刘坤林 总策划

水木艾迪 组 编

考研数学应试导引与进阶

概率与数理统计

◆清华大学考研辅导班指定教材◆

2005

全国硕士研究生入学统一考试

应试导引与进阶丛书（2005版）

葛余博 主编

清华大学出版社

全国硕士研究生入学统一考试应试导引与进阶丛书(2005 版)

考研数学应试导引与进阶
——概率与数理统计

葛余博　主编

清华大学出版社

北　京

内容简介

本书是作者根据2005年最新考试大纲，结合多年的数学教学经验和考研辅导经验精心编写而成.主要内容包括事件概率、条件概率、随机变量及其分布、重要分布律、随机向量、极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验等.每部分内容均按照“知识综述与导引”、“问题集粹”、“自测与模拟题”进行编排.

本书主要针对参加全国硕士研究生入学统一考试的理工类与经济类考生，同时可作为大学本科和专科学生的教学辅导用书.

图书在版编目(CIP)数据

考研数学应试导引与进阶——概率与数理统计/葛余博主编．—北京：清华大学出版社，2004．8
(全国硕士研究生入学统一考试应试导引与进阶丛书：2005版)
ISBN 7-302-09090-4

Ⅰ.考…　Ⅱ.葛…　Ⅲ.①概率－研究生－入学考试－自学参考资料 ②数理统计－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第072236号

出 版 者：清华大学出版社　　地　　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
组稿编辑：杜春杰
文稿编辑：杨红林
封面设计：秦　铭
版式设计：郑轶文
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×260　印张：17.5　字数：384千字
版　　次：2004年8月第1版　2004年8月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-302-09090-4/O・381
印　　数：1～5000
定　　价：24.00元

丛书编委会

总策划 刘坤林

编 委 谭泽光 俞正光 刘坤林 葛余博 张慎德

胡天赐 舒 文 孔祥云 许建平

编委会成员简介

刘坤林

清华大学数学科学系教授,清华大学考研辅导班领军人物,全国考研数学辅导资深专家.清华大学考研辅导班主讲,清华大学 MPA 辅导班主讲.先后七次获国家及省市部级科学技术进步奖.把握教学方向非常准确,教学用题代表性极强,屡屡命中考研真题.主编《大学数学——概念、方法与技巧》、《高等数学典型题题典——考研数学应试能力进阶》等教材.讲课特点:富有启发性,对概念的阐述生动形象,精辟准确,得到同学们的高度评价.

谭泽光

清华大学数学科学系教授,多次获国家及省市级科技进步奖.专注考研数学辅导 10 多年,考研数学辅导资深专家,多次任北京地区考研数学阅卷质量检查专家组组长.任《高校应用数学学报》编委,1997 年开始担任国家工科基础课基地负责人.全国高校一类课程负责人,讲课风格热情幽默,重点突出,技巧性强,生动精辟.主编《微积分》(清华大学 21 世纪换代公共基础平台课教材),并著有《大学数学——概念、方法与技巧》.学员评价听谭老师的课"是一种享受,收获很大."

俞正光

清华大学数学科学系教授,北京市一类课程负责人,长期担任清华大学考研辅导班线性代数主讲.对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学要求有专门的深入研究,考研数学辅导资深专家,主编《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》、《全国工程硕士研究生入学考试大纲及考前辅导教材》等各类考研数学辅导教材.讲课风格深入浅出,条理规范,重点突出准确.

葛余博

清华大学数学科学系教授.在随机过程及其应用方面的科研工作多次获奖,长期担任概率与数理统计、随机过程等课程的主讲教学工作,在教学研究和实践中积累了大量可贵经验.清华大学考研辅导班概率统计主讲,对全国硕士研究生入学考试大纲与教学要求有专门的深入研究,讲课风格:擅长抓住概念实质、融会贯通,启发式教学,利于熟练掌握并灵活运用知识,条理规范,重点突出准确,多次命中考研真题,受到同学一致欢迎.

张慎德

清华大学人文学院教授，长期从事马克思主义哲学的教学与研究，多次参加研究生入学政治考试的命题和阅卷工作．对全国硕士研究生入学考试大纲与考查要求有专门的深入研究．授课思路清晰、概念明确、条理性强，善于启发和指导学员结合各种类型问题理解基本原理，提高分析和解决实际问题的能力，受到学员一致好评．

舒　文

清华大学人文学院副教授，硕士生导师．异军突起的考研辅导专家，长期从事毛泽东思想教学与研究，脱俗于乏味政治教学的典范，多次参加政治课辅导教材的编写．辅导中贯彻少而精的原则，针对大纲的要求，着重培养考生应用基本原理分析解决问题的能力．讲课幽默风趣，深入浅出，概念准确，重点突出，对考点把握率高，深受同学们的欢迎．

胡天赐

清华大学人文学院教授，长期从事政治经济学的教学与研究，北京地区考研政治阅卷组成员．多次参加政治课辅导教材的编写，连续主讲研究生入学政治课考试中的政治经济学辅导．授课深入浅出，条理清晰，概念准确，重点突出，深受同学欢迎．

孔祥云

清华大学人文学院教授，长期从事政治经济学和邓小平理论的教学与研究，多次参加政治课辅导教材的编写，长期进行各类研究生入学政治课考试中的邓小平理论辅导，北京地区考研政治阅卷组成员．讲课热情投入，富有感召性，重点突出，针对性强，条理清晰，深受同学欢迎．

许建平

清华大学外语系教授，硕士生导师，英语考试命题、阅卷专家，长期从事研究生英语教学，对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学要求有专门的深入研究，北京地区考研阅卷组质量检查专家组成员．长期担任清华大学考研辅导班主讲，主编有《清华考研英语应试教程》等教材．讲课特点：条理清楚，信息量大而准确，重点突出，阐述清晰，普遍受到同学欢迎．

编者的话

全国硕士研究生入学统一考试是一种选拔考试，不同于等级考试（如英语四、六级考试）．命题工作人员的任务是结合基本知识点的理解与不同知识点的交叉运用能力，在试题中设置不同深度的陷阱，以求把庞大的考试队伍从能力水平上区分出档次，进而实现国家选拔人才的目的．作为一名考生的任务则是：在全面准确理解知识系统的前提下，努力掌握识破命题陷阱的能力，力争在考场上以居高临下的知识洞察力与良好的应试状态，一举成功．

学习数学需要培养悟性，应试考研数学，需要一定的数学知识洞察力，就像一个练习气功的学员，需要一个师父带你进入套路．所谓悟性或洞察力，是指对数学基本概念的深入理解与准确把握，而这种理解与把握，首先要求对基本概念与基本知识点的理解要做到准确性与完整性，进一步才是掌握知识的系统性、交叉性与灵活性．没有对基本概念与基本知识点理解的准确性与完整性，就谈不上掌握知识的系统性与交叉灵活运用的能力，当然更谈不上解题的思路与技巧．

本套《全国硕士研究生入学统一考试应试导引与进阶丛书》（以下简称《导引与进阶丛书》）的宗旨是：“为考生面对考试造就一种居高临下的知识洞察力和感觉良好的临场状态．”这也是清华大学考研辅导班一直遵循的教学宗旨．

我们一贯强调，首先注重知识的基础性、系统性与完整性．在考试中，完全基础性题目一般占 60 分以上（满分 150 分），并且，基本知识点在综合题目中也占有重要的份量，基础性知识点的失误往往导致对一个综合题目的切入点错误，最后造成的是全局性错误．以一种加权的估计来分析，基本知识点在全部试卷中所占的比重可高达 120 分．以数学为例，微积分中的所谓基本知识点，包括初等函数的基本性质，极限存在的命题形式及命题属性（充分的？必要的？还是充要的?），极限的保序性及运算法则，函数在一点连续的定义，闭区间上连续函数的性质，构造导数定义的标准极限模式及其变形，一阶线性微分方程解的公式，常系数线性微分方程解的结构，多元函数的极限、连续与可微性的定义及其相互关系，各类积分的背景与性质等．线性代数中的基本知识点包括行列式、逆矩阵与伴随矩阵的计算及其相互关系，齐次与非齐次线性微分方程解的结构，矩阵的初等变换与秩的概念，向量组的线性相关与无关，向量组的秩与线性方程组解结构之间的关系，特征值与特征向量的概念，线性变换、正交变换及二次型的标准化等．概率统计中的基本知识点包括：随机事件的运算，几个古典概率的基本公式，独立性的概念，分布律，分布密度与分布函数的性质及其相互之间关系，一个或多个随机变量的函数的分布，数字特征的定义、背景与基本运算公式，简单随机样本及其数字特征等．

在考试中，考生出现的大量错误是由于对基本概念与知识点理解的不准确或不完整，甚至是对基本知识点理解的扭曲所造成的．

例如，许多考生都会背出一个结论：一个函数的导数大于零时，该函数单调增加，而函数的导数小于零时，该函数单调减少．但他们却忘记或忽略了这一结论描述的是一个函数的

全局性质，即该结论的前提是在一个区间上考虑问题．事实上只由一点处的导数正负号，不能决定函数的增减性．由函数在一点的导数值正负号只能决定函数的局部性质：函数在该点的值与该点两侧近旁某邻域内的函数值有大小的比较关系结论，即下述性质（可用导数定义与极限的保序性进行证明）：

“设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0) > (0)$，则存在 $\delta > 0$，使得对任意的 $x \in (0,\delta)$ 有 $f(x) > f(0)$，对任意的 $x \in (-\delta,0)$ 有 $f(x) < f(0)$．”

再比如，极限运算法则是所有学过微积分的人所熟悉的内容．考虑命题：

“若在某一趋向下，两个函数都有极限，则这两个函数的和与差都有极限”．

这一命题的属性是：前者是后者的充分条件，当前者不成立时，后者结论不一定没有．在考试中，大量考生在极限运算法则这个频繁考点上犯错误．原因就是他们对这类基本概念与基础知识点的理解不准确或不完整，甚至是对基本知识点的理解有所扭曲．

《导引与进阶丛书》以最简洁的篇幅梳理数学三个学科中的若干基本知识点，以及不同知识点之间的内在联系，配合适量典型的基本题型与知识交叉运用题型，引导读者与考生高效率做到对基本概念与基础知识点理解的准确性与完整性，并逐渐过度到掌握知识的系统性与交叉运用能力的训练．对基本题目涉及的方法与技巧多做总结与分析，对综合题目中知识点交叉的模式要有具体的了解与熟悉，直到具有敏感性。这样的训练会使你遇到个别难题时容易找到切入点与思路．

全套教材每个章节具有统一编排格式：

[知识综述与导引]　依据国家考研大纲中要求的重点，对知识模块给予简短综述，突出重点，详解难点，指出读者与考生容易忽略的薄弱环节与存在的弱点，必要时给出识破命题陷阱的重要提示．

[问题集粹]　以学生提问的方式，由编者设计覆盖基本知识点与概念交叉运用能力的若干问题，配以解答与导引，同时针对此类问题，配合若干典型例题，力图使读者牢固掌握相应知识点与相关题型的处理能力．

[自测与模拟题]　每一章后，以典型练习题方式留给读者用以训练发挥的空间，强调教学双向互动过程．在书后给出答案与提示．希望读者作题时不要先看答案与提示．

书中所有例题与练习题，都是经过编者精心研究与讨论，进而设计与编排所成．这一工作是基于作者在清华大学与清华大学考研辅导班的多年教学经验积累，以及对国家考试要求与试题类型深入研究的结果，具有典型性与代表性．对于这些例题与练习题，读者可视自身情况选读或选做，但应注意两点：一是立足于独立思考与亲自动手练习，二是应将每一个题目作为一类问题，以达到触类旁通，以一当十，以不变应万变的目的．相信你自己会造就出属于你自己的居高临下的知识洞察力，在考场上去面对你并不陌生的试卷．

“天行健，君子以自强不息；地势坤，君子以厚德载物”（出自《易经》——中国十三经之一）．国学大师梁启超先生于 1925 年从中摘出“自强不息，厚德载物”八个字作为清华大学校训，一直延续至今．“自强不息”，无需再释．“厚德载物”乃以丰厚道德追求业务精益求精．多年来，清华大学的教师以此作为他（她）们的行为准则，对待工作，尤其是对待学生．

参与本书编写的老师，均为清华大学在职教师，他（她）们是一个教学与研究成绩卓著的教授群体，长期担任清华大学考研辅导班主讲，突出特点是具有双向了解：最了解国家考

试大纲与命题走向，最了解考生的状况与需求，有许多教材与专著出版，广大考生给了他（她）们很高的评价．同时，他（她）们也愿做广大考生和学生的良师益友．基于长期丰富的教学研究与授课经验积累，经过对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学进行长期专门的深入研究，编写老师们倾心编写出这套《导引与进阶丛书》教材，真诚希望这套教材有助于广大考生考试成功，为在读大学生的学习提供一份帮助．

《导引与进阶丛书》教材的读者范围包括：参加全国硕士研究生入学统一考试的考生，包括数学试卷一、二、三、四全体应试者，大学本科在读学生，也可作为成人自考学员的参考书．

应特别指出的是，不少人认为，经济类考生，只学过经济类高等数学就已足够．其实这是误导．试卷三、四的历年题目表明，除个别题目有一点经济术语之外，绝大部分题目的题型与难度都与试卷一、二相当，与试卷一、二共用部分题目，也是历年常有之事．那些少量含有经济术语的题目不会成为答卷障碍，少量涉及一些经济术语的题目，如最大利润、最小成本等，不过是一般理工科数学教学中的普通例题而已，一个考生，如果有较好的理工科数学基础，应答试卷三、四，将不会遇到任何困难．

北京水木艾迪教育研究发展有限公司与清华大学出版社的策划编辑为《导引与进阶丛书》的策划与出版做了大量有益的工作，清华大学出版社的责任编辑为此花费了大量辛勤劳动．清华大学数学科学系李海中教授、李津教授，以及许多老师对本教材的编写工作给予了真诚的鼓励与支持，编者在此向他们真诚致谢．

限于作者水平和时间仓促，对书内的疏漏与不当之处，敬请读者批评指正，以便重印和再版时予以改正．

编者

2004 年 4 月 22 日于清华大学

目　录

第1讲　事件概率和等可能概型

知识综述与导引

- 理解概率论的两个最基本概念:“事件”和“概率”.所谓事件,粗略地可视为随机试验的结果,事件间的关系和运算可借用集合的关系和运算.概率的定义和性质保证所定义的“概率”确实是“量度”事件发生可能性大小的数量指标.
- 介绍并比较两个常见的、有等可能性的简单概率模型(概型):古典概型和几何概型.前者是离散的,主要研究工具是排列和组合;后者是连续型的,主要工具是几何方法(求长度、面积和体积等),因而会用到微积分.要会判断和计算这两类概型,而要正确计算必须注重样本空间的选取.排列组合公式很多,本讲列出应该掌握的常用组合公式.
- 由古典概型的研究还引出二项分布和超几何分布,它们都是大纲明确要求掌握的.几何概型既是第4讲均匀分布的产生背景,也对求均匀分布随机变量包括随机向量的函数分布和矩,提供更加简洁和直观的方法,还可将二重积分计算化为一重定积分计算,从而降低难度,减少计算错误,参看第5讲例5.4.3和例5.4.5.
- 概率的公式中最为活跃的、常考的是概率的加法公式和逆事件公式.本讲列出加法公式常用形式;逆事件公式常使问题一下子变得很简单(参看例1.4.3、例1.5.2和例1.8.1).这两个公式,连同第2讲的条件概率及有关的乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式,以及独立性定义与性质的公式,都是考查的热点,必须在理解基础上熟练掌握.

1.1　事件与概率

1.1.1　事件的概念与性质

1.概率论研究的对象和任务

“天有不测风云,人有旦夕祸福”,精炼地概括了自然界和人类社会活动中广泛存在着随机现象.概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支,其基础是概率空间.概率空间由三部分组成:样本空间——考察的对象,事件体——所有随机现象中随机事件的全体,以及概率(测度)——事件发生的可能性的数量指标.

随机现象中事件发生的可能性大小是客观存在的,量度的数量指标就是概率.

2.事件的概念

“事件”和“概率”是概率论基础的两个最基本概念.

随机试验是指这样的一种试验:试验可以重复进行;每次试验的结果不止一个;每次试验前不能肯定会出现哪一个结果.随机试验里最基本的不能再分解的结果叫基本结果,也叫基本事件.由若干基本结果组成的,称之为复合事件.基本事件和复合事件,泛称事件.特别地,包含所有基本结果的,称之为必然事件,也称为样本空间,其反面也认为是一个事件,就是不可能事件.所有事件的全体称之为事件体.必然事件、不可能事件及事件体分别专记为 Ω、Φ 及 f.

从 1,2,3 三个数中随机取一个数,基本事件就是 $\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$,必然事件 $\Omega=\{1,2,3\}$,事件 $\{1\}$ 的逆事件为 $\{2,3\}$,而事件体为

$$f=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\Omega,\Phi\} \tag{1.1}$$

如果只是关心是否取出"3",则此时所有的事件便只有 4 个,$f=\{\{3\},\{1,2\},\Omega,\Phi\}$,这实际上变为伯努利试验(参看第 3 讲)的事件体.

上例中 Ω 是一个有限的点集,事件体可以全部列出来.而在考察电视机寿命时,Ω 就是一个实数区间.

3.事件的运算和性质

基于集合论建立了"事件"这一概念,自然可以借用集合间的关系和运算来刻画现实中事件间的关系和运算.A、B 集合求交的运算常略"$\cap$"不写,即 $AB=A\cap B$.在上面取数例中,如果事件"取出前两个数"记为 A,"取出不是 1"记为 B,那么一次试验中取出"1"时,那就可以说事件 A 出现了,当然也可以说事件 B 未出现,用集合论中的表示法分别记为 $1\in A$ 和 $1\notin B$,也记为 $\omega_1\in A$ 和 $\omega_1\notin B$.当然也有 $\omega_1\in A\bar{B}=A-B$.而如果取出"2",则 $\omega_2\in AB$,此时事件 A 和 B 同时发生了.这样可以在集合的关系和运算与事件的关系和运算之间建立对应,如表 1.1 所示.

表 1.1

集合的关系和运算	事件的关系和运算
$\omega\in A$	事件 A 发生
$A\subset B$	事件 A 发生则事件 B 必发生
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生
$\bigcup_i A_i$	事件 A_i 中至少有一个发生
$A\cap B$ 或 AB	事件 A 与事件 B 同时发生
$\bigcap_i A_i$	所有事件 A_i 都同时发生
$A\bar{B}$ 或 $A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生

因而事件间运算成立以下定律:

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(AB)C=A(BC)$

交换律:$(A\cup B)=B\cup A$,$(AB)=(BA)$

分配律:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$,$C(A\cup B)=(CA)\cup(CB)$

对偶原理:$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}$,$\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$

常称 $A\cup B$ 为 A 与 B 的和事件,而称 AB 为积事件.如果 $AB=\Phi$,则称事件 A 与 B 互斥,或不相容,有时也说不相交.如 $A_iA_j=\Phi$,$\forall\, i\neq j$,则诸事件 A_i 两两不交.

1.1.2　概率的概念与性质

1. 概率的概念

“概率”是概率论的又一最基本的概念. 事件的概率值可以看成以事件(用集合论的话说,是集合)为自变量的一个函数值,它们在[0,1]之中. 严格的定义如下:

定义 1.1　设 P 是定义在事件体 f 上的实值集函数,满足

(1)非负性:$P(A)\geqslant 0, \forall_A \in f$

(2)规范性:$P(\Omega)=1$

(3)可列可加性:设 $A_i\in f, i=1,2,\cdots$,且两两不交即 $A_iA_j=\Phi, i\neq j$. 则

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 P 为定义在事件体 f 上的**概率**,称 $P(A)$ 是**事件 A 的概率**.

Ω, f, P 合称概率空间. 这里 Ω 是所观测的对象全体,也称样本空间,f 是事件全体,而 P 为概率.

2. 概率的运算和性质

下面的概率的性质定理保证上述定义的“概率”确实能作为事件发生可能性大小的数量指标. 比如说,不可能事件的概率应该为 0,在定义中没有写明,但能得到证明;又比如说,事件 B 如果包容了事件 A,即事件 A 发生必然导致事件 B 发生,那么 $P(A)$ 应该不大于 $P(B)$ 等,也都能得到证明.

定理 1.1　(概率的性质) 设 P 是事件体 f 上的概率,则

(1)$P(\Phi)=0$

(2)有限可加性:设 $A_i\in f, i=1,2,\cdots,n$,且两两不交,则 $P\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$

(3)设 $A\in f$ 则 $P(\overline{A})=1-P(A)$

(4)单调性:如果 $A\subset B$ 则 $P(A)\leqslant P(B)$

(5)连续性:设 $A_i\in f$,且单调,即 $A_i\subset A_{i+1}$ 或 $A_i\supset A_{i+1}, i=1,2,\cdots$,此时分别定义 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,则

$$P(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

对 n 个不相交事件的和事件,其概率计算有一般加法公式.

定理 1.2　(加法公式) 设 $A_i\in f, i=1,2,\cdots,n$,则

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=s_1-s_2+s_3+\cdots+(-1)^{n+1}s_n \tag{1.2}$$

其中

$$s_1=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),\ s_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$

$$s_3=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k),\cdots,s_n=P(A_1A_2\cdots A_n)$$

可见 s_j 是这 n 个事件中每 j 个事件同时发生的概率的和.

特别,当这 n 个事件彼此不交时,(1.2)式就是有限可加性(定理 1.1 的(2)). 常用的加

法公式是 $n=2$ 和 $n=3$ 的情形.

$n=2$ 时(1.2)式变为

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1+A_2\overline{A}_1)=P(A_1)+P(A_2\overline{A}_1) \tag{1.3}$$

把 $P(A_2)=P(A_2A_1)+P(A_2\overline{A}_1)$ 代入(1.3)式,得

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2) \tag{1.4}$$

此即 $n=2$ 时的(1.2)式.

$n=3$ 时(1.2)式变为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3) \tag{1.5}$$

从图 1.1 可以直观地得到上式的证明. 事实上,如用 p_k 表示图 1.1 中对应的彼此不相交的第 k 个事件的概率,容易看到 $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=\sum\limits_{k=1}^{7}p_k$;而(1.5)式右方的计算列表如表 1.2 所示.

表中"+"表示加上在这一行上此列对应的概率值,而"-"表示减去这个概率值. 容易确认(1.5)式成立.

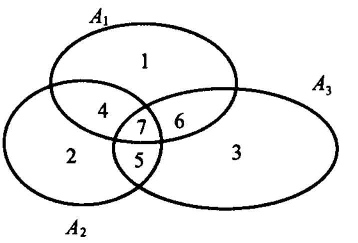

图 1.1 图解加法公式

表 1.2

		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
$+S_1$	$+P(A_1)=$	+			+		+	+
	$+P(A_2)=$		+		+	+		+
	$+P(A_3)=$			+		+	+	+
$-S_2$	$-P(A_1A_2)=$				−			−
	$-P(A_1A_3)=$						−	−
	$-P(A_2A_3)=$					−		−
$+S_3$	$+P(A_1A_2A_3)=$							+

3. 值得注意的几个问题

对于两个事件的和,常用处理方法有:

$$\begin{aligned} P(A_1\cup A_2)&=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2) && \text{(一般加法公式)}\\ &=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)=P(A_2)+P(A_1\overline{A}_2) && \text{(有限可加性)}\\ &=P(A_1\overline{A}_2)+P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2) && \text{(有限可加性)} \end{aligned} \tag{1.6}$$

注意集合的减法与数的减法的不同. 一般地,$P(A-B)\neq P(A)-P(B)$

实际上,概率的减法公式为

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$$

只有 $B\subset A$ 时,才有

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

1.2　有等可能性的两个概型

有等可能性的两个简单概率模型(概型)是:古典概型和几何概型.古典概型是离散的,主要研究工具是排列和组合;几何概型是连续型的,它是第 3 讲中的均匀分布的实际背景,其主要研究工具是几何方法,也会用到微积分.几何概型的研究对随机变量(包括随机向量)的函数分布和矩的计算很有帮助(参看第 5 讲例 5.4.3 和例 5.4.5).

1.2.1　古典概型与几何概型的定义

定义 1.2　基本事件个数有限且等可能的概率模型称为古典概型.

定义 1.3　设 Ω、A 为 R_n 中一个有 n 维体积的区域,用 $L(\Omega)$ 和 $L(A)$ 表示它们的 n 维体积,且 $0<L(\Omega)<\infty$.令

$$P(A)=L(A)/L(\Omega),\qquad \forall A\subset\Omega$$

则此种概型称为几何概型.

它们的共同点是等可能性,而不同之处在于:古典概型的样本空间是有限多个,而几何概型的样本空间却是无穷多个(且不是可列的).

例如在红色、黑色、白色三种小球数量相等的袋子中任取一球,取出的球的颜色构成三个等可能性的基本事件;闰年里一个人的生日有 366 个等可能性的基本事件(人为因素除外).这些概率模型,都是古典概型.什么是几何模型?举个例子:明天清早天上会向学校礼堂前的草地上掉一个馅饼,让你去接.你一定会找一个最大的饭盆去接.因为饭盆的面积大,准确地说是饭盆的面积与这块草地面积之比大,接到这个馅饼的概率也就大.至于在草地的什么地方去接,都没有关系,因为这饼掉向草地的任何一个"面积元"上,都是等可能的.这就是几何概型问题.

1.2.2　等可能概型的计算

古典概型中可记样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\}$,每一个 ω_i 为一个样本点或基本事件,基本事件的概率 $P(\omega_i):=P(\{\omega_i\})=1/N,i=1,2,\cdots,N$①

古典概型问题中事件 A 的概率

$$P(A)=n_A/n_\Omega \tag{1.7}$$

其中　n_Ω:基本事件的总个数,也即样本空间 Ω 的点数.

n_A:事件 A 中的基本事件个数,也即 A 的点数.

古典概型问题的主要计算工具是排列和组合.一般说组合概念考虑清楚了,排列也就容易得到.由此看来,更要注意组合方法和计算公式(参看问题 1.7).

几何概型问题中事件 A 的概率

① 本书":="表示定义关系.

$$P(A)=L(A)/L(\Omega),0<L(\Omega)<+\infty$$

其中 $L(\Omega)$:n 维空间Ω 的n 维体积,$L(A)$:n 维区域$A(\subset\Omega)$的n 维体积.

所谓 n 维体积,在 $n=1$ 时的 1 维体积为长度,2 维时为面积,3 维时则是通常说的体积等.

几何概型问题中的主要计算工具是用几何方法计算长度、面积等,也会用到微积分计算.

古典概型的难点在于正确建立样本空间(参看问题 1.3),而几何概型难在模型化:如何化为数学问题(参看例 1.8.1 和例 1.8.2).

1.2.3 等可能概型间的关系

几何概型与古典概型都有某种等可能性,或者说"均匀性".前述馅饼的几何概型例子中,如果你在那块草地实行"圈地运动",圈得草地的 1/16,那么你接到那只馅饼的可能性就是 1/16.这实际上已经变成古典概型问题了:每个 1/16 的草地都成为一个基本事件.两个概型的差别在于,几何概型的样本空间是无限(不可列)的而古典概型的样本空间是有限的.几何概型的更一般且准确的刻画,可参看第 4 讲中的均匀分布定义.

问题集粹

问题 1.1

事件间的关系和运算中应该注意些什么问题?

[解答与导引] 事件间的关系是用集合间的关系来定义的,事件间的运算是利用集合运算的关系来定义的,详细可见表 1.1.因此它具有集合运算的所有性质.

正因为如此,事件间的关系也常用集合间的关系来描述,例如说事件的不相容为事件不相交,说事件 A 的逆事件$\overline{A}$ 为事件A 的余事件,甚至也说成 A 的余等;而事件间的运算也常用集合间的运算来表示,例如求和、求交等.

虽然事件的求并、求交等也常说成求和、求积,并且求和用"+"表示,求交的运算符常略去不写,但是事件的运算与代数运算是不同的.

(1)一般地,$(A\cup B)-B\neq A$;

(2)当 $A\subset B$ 时,$A\cup B=B,AB=A,\overline{A}\supset\overline{B}$;

(3)对偶原理是事件(或集合)的特别性质;

(4)事件间关系和运算的正确判断直接影响概率计算的正确性,因此要重视.

例 1.1.1 设 A,B,C 为三事件,用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件.

(1)A 发生,B 与C 不发生　　(2)A 与B 都发生,而 C 不发生

(3)A,B,C 中至少有一个发生　　(4)A,B,C 都不发生

(5)A,B,C 中不多于一个发生　　(6)A,B,C 至少有两个发生

[解] (1)$A\overline{BC}$　　(2)$AB\overline{C}$　　(3)$A\cup B\cup C$

(4)$\overline{ABC}$　　(5)$\overline{AB}\cup\overline{AC}\cup\overline{BC}$　　(6)$AB\cup AC\cup BC$

例 1.1.2 指出下列命题中哪些成立,哪些不成立?

(1)$A\cup B=\overline{AB}\cup B$　　(2)$\overline{A}B=A\cup B$