, 得

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (1.6)$$

而对  $D'$  则按第  $j$  行展开, 得

$$D' = \sum_{i=1}^n a'_{ji} A'_{ji} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A'_{ji} \quad (1.7)$$

其中,  $A'_{ji}$  是  $D'$  中第  $j$  行第  $i$  列的元素的代数余子式,  $M'_{ji}$  是相应的余子式, 而  $M'_{ji}$  是  $D$  中  $a_{ij}$  的余子式的转置行列式. 由归纳法假设, 知  $M'_{ji} = M_{ij}$ , 由于  $A'_{ji} = (-1)^{j+i} M'_{ji}$ ,  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , 因此

$$A'_{ji} = A_{ij}$$

将  $A'_{ji}$  代入式 (1.7), 得

$$D' = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (1.8)$$

对于式 (1.6), 当  $i=1, 2, \dots, n$  时, 相应有  $n$  个展式, 把它们加起来, 得

$$nD = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

类似地, 由式 (1.8), 得

$$nD' = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

由于上两式右边相等, 所以

$$nD' = nD$$



即

$$D' = D$$

性质 1 说明, 对行成立的性质, 对列一样成立, 反之亦然. 同理, 行列式按行展开定理, 改为按列展开, 定理一样成立. 即  $\forall i, j (1 \leq i, j \leq n)$

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \text{ (按行展开)} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \text{ (按列展开)} \end{aligned}$$

值得注意的是, 前面只证明了行列式相邻两行互换的情况, 对于任意两行互换, 结论一样成立.

**性质 2** 行列式任两行 (列) 互换, 其值只改变正负号:

**证** 根据 1.2 节引理 2, 知行列式相邻两行互换 (一次) 后, 行列式变号. 所以, 只要证明任意两行互换是经过相邻两行作了奇数次互换. 现考虑第  $i$  行与第  $j$  行 ( $i < j$ ) 互换. 将原第  $j$  行依次与上一行对调直到第  $i$  行上, 需作  $j-i$  次相邻两行对调, 而第  $i$  行调至第  $j$  行则需作  $j-i-1$  次相邻两行对调, 这样第  $i$  行与第  $j$  行对调共需作  $2(j-i)-1$  次 (即奇数次) 相邻两行互换. 若  $\bar{D}$  为行列式  $D$  的第  $i$  行与第  $j$  行调换后的行列式, 那么

$$\bar{D} = (-1)^{2(j-i)-1} D = -D$$

例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

**推论** 如果行列式有两行 (列) 对应元素相同, 则行列式的值等于零.

事实上, 将相同的两行对调, 由性质 2 知  $D = -D$ , 故  $D = 0$ .

**性质 3** 数  $k$  乘以行列式的某一行 (列) 等于数  $k$  乘以此行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**证** 按第  $i$  行展开, 得

$$\begin{aligned} \text{左边} &= ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in} \\ &= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\ &= \text{右边} \end{aligned}$$

**例 1.10** 证明  $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$