高等数学

（下册）

刘修生 夏恩德 主编

华中科技大学出版社

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

E-mail: hustpp@wuhan.cngb.com

高 等 数 学

（下册）

主　编　刘修生　夏恩德
副主编　朱　章　何艳平　秦熙明

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/刘修生　夏恩德　主编
武汉:华中科技大学出版社,2002年1月
ISBN 7-5609-2614-2

Ⅰ.高…
Ⅱ.①刘…　②夏…　③朱…　④何…　⑤秦…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.O13

高等数学(下册)　　刘修生　夏恩德　主编

责任编辑:曾　光　周正国　　封面设计:刘　卉
责任校对:张兴田　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　　排:华中科技大学出版社照排室
印　　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　印张:9.125　字数:210 000
版次:2002年1月第1版　印次:2003年9月第3次印刷　定价:12.00元
ISBN 7-5609-2614-2/O·244

内容简介

本书内容包括常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分及其应用、重积分与曲线积分、级数、数学建模等。各节后有习题，各章后有复习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨，说理浅显，叙述详细，例题丰富，便于教，利于学。

本书适合作高职、高专院校及相当层次的其他院校的教材，也可供广大自修者自学使用。

前　言

本书是根据“高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求”以及为适应高等工程专科学校培养高等技术应用型人才的需要编写的．在编写过程中，我们力求贯彻以应用为目的，以必需、够用为度，兼顾适度发展和少而精的基本原则，结合多年来积累的工程专科高等数学教学改革的经验和体会，在以下几个方面作出了努力．

1．在课程结构上，我们将高等数学课程分为两介平台：基础数学、选学数学．基础数学的内容是最基本的，主要目的是提高学生的学习兴趣及让学生尽快适应大学的学习方法，加强学生的数学基本功训练；选学数学由各工科专业按各自需求和发展需要进行选学．书中带“*”的为选学数学部分．

2．在教学内容上，我们削弱了那些过分形式化和严格化的内容，如极限论中的 ε-N 与 ε-δ 语言；删去了那些过分繁琐、过分强调技巧性的内容，如求极限、求不定积分等复杂的计算技巧，注意了推证思路的阐述，并尽量设法结合几何意义进行直观解释．

3．引入计算机软件，增加了数学演示与实验、数学建模的内容，体现了数学改革的方向．

本书分上、下两册．上册包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等，共 5 章．参考教学时数为 72 学时．下册包括常微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、数学建模初步等，共 6 章．参考教学时数为 68 学时．

本书由刘修生、夏恩德任主编．朱章、何艳平、秦熙明任副主编．参加本书上、下册编写的还有：（以姓氏笔画为序）方小平、陈金和、李健、张晓燕、饶林森、程铭东。梅云广同志也参加了本书编写

的多项实际工作.

本书在编写过程中,得到黄石高等专科学校教务处、教学委员会和公共课部的大力支持和关心,在此一并致谢.

由于编者的水平有限,书中存在一些缺点和错误在所难免,恳请读者批评指正.

编者

2001年9月

目　录

第六章　常微分方程

寻求变量之间的函数关系是实际应用中的常见课题，然而，在一些实例中往往不能直接找到这种关系，却比较容易列出含有未知函数及未知函数的导数(或微分)的关系式，这种关系式被称为微分方程. 本章将讨论几种较简单的微分方程，并初步介绍它们在实际问题中的应用.

6.1　微分方程的基本概念

我们先来考察两个具体例子.

例 1　一曲线过点(1,1)，曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率等于 $3x^2$，求此曲线的方程.

解　根据导数的几何意义，所求曲线 $y=f(x)$ 应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2. \tag{6-1}$$

将上式两端对 x 积分，得

$$y=\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+C. \tag{6-2}$$

由于所求曲线过点(1,1)，故(6-2)式应满足下列条件：

$$x=1\text{ 时}, y=1.$$

或写成

$$y|_{x=1}=1. \tag{6-3}$$

把条件(6-3)代入(6-2)式，得 $C=0$. 把 C 的值代入(6-2)式，得所求曲线方程为

$$y=x^3. \tag{6-4}$$

从几何意义看，$y=x^3+C$ 表示一族立方抛物线(图 6-1)，$y=x^3$ 是这族曲线中通过点(1,1)的那一条.

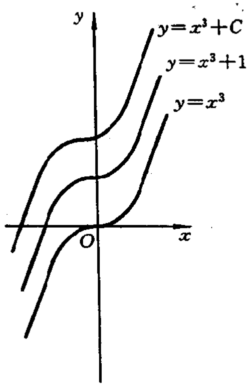

图 6-1

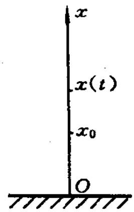

图 6-2

例 2 质点以初速度 v_0 竖直上抛，不计阻力，求质点的运动方程.

解 如图 6-2 建立坐标系，设质点抛出时($t=0$)的坐标为 x_0，t 时刻的坐标为 x. 变量 x 与 t 的函数关系 $x=x(t)$，即为质点的运动方程. 由题意及二阶导数的物理意义，有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-g. \tag{6-5}$$

此外，$x(t)$ 还应满足

$$t=0\text{ 时，}\quad x=x_0,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0.$$

或写成

$$x|_{t=0}=x_0,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v_0. \tag{6-6}$$

把(6-5)式两边对 x 积分一次，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1. \tag{6-7}$$

再积分一次，得

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2. \tag{6-8}$$

将条件(6-6)代入(6-7)和(6-8)式，求得 $C_1=v_0$，$C_2=x_0$，于是有

$$x=x_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2. \tag{6-9}$$

在这两个例子中，关系式(6-1)和(6-5)都含有未知函数的导数，我们称它们为微分方程.一般地，凡表示未知函数、未知函数的导数(或微分)及自变量之间关系的方程，都称为**微分方程**.在微分方程中，自变量及未知函数可以不出现，但未知函数的导数(或微分)必须出现.未知函数是一元函数的微分方程称作**常微分方程**，未知函数是多元函数的微分方程称作**偏微分方程**.本章只讨论常微分方程，并将其简称为微分方程.

下列方程都是微分方程(其中 x、i_L、C 均为未知函数).

(1) $\cos x\sin t\mathrm{d}x+\sin x\cos t\mathrm{d}t=0$;

(2) $L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_LR=0$;

(3) $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+kx=0$;

(4) $\frac{Q}{A}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}=E_x\frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}x^2}+\sum_{p=1}^{N}S_p$.

微分方程可描述许多现象.例如方程(3)描述了简谐振动，方程(4)则是一种河流的水质模型.

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶.例如，(2)式是一阶微分方程，(4)式是二阶微分方程.n 阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,$$

其中 x 是自变量，y 是未知函数；式子 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ 中 $y^{(n)}$ 必须出现.

在一些问题的研究中，首先要建立微分方程；然后求出这样的函数，把它及它的导数代入微分方程时，能使方程成为恒等式，这样的函数称为微分方程的**解**.求微分方程的解的过程，叫做**解微分方程**.

在例 1 中，函数 $y=x^3+C$ 和 $y=x^3$ 都是微分方程 $y'=3x^2$ 的解，而 $y=x^3$ 则是微分方程 $y'=3x^2$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解.在例 2 中，(6-8)式和(6-9)式所表示的函数，是微分方程(6-5)的解.

如果微分方程的解中含有任意常数，任意常数的个数与微分方程的阶数相同，且任意常数之间不能合并，则称此解为微分方程的**通解**(**或一般解**). $y=x^3+C$ 和 $x=-\dfrac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 分别为一阶微分方程 $y'=3x^2$ 和二阶微分方程 $y''=-g$ 的通解.当通解中的各个任意常数都取特定值时，所得到的解称为微分方程的**特解**.例如，$y=x^3$ 和 $x=x_0+v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$ 分别为上述两个微分方程的特解.

用来确定通解中任意常数的条件，称为**定解条件**.当自变量取某个值时，给出未知函数及未知函数的导数的相应值的条件，称为**初始条件**.例 1 和例 2 给出的初始条件分别为：$y|_{x=1}=1$ 和 $x|_{t=0}=x_0$、$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}|_{t=0}=v_0$. n 阶微分方程

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n-1)})$$

的通解中含有 n 个任意常数，需要 n 个定解条件. n 阶微分方程的初始条件为

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1},$$

其中 $y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_{n-1}$ 为 n 个给定常数.

一个微分方程与其初始条件构成的问题，称为**初值问题**.求解初值问题，就是求微分方程满足初始条件的特解.

微分方程通解的图形是平面上的一族曲线，这族曲线称为**积分曲线族**.特解的图形是积分曲线族中的一条确定的积分曲线.