

云南师范大学成人高等教育公共选修课系列教材

数学思想方法简介

杨文泽
编著



云南大学出版社

数学思想方法简介

杨文泽 编著

云南大学出版社

责任编辑：冯 峨

封面设计：刘 雨

责任校对：朱光辉

数学思想方法简介

杨文泽 编著

*

云南大学出版社出版发行

昆明新星印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：7.125 字数：179（千）

2002年5月第1版 2002年5月第1次印刷

印数 0001—3000

*

ISBN 7-81068-447-7/O·43

定价：14.50 元

云南师范大学成人高等教育
系列教材编审委员会

主任委员：杨文泽

副主任委员：李 辉 史嘉平

委 员：（按姓氏笔划排名）

李景舒 朱桂昌 刘有德 刘 张

陈星奎 果 红 曾 煜 廖贵仁

总 序

云南师范大学副校长 杨文泽

世纪之交，一场深刻的教育教学改革在我国高校广泛展开。改革的中心是培养什么样的人才以及如何培养这样的人才。面对新的时代，社会呼唤宽口径、厚基础、高素质、强能力的具有创新精神和实践能力的新型人才。然而，在长期计划经济体制下产生的教育体系，已经不能担此重任。勇于“吃螃蟹”者开始了新的人才培养模式的探求。

长期从事基础教育师资培养、培训工作的云南师范大学，充分认识到中小学教师 in 实施素质教育中的关键作用。提高进行素质教育者自身的素质，是师资培养、培训工作的核心。云南师范大学成人教育学院早在 20 世纪 90 年代中期就在脱产进修的在职教师中开始了改革试验，在调查研究的基础上，根据新时代对教师提出的要求，推行了新的教学计划。其中一项改革就是开设跨系、跨专业的公共选修课，给学生一点学习的自主权，让他们在规定的范围内选择自己愿意学习的课程。目的在于改善学生的认知结构，拓宽知识视野，全面提高素质。这点小小的改革措施得到学生的欢迎，他们的学习热情立刻高涨起来，对他们喜爱的课程，竟出现了争相报名、抢占座位的局面。公共选修课也给热爱教育教学的老师提供了施展才华的讲台，他们把自己多年的教学经验和最新的科研成果浓缩、提炼成课程，精心编写了讲义。首次开课，就有三十多门登台亮相，至今，已经开设了教育、人

文、科技、艺体四大类共百余门课程。公共选修课的成功开设，为教学改革提供了经验，丰富了教学资源库，为全面推行学分制打下了良好的基础。

经过几年的实践，一批公共选修课程已经基本成熟，具备了出版教材的条件。成教院筹集资金，决定按计划资助出版系列教材。这是教学建设的大事，它将进一步推动教学改革的深入发展，也将为培养高素质的师资作出新的贡献。编写公共选修课教材是一件新事物，可能出版的教材也还有不完善之处，但教师们探索新事物的精神是值得肯定的。相信在热心于此的同事们的关心支持下，这件事情会越做越好。

借第一批教材即将出版之际，我谨向积极投身于公共选修课建设的老师们表示感谢。

2001年7月10日

前 言

数学是一门古老的学科，人类文明的长河将她哺育成一株参天大树。数学又是一门生机勃勃的学科，计算机技术给她插上了腾飞的翅膀。如今，数学发展出众多的分支，应用到一切领域。数学学习，不仅成为进行科学研究、技术生产、经营决策、组织管理的基础，而且成为现代人日常生活所必须。

然而，数学教育的状况并不理想。在多数人的心中数学只是一堆公式和符号，晦涩艰深、枯燥难学，因而对其采取敬而远之的态度。即使是数学专业的学生，对数学的精神也未必能深刻了解。他们除了会解答书本上的题目以外，很少想到把数学应用到实际生活中去。这种状况，国际上普遍如此。在中国由于“应试教育”的影响，更为严重。

数学在现实生活中应用的日益深入和数学教育质量的低下，形成强烈的反差。因此，从20世纪60年代以来，世界上进行数学教育改革的探讨和实践一直没有中断过。80年代，国际数学界提出了“大众数学”的口号。它的思想是“人人都必须学习数学，人人学习有用的数学，人人都能学好数学”。也就是数学要为大众所掌握，成为大众手中有力的武器。这一思想已经为中国的数学教育界所接受，并且成为数学教育改革的指导思想。

本书的编写就是对“大众数学”的尝试。1996年，云南师范大学开始开设跨院系的公共选修课程，并且要求文科的学生要选修一定数量的理科课。本书作者开出了《数学思想方法简介》，目的是增强对数学的了解，引发对数学的兴趣，树立用数学的意

识，作为一门只有 36 学时、面对不同专业学生开设课程，它不打算拘泥于数学的一个分支，也不愿意沿用纯数学的叙述格局，而是尽可能地采用“问题情境—建立模型—解释和应用”的模式，选择贴近生活、容易引起兴趣的材料，用比较通俗的方式来呈现。在数学上不求十分严谨和系统，但求其科学和正确。课程名称冠以“简介”二字，即是选择简单的、可接受的材料，作简要的、浅显的介绍的意思。用一个比喻来说，本课程就是带领大家到“数学王国”去作一次旅游。在一些著名的“景点”，“导游”将向大家介绍其精彩部分，以便对“景点”有一个粗略的了解。但在每个“景点”面前，都不可能作长时间停留，只是希望“游客”一旦对某处发生了兴趣，将来再作旧地重游。作者曾担心，按这个思路来编写教材，搞出来的东西充其量是个“花边数学”，难登大雅之堂。不过本课程开出后得到学生的欢迎和同事们的鼓励，于是有了一点信心。受成人教育学院之托，决定把讲义充实修改，出版付印。权当引玉之砖，希望能对数学教育改革有点用处。

本书共分 10 章，其实是 10 个独立的讲座。可以单独开设，也可以顺序讲授。每章后面留有一定数量的练习题，虽然书后附了解答，但希望同学们尽量争取独立完成，而把解答仅仅作为参考。

昆明高等师范专科学校的张一民副教授认真地审阅了全书，并提出了十分有益的建议。在此，谨向他表示衷心的感谢。

作 者

2002, 1

目 录

第一章 数的进位制	(1)
1.1 数的表示法	(1)
1.1.1 从汽车牌号说起	(1)
1.1.2 数的进位制	(2)
1.2 二进制数	(3)
1.2.1 二进制数	(3)
1.2.2 巧猜年龄的游戏	(5)
1.2.3 火柴游戏中制胜的秘密	(6)
1.2.4 二进制数在计算机中的运用	(8)
1.3 p 进制数	(9)
第二章 不定方程	(12)
2.1 不定方程	(12)
2.1.1 牛吃草问题	(12)
2.1.2 韩信点兵	(13)
2.1.3 勾股数	(15)
2.2 两个名题	(19)
2.2.1 一只只会下金蛋的母鸡	(19)
2.2.2 数学皇冠上的明珠	(23)
第三章 递推和优选	(29)
3.1 利 率	(29)

3.1.1	国库券交易	(29)
3.1.2	复利问题	(30)
3.1.3	人口增长	(31)
3.2	递 推	(32)
3.2.1	浑身长刺的怪物	(32)
3.2.2	“世界末日”	(33)
3.2.3	按揭买房	(35)
3.3	菲波那契数列、黄金分割和优选法	(36)
3.3.1	兔子的繁殖	(36)
3.3.2	黄金分割	(39)
3.3.3	优选法	(41)
第四章	尺规作图与非欧几何	(47)
4.1	尺规作图的含义	(47)
4.2	三大难题	(48)
4.2.1	三等分任意角	(48)
4.2.2	化圆为方	(51)
4.2.3	立方倍积	(52)
4.3	作正多边形	(53)
4.4	尺规作图问题的代数解决	(55)
4.4.1	数学原理	(55)
4.4.2	揭开谜底	(57)
4.5	非欧几何的诞生	(59)
4.5.1	对第 5 公设的置疑	(59)
4.5.2	新几何的诞生	(62)

第五章 方程的根式解与置换群	(66)
5.1 根式解的含义	(66)
5.2 一元三次、四次方程的根式解	(67)
5.2.1 30:0 的较量	(67)
5.2.2 卡丹公式	(68)
5.2.3 费拉里的方法	(70)
5.3 高于四次的代数方程没有根式解	(71)
5.4 置换群	(73)
5.5 方程的近似解	(78)
5.5.1 来回调试法	(78)
5.5.2 迭代法	(79)
第六章 矩阵与线性规划	(82)
6.1 矩 阵	(82)
6.1.1 矩阵的加法	(82)
6.1.2 数与矩阵相乘	(83)
6.1.3 矩阵的乘法	(84)
6.1.4 方 阵	(85)
6.2 河图、洛书与魔方	(87)
6.2.1 魔 方	(87)
6.2.2 构造魔方的方法	(88)
6.3 线性方程组	(93)
6.4 线性规划	(97)
6.4.1 线性规划问题	(97)
6.4.2 用图解法解二元线性规划问题	(98)
6.4.3 解线性规划问题的一般方法	(99)

第七章 集合与逻辑	(106)
7.1 计 数	(106)
7.1.1 集合的分类	(106)
7.1.2 集合的覆盖	(107)
7.1.3 容斥原理	(107)
7.1.4 一批锁具的数量	(109)
7.2 集合的比较	(111)
7.2.1 1-1 对应	(111)
7.2.2 有限集与无限集的区别	(112)
7.3 两种无穷大	(114)
7.3.1 可数集的基数	(114)
7.3.2 有理数集可数	(115)
7.3.3 连续统的基数	(116)
7.4 数学的危机	(117)
7.4.1 逻辑与悖论	(117)
7.4.2 罗素悖论	(118)
7.4.3 修补裂缝的工作	(119)
第八章 概率与统计	(122)
8.1 彩票之谜	(122)
8.2 随机事件的概率	(123)
8.2.1 随机事件	(123)
8.2.1 随机事件的概率	(124)
8.2.3 古典概型	(124)
8.3 祝你好运	(125)
8.3.1 “30:7”彩票揭密	(125)
8.3.2 “6+1”彩票分析	(126)

8.4 条件概率	(130)
8.5 万无一失的办法	(132)
8.6 似是而非的答案	(134)
8.6.1 猫先生的理论	(134)
8.6.2 分取赌金的风波	(135)
8.6.3 门后的车	(136)
8.7 统计与预测	(137)
 第九章 图 论	(143)
9.1 哥尼斯堡的七座桥	(143)
9.2 图的简单概念	(145)
9.2.1 图的顶点与边	(145)
9.2.2 图的矩阵表示	(146)
9.2.3 图的同构	(146)
9.2.4 顶点的度数	(147)
9.2.5 连通图、树	(148)
9.2.6 一笔画问题的解答	(150)
9.3 哈密尔顿周游世界	(151)
9.4 过 河	(153)
9.5 正多面体	(155)
9.5.1 欧拉公式	(155)
9.5.2 正多面体的数目	(155)
9.6 四色定理	(158)
9.6.1 问题的提出	(158)
9.6.2 五色定理	(158)
9.6.3 四色定理的最终证明	(163)

第十章 模糊数学	(165)
10.1 模糊数学不模糊	(165)
10.1.1 模糊现象	(165)
10.1.2 用数学方法研究模糊现象	(166)
10.2 模糊子集与隶属函数	(167)
10.2.1 模糊子集	(167)
10.2.2 隶属函数	(168)
10.2.3 模糊子集的运算	(171)
10.3 模糊关系	(174)
10.4 模糊逻辑	(175)
10.5 模糊概率	(177)
10.6 模式识别	(179)
10.6.1 两条原则	(179)
10.6.2 手写汉字辨认	(180)
10.6.3 癌细胞识别	(181)
习题解答	(186)
参考书目	(211)

第一章 数的进位制

1.1 数的表示法

1.1.1 从汽车号牌说起

每辆汽车都有一个号牌，它们是汽车的“身份证”，给每一辆汽车挂上号牌，这是国际通行的规则，但汽车号牌编号的方式各不相同。我国的汽车号牌有统一的格式，例如

云A 16888

是云南省昆明市的一个汽车号牌，其中起头的“云”字表示省份（云南省），后面的“A”字表示所在的地区（昆明市），后面的五位数是该车的顺序号。从号牌“云 A00000”到“云 A99999”，一共可以为 10 万辆汽车发放号牌。可是，随着汽车数量的不断增长，10 万辆的容量是远远不够的，于是出现了以大写拉丁字母开头的顺序号，如“云 A A7217”，“云 A H6628”等。这样，从“云 A A0000”到“云 A Z9999”又可以增加 26 万辆，使总容量达到 36 万辆。即便如此，牌号仍然不够，不久的将来，大街上也许会出现顺序号以两个拉丁字母起头的汽车号牌，如“云 A BK198”。这样，又可以为许多汽车编上牌号。问题是，这样编号容量有多大？够用了吗？需不需要使用三个字母起头的顺序号呢？这个问题一下子不好回答，我们需要有一点数的进位制的知

识就行了。

1. 1. 2 数的进位制

我们通常采用的数是十进制，使用 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 十个数码，再根据数位，就可以表示出所有的数来。例如，261 表示 2 个百，6 个十，1 个 1；30.5 表示 3 个十，5 个十分之一等等。

采用十进位制是人类文明的一大进步，有了它，表示数和进行数的运算都很方便。

有这样一则笑话，表明了数的进位制的重要性。有一个孩子学写字，先生教他“一”是一横，“二”是两横，“三”是三横……孩子高兴地说“原来写字那么简单，我会了！”回到家父亲叫他写个请贴给万先生，孩子提笔就写。半天，父亲问写好没有，他说“别忙，还不到百呢！”

至今我们还可以在钟表上看到罗马数字 I，V，X…等。罗马数字不采用位置计数的办法，运算和计数都很不方便。如 57 要写成 LVII，而 329 要写成 CCCXXIX。

采用十进制不是惟一的计数方法，中国的老秤采用 16 进制，1 斤等于 16 两。欧洲的 1 打是 12 个，采用 12 进制。时间和角度都是 60 进制，1 小时（或度）等于 60 分，1 分等于 60 秒。

我们经常要把不同进制的数进行换算，例如 2 小时 37 分 18 秒化为秒是

$$2 \times 60^2 + 37 \times 60 + 18 = 9438 \text{ (秒)}.$$

而要问 4457 秒是几小时几分几秒时，就可以把以上的计算过程倒过来：

$$4457 \div 60 \text{ 得商数 } 74 \text{ 余 } 17, \text{ 即 } 4457 = 74 \times 60 + 17;$$

$$74 \div 60 \text{ 得商数 } 1 \text{ 余 } 14, \text{ 即 } 74 = 1 \times 60 + 14;$$

从而

$$\begin{aligned}4457 &= (1 \times 60 + 14) \times 60 + 17 \\ &= 1 \times 60^2 + 14 \times 60 + 17.\end{aligned}$$

于是, 4457 秒化为 1 小时 14 分 17 秒.

1.2 二进制数

1.2.1 二进制数

亚里士多德指出, 人们普遍采用十进制, 其起源是人们有十个手指头这样一个解剖学事实. 人的双手很自然地是人们的计算器, 原始人就已经会使用它了. 久而久之, 世界上几乎所有的文明都不约而同地采用了十进制. 当然也有一些特别的情形: 有人对数百个印第安部落进行调查, 发现他们中有三分之一的部落采用十进制, 另有三分之一采用五进制或五—十进制; 还有百分之十的部落采用二十进制, 想来他们在计算大于 10 的数字时把脚趾也用上了! 也许将来我们会发现, 宇宙中某个星球上的人类使用 8 进制, 因为他们的每只手有 4 个手指头呢.

今天, 在电子技术中二进制数起关键的作用. 我们常常听到的“数字通讯”, “数字光盘”等等, 其中的“数字”都是二进制数. 因为在电路中, 利用通电和断电 (或高电平和低电平) 两种状态分别代表 1 和 0 就可以记数.

中国古代哲学认为“阴”和“阳”是主宰万物的主要矛盾, 其象征性的图案“八卦”中的八个方位分别由八个“三线图”表示 (图 1-1).

如果把八卦图中的实线“——”译为“1”, 而把缺线“- -”译为“0”, 则这八组三线图就和八个二进制数对应: 111