电动力学解题指导

郑春开　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

电动力学解题指导

郑 春 开 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

电动力学解题指导/郑春开编著.—北京:北京大学出版社,2004.12

ISBN 7-301-08104-9

Ⅰ.电… Ⅱ.郑… Ⅲ.电动力学-高等学校-解题 Ⅳ.O442-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 108385 号

书　　　名:电动力学解题指导
著作责任者:郑春开　编著
责 任 编 辑:瞿　定
标 准 书 号:ISBN 7-301-08104-9/O·0621
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者:北京高新特打字服务社　51736661
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
890 mm×1240 mm　A5　8.875 印张　250 千字
2004 年 12 月第 1 版　2004 年 12 月第 1 次印刷
印　　　数:0001—3000 册
定　　　价:15.00 元

前　言

本书是作者在 1964 年开始从事电动力学课程教学以来 30 多年积累的经验和资料的基础上，经整理、总结、编辑而成。这本《解题指导》是与虞福春、郑春开编著的《电动力学》(修订版)配套的，它可作为教学参考书使用。本书中提到的《电动力学》(或称原书)均指虞福春、郑春开编著的《电动力学》(修订版)。

电动力学是一门重要基础理论课，要深刻掌握其基本理论和处理问题的方法，习题训练是一个重要环节。为此，20 世纪 50～60 年代，还专门设立习题课对学生训练，收到良好的效果。但是，到 20 世纪 80～90 年代，由于专业范围不断拓宽，新课程相应增加，原有课程学时逐渐减少，设立习题课已不可能。特别是进入 21 世纪后，基础理论课的学时数再次压缩，习题作业的数量势必要相应减少，难度也要降低。因此，为弥补教学时数的不足，编写《解题指导》是十分必要的。它可以帮助学生正确理解基本理论，掌握解题的基本方法，提高分析问题和解决问题能力。

《解题指导》与我们的《电动力学》完全配套，各章的题目、顺序是一致的。每章分为：内容要点、例题分析和习题解答三个部分。内容要点是简要归纳原书中各章的理论、方法和主要公式，这是解题的依据和前提。例题分析是为习题解答作示范的。在原书中每章都举了一些典型例题，这些例题对于理解基本理论和掌握解题的基本方法是重要和有用的。现在《解题指导》中选择的例题是对原书例题的补充和深化。本书的习题解答是按照原书中每章所附的习题，取相同的编号逐一解答(或证明)；另外，还补充少量习题放在原书习题之后续编。为了查阅和使用方便，《电动力学》附录中常用的公式和定理，置于本书第 1 章之前的预备知识中，并将原书附录中的习题也在此进行了解答。

1995 年我的研究生吴志刚在担任电动力学辅导任务时，花费了

很多时间，以我长期积累的解题资料为基础，帮我整理了一份习题解答。这对本《解题指导》的出版有很大帮助，在此我对吴志刚的辛勤工作深表感谢。

由于《解题指导》是初次出版，考虑不周和错误之处在所难免，望广大教师和读者批评指正。

郑 春 开

2004 年 8 月于北京大学物理学院

内容简介

《电动力学解题指导》(简称《解题指导》)是一本与虞福春、郑春开编著的《电动力学》(修订版)相配套的教学参考书。《解题指导》按《电动力学》各章的顺序,对所列的全部习题进行了解答。为了使读者更好地理解电动力学的基本理论和掌握解题的基本方法,每章都含有内容要点、例题分析和习题解答三个部分。"内容要点"是把电动力学中理论、方法和主要公式加以归纳,这对解题、复习、考试都有帮助;在《解题指导》的"例题分析"中选择了一些例题进行分析求解,这是对原书中例题的补充和深化;"习题解答"是按照原书中每章所附的习题取相同的编号逐一解答或证明,有的习题解答还包含了几种不同的解法和讨论。另外又补充少量习题,放在原习题之后续编。

本书可作为理工科大学和高等师范院校各物理类专业、天文专业、无线电子技术专业及相关学科教学参考书,也可供报考研究生进行复习备考和教师教学参考。

目　　录

预备知识：矢量分析常用公式及有关定理

（原书附录）

一、∇算符运算的常用公式

ϕ,ψ 为标量场，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为矢量场. 根据算符 ∇ 的微分及矢量运算两重性,有如下关系式：

$$\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi,$$

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot\boldsymbol{A},$$

$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{A})=\nabla\phi\times\boldsymbol{A}+\phi\nabla\times\boldsymbol{A},$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}),$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B},$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\nabla\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\nabla\cdot\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B},$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A},$$

$$\nabla\times\nabla\phi=0,$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0.$$

令 $\boldsymbol{r}$ 是空间一点相对于坐标原点的矢径，$r=|\boldsymbol{r}|$，$\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{r}/r$ 为单位矢量,则

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{e}_r=\frac{2}{r},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{e}_r=0,$$

$$\nabla r=\boldsymbol{e}_r,\quad \nabla\frac{1}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

$$\nabla f(r)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r,$$

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}),$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_r=\frac{1}{r}[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_r)]=\frac{1}{r}\boldsymbol{a}_\perp\quad(\boldsymbol{a}\text{ 为常矢量}).$$

二、矢量积分定理

ϕ,ψ 和 $\boldsymbol{A}$ 是连续可微的，V 是三维体积，其体积元为 $\mathrm{d}V$，S 是 V 的闭合边界曲面，其面积元为 $\mathrm{d}S$，$\boldsymbol{n}$ 为 $\mathrm{d}S$ 的外法线方向单位矢量，则

$$\int_V \nabla\phi \mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{n}\phi \mathrm{d}S,$$

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}S \quad \text{（高斯定理）},$$

$$\int_V \nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}S,$$

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi)\mathrm{d}V = \int_S \phi\boldsymbol{n}\cdot\nabla\psi \mathrm{d}S \quad \text{（格林第一恒等式）},$$

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\mathrm{d}V = \int_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \quad \text{（格林定理）}.$$

在下列定理中，S 是开曲面，C 是 S 的周边，其线元为 $\mathrm{d}l$，S 的单位法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 是按右手法则由绕 C 的线积分的方向确定的，则

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \quad \text{（斯托克斯定理）},$$

$$\int_S \boldsymbol{n}\times\nabla\phi\mathrm{d}S = \oint_C \phi\mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

三、并矢运算公式

1. **定义** 若两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 并列，它们之间没有任何运算关系，则称并矢，用 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{AB}$ 表示.

2. **运算规则** 对于并矢 $\boldsymbol{AB}$，从左边进行矢量运算只作用于 $\boldsymbol{A}$，从右边进行矢量运算只作用于 $\boldsymbol{B}$. 如

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{AB} = A_y\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{A}B_x, \quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{j} = A_xB_y.$$

因此，并矢 $\boldsymbol{AB}$ 也可看成一个二阶张量，它有九个分量，按矩阵的方式排列为

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} A_xB_x & A_xB_y & A_xB_z \\ A_yB_x & A_yB_y & A_yB_z \\ A_zB_x & A_zB_y & A_zB_z \end{bmatrix}.$$

3. **单位并矢** $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk}$，它具有如下性质：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}\cdot\nabla=\nabla.$$

4. **运算公式及定理**

$$(\boldsymbol{AB})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}),$$

$$\boldsymbol{AB}:\boldsymbol{CD}=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}),$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B},$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{AB})=(\nabla\times\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\times\nabla)\boldsymbol{B},$$

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}V=\int_S\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}S,$$

$$\int_V\nabla\times\boldsymbol{T}\mathrm{d}V=\int_S\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T}\mathrm{d}S,$$

$$\int_V\nabla\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\int_S\boldsymbol{nA}\mathrm{d}S.$$

根据以上矢量运算定理，可以把高斯定理和斯托克斯定理的运算规则

$$\int_V\mathrm{d}V\,\nabla=\oint_S\mathrm{d}S\boldsymbol{n},$$

$$\int_S\mathrm{d}S\boldsymbol{n}\times\nabla=\oint_C\mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

推广到对标量、矢量和张量的各种运算.

四、正交曲线坐标系中的梯度、散度、旋度和拉普拉斯算符

1. 直角坐标系

$$\nabla\psi=\boldsymbol{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

2. **柱坐标系**

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z,$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

3. **球坐标系**

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

注意，上式中 $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r$.

原附录习题解答

附.1　根据算符 $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$的定义，证明

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0,$$

式中 φ 和 $\boldsymbol{A}$ 为 x, y, z 的连续可微函数.

证

$$\nabla\times\nabla\varphi=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)\boldsymbol{k}=0.$$

这是因为 φ 是连续可微函数，二阶偏微商与先后次序无关，如

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}.$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left[\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right.$$

$$\left.+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}\right)=0.$$

附. 2 根据算符 ∇ 具有微分、矢量运算的两重性及这两种运算规则，证明附录 A 中的以下各式：

$\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi,$

$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot\boldsymbol{A},$

$\nabla\times(\phi\boldsymbol{A})=\nabla\phi\times\boldsymbol{A}+\phi\nabla\times\boldsymbol{A},$

$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$
$\quad+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}),$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B},$

$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\nabla\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\nabla\cdot\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B},$

$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A},$

作为例子证明如下公式

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

$$+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}).$$

证 由微分运算规则

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\nabla_A(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})+\nabla_B(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}),\qquad ①$$

①式中∇_A表示只对$\boldsymbol{A}$微分作用，∇_B只对$\boldsymbol{B}$微分作用. 做了这样规定之后，∇_A和∇_B完全可以当成一个"矢量".

由矢量运算公式$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，则

$$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\nabla_B\times\boldsymbol{B})=\nabla_B(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\nabla_B),\qquad ②$$

②式右方第2项可改写为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\nabla_B)=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla_B)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B},\qquad ③$$

③式中第一等号符合标量积的交换律. 第二等号符合∇_B仅对$\boldsymbol{B}$求微分规定，因而∇算符下角标B可去掉. 由②③式有

$$\nabla_B(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B},\qquad ④$$

同理
$$\nabla_A(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}.\qquad ⑤$$

④⑤代入①，则命题得证.

其他各式证明可用同样的方法进行.

附. 3 设$u=u(x,y,z)$，且u是x,y,z的连续可微函数，证明：

$$\nabla f(u)=\nabla u\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u},\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{A}(u)=\nabla u\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}(u)=\nabla u\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}.$$

证
$$\begin{aligned}\nabla f(u)&=\frac{\partial f(u)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f(u)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f(u)}{\partial z}\boldsymbol{k}\\&=\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\\&=\nabla u\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}.\end{aligned}$$

类似地可以证明其余各式.

附. 4 证明附录A中的如下各式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{e}_r=2/r,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{e}_r=0,$$

$$\nabla r = \boldsymbol{e}_r, \qquad \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

$$\nabla f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r,$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}),$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_r = \frac{1}{r}[\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_r)] = \frac{\boldsymbol{a}_\perp}{r} \quad (\boldsymbol{a}\text{ 为常矢量}).$$

证 (1) 证 $\nabla\cdot\boldsymbol{e}_r = 2/r$.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_r = \nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial x}{\partial x} - x\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{1}{r^2}\left(r - x\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(r - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{1}{r^2}\left(r - \frac{x^2}{r}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\left(r - \frac{y^2}{r}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\left(r - \frac{z^2}{r}\right),$$

所以

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_r = \frac{1}{r^2}\left(r - \frac{x^2}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(r - \frac{y^2}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(r - \frac{z^2}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(3r - \frac{x^2+y^2+z^2}{r}\right) = \frac{2}{r}.$$

(2) 证 $\nabla\times\boldsymbol{r} = 0$.

$$\nabla\times\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0.$$

(3) 证 $\nabla r = \boldsymbol{e}_r$.

$$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k} = \frac{2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{e}_r.$$

或用 ∇ 的球坐标表示式证明：

$$\nabla r = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r}(r) = \boldsymbol{e}_r.$$

(4) 证 $\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$.

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\nabla r = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

(5) 证 $\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$.

当 $r\neq 0$ 时，

$$\nabla^2\frac{1}{r} = \nabla\cdot\nabla\frac{1}{r} = -\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\left[\frac{1}{r^3}\nabla\cdot\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\cdot\nabla\frac{1}{r^3}\right]$$

$$= -\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\boldsymbol{r}\cdot\nabla r\right] = -\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_r\right] = 0.$$

或用球坐标系中 ∇^2 的公式计算：

当 $r\neq 0$ 时，

$$\nabla^2\frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(r\cdot\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(1) = 0,$$

则

$$\int_V \nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}V = 0,\quad V \text{不包含 } r = 0 \text{ 点}.$$

当 $r=0$ 时，$\frac{1}{r}$ 为奇异点，$\nabla^2\frac{1}{r}$ 的体积分为不定式，应采用极限方法计算.设积分区域 V 包含 $r=0$ 点，有

$$\int \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = \lim_{a\to 0}\int \nabla^2\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)\mathrm{d}V.$$

因为

$$\nabla^2\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\right) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\right) = -\frac{3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}},$$

则

$$\int \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = \lim_{a\to 0}\left[-3a^2\int\mathrm{d}\Omega\int_0^\infty \frac{r^2\mathrm{d}r}{(r^2+a^2)^{5/2}}\right]$$

$$= -12\pi\int_0^\infty \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{5/2}} = -4\pi.$$

于是

$$\int_V \nabla^2 \frac{1}{r}\mathrm{d}V = \begin{cases} -4\pi, & V\text{ 包含 } r=0\text{ 点}, \\ 0, & V\text{ 不包含 } r=0\text{ 点}. \end{cases}$$

根据 $\delta(r)$ 函数定义，则

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}).$$

必须指出，在计算包含 $r=0$ 点积分时，如果应用高斯定理，则

$$\begin{aligned}\int \nabla^2 \frac{1}{r}\mathrm{d}V &= \int \nabla\cdot\nabla\frac{1}{r}\mathrm{d}V = \oiint \boldsymbol{n}\cdot\nabla\frac{1}{r}\mathrm{d}S \\ &= -\oiint \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S = -\oiint \mathrm{d}\Omega = -4\pi,\end{aligned}$$

这样计算是有问题的．因为 $r=0$ 时，$\frac{1}{r}$是奇异点，不满足高斯定理条件，所以严格地说，应采用极限的方法．

(6) 证 $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_r=\frac{1}{r}[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_r)]=\boldsymbol{a}_\perp/r$ ($\boldsymbol{a}$ 为常矢量)．

应用公式

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = &(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\ &+ \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}),\end{aligned}$$

取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{B}$，并注意 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量，则由上式得

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_r) = (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_r + (\boldsymbol{e}_r\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{e}_r) + \boldsymbol{e}_r\times(\nabla\times\boldsymbol{a}).$$

因为

$$(\boldsymbol{e}_r\cdot\nabla)\boldsymbol{a} = 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{a} = 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{e}_r = 0,$$

所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_r &= \nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_r) = \nabla\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\right) \\ &= \frac{1}{r}\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\frac{1}{r^2}\nabla r.\end{aligned}$$

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}, \quad \nabla r = \boldsymbol{e}_r,$$

则

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{a}}{r} - \frac{1}{r^2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_r = \frac{1}{r}[\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r].$$

附．5 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{k}$ 均为常矢量，$\boldsymbol{r}$ 为矢径，求：