刘法贵　著

一维可压流体动力学方程组整体经典解

黄河水利出版社

一维可压流体动力学方程组整体经典解

刘法贵 著

黄 河 水 利 出 版 社

内 容 提 要

本书主要研究一维非等熵流体动力学方程组整体经典解，并简要介绍了一阶拟线性双曲型方程组的基本概念和研究的基本方法。全书共分5章，内容包括：一阶拟线性双曲型方程组Cauchy问题一般理论；一维等熵流体动力学方程组Cauchy问题；一维非等熵流体动力学方程组整体经典解；一维非等熵流体动力学方程组的初边值问题；具内部耗散项一维非等熵流体动力学方程组Cauchy问题。

本书适合高等院校相关专业的高年级本科学生以及教师、科研人员和技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

一维可压流体动力学方程组整体经典解/刘法贵著.郑州：黄河水利出版社，2005.6

ISBN 7-80621-916-1

Ⅰ.一… Ⅱ.刘… Ⅲ.等熵流动-研究 Ⅳ.O351.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第044219号

策划组稿：王路平　电话：0371-66022212　手机：13623813888

出 版 社：黄河水利出版社

地址：河南省郑州市金水路11号　邮政编码：450003

发行单位：黄河水利出版社

发行部电话：0371-66026940　传真：0371-66022620

E-mail：yrcp@public.zz.ha.cn

承印单位：黄河水利委员会印刷厂

开本：787 mm×1 092 mm　1/16

印张：6.25

字数：143千字　印数：1—2 100

版次：2005年6月第1版　印次：2005年6月第1次印刷

书号：ISBN 7-80621-916-1/O·15　定价：15.00元

前　言

双曲型方程组反映了自然界中许多事物的波动现象，它的应用十分广泛，而且理论成果也非常丰富。概括地讲，线性方程组的理论已经有完整、系统的结果，而在非线性方程组中，发展最为成熟的理论是拟线性双曲型方程组定解问题局部经典解的存在性和解的正规性研究。20 世纪中期以后，非线性方程组的整体经典解、破裂现象以及奇性传播等理论引起了人们越来越大的兴趣。一维可压流体动力学方程组是一阶拟线性双曲型方程组的一个典型的代表。本书的重点是研究一维可压流体动力学方程组 Cauchy 问题的整体经典解。另外，本书还简要介绍了一阶拟线性双曲型方程组的一般理论等基础知识，若须详细了解此部分内容，读者可参阅其他相关文献。

全书共分 5 章，即一阶拟线性双曲型方程组 Cauchy 问题一般理论、一维等熵流体动力学方程组 Cauchy 问题、一维非等熵流体动力学方程组整体经典解、一维非等熵流体动力学方程组的初边值问题、具内部耗散项一维非等熵流体动力学方程组 Cauchy 问题。本书的主要结果是作者博士论文的部分内容，其他一些结果大都可以在相关的参考文献中找到，但作者对这些材料做了一些仔细的加工，并使其证明尽可能简捷。

一阶拟线性双曲型方程组的理论研究和应用研究结果十分丰富和复杂，本书的介绍仅限与内容有关的部分，并不是这些理论的全面阐述。本书也仅是作者对一维可压流体动力学方程组的一些粗浅的体会和认识。

本书的出版得到华北水利水电学院重点学科建设基金和河南省教育厅自然科学基金的资助。黄河水利出版社王路平同志为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此表示感谢。

欢迎广大读者不吝指正。

借此机会也感谢李大潜院士、李才中教授两位导师的精心指导。

作　者

2005 年 4 月

目　录

绪 论

在微积分理论产生不久,人们就开始研究偏微分方程(Partial Differential Equation),并利用偏微分方程解决力学、物理学等领域中出现的各种问题。从那时起,偏微分方程理论一直是数学家和物理学家所共同关注和研究的主要对象。人们一方面把力量集中在其他学科最感兴趣的那些偏微分方程问题上,另一方面也力求发展偏微分方程的一般理论。随着科学的发展,偏微分方程中令人感兴趣的问题越来越多,要解决的问题越来越难,解决的办法也越来越科学和先进。在企图建立一般性理论时,数学家发现偏微分方程是一门十分复杂的学科,即使是线性方程,也可以复杂到很难处理的程度。至于非线性偏微分方程,就更加困难,尤其是对于拟线性偏微分方程。

自然界中许多事物的运动规律通常以一阶拟线性双曲型方程组的形式表现出来,如:明渠不稳定流,聚变过程中的等离子体运动及非线性弹性力学、松散介质力学、空气动力学和爆炸力学中事物的运动规律等问题(见参考文献[2]、[5]、[60])。

一阶拟线性双曲型方程组的一般形式为

$$u_t + A(u)u_x = g(u) \tag{0-1}$$

其中,$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 是关于变量 t 和 x 的未知向量函数;$A(u)=(a_{ij}(u))$ 是关于变量 u 的具有适当光滑元的 n 阶矩阵;$g(u)=(g_1(u),g_2(u),\cdots,g_n(u))^{\mathrm{T}}$ 是关于变量 u 的 n 维列向量函数。

一阶拟线性双曲型方程组(0-1)不仅反映了自然界中许多事物的波动现象,而且其理论成果也十分丰富。概括地讲,一阶拟线性双曲型方程组(0-1)局部经典解的存在性与惟一性已有相当完善和成熟的研究结果(见参考文献[29])。然而,由于数学理论发展和实际问题的需要,人们更为关注拟线性双曲型方程组(0-1)整体经典解存在性和非存在性的研究。众所周知,对于具有适当光滑系数的线性双曲型方程组的 Cauchy 问题,只要初始资料适当光滑,则对任意的时间 t 总存在整体经典解。但对于一阶拟线性双曲型方程组(0-1),即使其初始资料非常光滑(甚至充分小),一般说来,其经典解要在有限时间内破裂而失去正规性(见参考文献[24])。

为说明这一点,下面给出两个例子。

【例 0.1】 考察下述非线性微分方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u^2 \\ t = 0: u = \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \end{cases}$$

易知,上述问题的解可以表示为 $u(t)=\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon t}$。因此,当 $t\to\varepsilon^{-1}-0$ 时,$u(t)\to\infty$。这表明解的生命跨度(解的最大存在高度)$T(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$。

由此可以得出以下结论:①非线性方程组的 Cauchy 问题在 $t\geqslant 0$ 上一般不存在整体

经典解;②即使不存在整体经典解,但对于小初值而言,Cauchy 问题局部经典解的存在区域可以变得相当大。

【例 0.2】 考察如下一阶拟线性双曲型方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ t = 0: u = \varphi(x) \quad (\varphi(x) \in C^1(R)) \end{cases}$$

在此 Cauchy 问题的经典解(C^1 解)$u = u(t,x)$的存在范围内,由$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(t,x)$定义的积分曲线称为方程的特征线。沿任一给定特征线,Cauchy 问题的解 $u = u(t,x)$在特征上满足$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$,即 u 在每一特征线上保持常数。从而知方程的特征线必为直线。于是,过初始轴上任意点$(0,\alpha)$的特征线方程为 $x = \alpha + \varphi(\alpha)t$,在该特征线上,$u = \varphi(\alpha)$。

设$\sup\limits_{x\in R}\{|\varphi(x)| + |\varphi'(x)|\}$($C^1$ 模)有界,则对于小的 t 值,由隐函数定理,从 $x = \alpha + \varphi(\alpha)t$可解出$\alpha = \alpha(t,x)$,从而可得到 Cauchy 问题解的表达式为 $u = \varphi(\alpha(t,x))$。这说明 Cauchy 问题必存在惟一的局部经典解。

但另一方面,如果初始数据 $\varphi(x)$单调不减,则必存在两点$(0,\alpha_1)$,$(0,\alpha_2)$,且 $\alpha_1 < \alpha_2$,使 $\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2)$。这样,过此两点的特征线必在有限时间内相交,在交点处的解值不能惟一确定。这说明此时 Cauchy 问题决不可能在 $t \geqslant 0$ 上存在整体经典解,而在有限时间内经典解产生奇性(在力学上对应于激波的形成)。事实上,可以证明解的生命跨度由下式确定

$$T^{-1} = \max_{x\in R}\{-\frac{1}{\varphi'(x)}, 0\}$$

这表明对拟线性双曲型方程(组)的 Cauchy 问题,即使初始资料充分光滑(甚至充分小),其经典解的整体存在性也是无法保证的。

但是,在一些特殊情形,仍然可以在 $t \geqslant 0$ 上得到整体经典解。事实上,可以证明,当 $\varphi'(x) \geqslant 0$ 时,例 0.2 中的 Cauchy 问题一定在 $t \geqslant 0$ 上存在整体经典解。

通过上面讨论可以看出,对拟线性双曲型方程组,无论是从理论角度还是应用角度,考虑以下两个问题都是重要的和有意义的。

(1)在什么条件下,拟线性双曲型方程组的定解问题(包括 Cauchy 问题、混合初边值问题、自由边值问题等)在 $t \geqslant 0$ 上存在惟一的整体经典解,并在此基础上研究解的整体性态,特别是解的大时间性态。

(2)在什么条件下,拟线性双曲型方程组的定解问题在 $t \geqslant 0$ 上不存在整体经典解,而在有限时间内发生破裂现象,并在此基础上深入研究解的破裂点的性态。例如,研究解本身首先破裂还是解的一阶微商首先破裂、解在破裂点附近的性质等。

研究这两方面的问题的意义是非常明显的。一方面,对拟线性双曲型方程组的解的整体性态(如解的稳定性、渐近性等)的研究以及有关数值求解方法的讨论通常都要以解的整体存在性为前提。另一方面,如果解在有限时间范围内发生破裂,而这种破裂又是物理模型本身所允许的,这就反过来说明建立的数学模型存在缺陷,必须加以修改。同时,如果发现整体经典解不存在,使得人们在更广的函数空间类中去求解定解问题,从而达到

发展数学理论的目的。例如在空气动力学方程组研究中,考虑到出现激波的可能性,促进了弱间断解的提出与发展。本书不涉及这方面的内容,有兴趣的读者可参阅有关拟线性双曲型方程组弱解理论方面的文献和专著(见参考文献[68])。

鉴于此,对拟线性双曲型方程组经典解整体存在性以及破裂现象的研究具有重要的理论意义和实际意义。

一维非等熵流体动力学方程组

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0 \\ u_t + p(v,s)_x + 2\alpha u = 0 \quad (\alpha \geqslant 0) \\ s_t = 0 \end{cases} \tag{0-2}$$

是流体力学中一个重要的物理模型。其中,$u, v, p = p(v,s), s$ 分别表示气体的速度、比容、压强和熵,且满足

$$p_v(v,s) < 0, p_{vv}(v,s) > 0, \forall v > 0, s \in R$$

上式的第一个条件,即 $p_v(v,s) < 0$ 保证方程组是严格双曲的;后一个条件,即 $p_{vv}(v,s) > 0$ 保证方程组除了存在一个线性退化特征外,另两个特征是真正非线性特征。

如果 $s(t,x)$ 恒为常数,则方程组(0-2)称为等熵流体动力学方程组。

对方程组(0-2)的研究具有重要的物理意义。本书主要目的是研究(非)等熵流体动力学方程组(0-2)的 Cauchy 问题整体经典解的存在性和解的破裂现象,以及耗散系数对 Cauchy 问题经典解光滑性的影响。同时,本书也考虑了非等熵流体动力学方程组的初边值问题,并得到了一些非常基本的结果。

对于等熵情形的弱解研究可参阅参考文献[3]、[6]、[7]、[9]等。

第一章　一阶拟线性双曲型方程组 Cauchy 问题一般理论

第一节　基本概念

一、双曲型方程组的定义

在大量的实际问题中，特别是在物理学、力学或其他自然科学中，经常会提出具两个自变量的一阶拟线性双曲型方程组的各种定解问题。这种形式的方程组总可以表示为如下形式

$$u_t + A(u)u_x = g(u) \tag{1-1}$$

其中，$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 是关于变量 t 和 x 的未知向量函数；$A(u)=(a_{ij}(u))$ 是关于变量 u 的具有适当光滑元的 n 阶矩阵；$g(u)=(g_1(u),g_2(u),\cdots,g_n(u))^{\mathrm{T}}$ 是关于变量 u 的 n 维列向量函数。

定义 1.1　在所考察区域上，如果有下列条件成立：

①矩阵 $A(u)$ 存在 n 个实特征 $\lambda_1(u),\lambda_2(u),\cdots,\lambda_n(u)$；

②$A(u)$ 可对角化，即存在可逆矩阵 $T(u)$，使

$$T^{-1}(u)A(u)T(u) = \Lambda(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1(u),\lambda_2(u),\cdots,\lambda_n(u))$$

则称方程组(1-1)在所考察区域上是双曲型方程组。

由定义 1.1 可知，如果矩阵 $A(u)$ 存在 n 个实而互异的特征 $\lambda_1(u),\lambda_2(u),\cdots,\lambda_n(u)$，则方程组(1-1)一定是双曲型方程组。

注 1.1　定义 1.1 中的条件②等价于 $A(u)$ 存在完全的右(左)特征向量

$$r_1(u),r_2(u),\cdots,r_n(u) \quad (l_1(u),l_2(u),\cdots,l_n(u))$$

满足

$$A(u)r_i(u) = \lambda_i(u)r_i(u) \quad (l_i(u)A(u) = \lambda_i(u)l_i(u)) \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

和

$$\det(r_{ij}(u)) \neq 0 \quad (\det(l_{ij}(u)) \neq 0) \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

其中

$$r_i(u) = (r_{i1}(u),r_{i2}(u),\cdots,r_{in}(u))^{\mathrm{T}} \quad (l_i(u) = (l_{i1}(u),l_{i2}(u),\cdots,l_{in}(u))$$

注 1.2　双曲型定义只与主部系数矩阵 $A(u)$ 的代数性质有关。

注 1.3　左右特征向量可适当规范化，即

$$l_i(u)r_j(u) \equiv \delta_{ij} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

$$r_i^{\mathrm{T}}(u)r_i(u) \equiv 1 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

其中，δ_{ij}表示 Kronecker 符号。

注 1.4 双曲型定义与未知函数可逆变换 $u=u(v)(\det(\nabla u(v))\neq 0)$无关，即

$$\nabla u(v)v_t + A(u(v))\nabla u(v)v_x = g(u(v))$$

$$v_t + B(v)v_x = f(v), B(v) = \nabla u(v)^{-1}A(u(v))\nabla u(v), f(v) = \nabla u(v)^{-1}g(u(v))$$

注 1.5 当定义 1.1 中只有条件①成立而条件②不成立时，方程组(1-1)不能称为双曲型方程组。对此种情形的研究几乎没有进展，即使普通的 Cauchy 问题也没有结果。例如$U=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$，且

$$U_t + \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} U_x = 0$$

定义 1.2 如果双曲型方程组(1-1)的特征满足

$$\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \cdots < \lambda_n(u)$$

则称方程组(1-1)为严格(狭义)双曲型方程组。如果

$$\lambda_1(u) \leqslant \lambda_2(u) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(u)$$

则称方程组(1-1)为非严格(广义)双曲型方程组。

当 $n=1$ 时，方程 $u_t+\lambda(u)u_x=f(u)$一定是双曲型方程。

二、方程组的特征形式

这里总假定 $\lambda_i(u), r_{ij}(u), l_{ij}(u)(i,j=1,2,\cdots,n)$与 $a_{ij}(u)(i,j=1,2,\cdots,n)$具有相同的正规性。

以 $l_i(u)$左乘方程组(1-1)，得到方程组(1-1)的等价形式

$$l_i(u)[u_t + \lambda_i(u)u_x] = l_i(u)g(u)$$

其分量形式为

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}(u)\left[\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_i(u)\frac{\partial u_j}{\partial x}\right] = \sum_{j=1}^{n} l_{ij}(u)g_j(u) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

对任意给定的 C^1(连续可微)解 $u=u(t,x)$，定义

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda_i(u(t,x)) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-2}$$

为方程组(1-1)的第 i 特征方向。在(t,x)平面上，方程(1-2)的积分曲线称为相应于解 $u=u(t,x)$的第 i 特征线(依赖于 u)。解沿第 i 特征方向对 t 的方向导数，即

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_t + \lambda_i(u)u_x \triangleq \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}_i t}$$

由此得到方程组(1-1)的特征形式为

$$l_i(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}_i t} = f_i(u) \quad \left(f_i(u) = \sum_{j=1}^{n} l_{ij}(u)g_j(u)\right) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-3}$$

方程组(1-3)称为方程组(1-1)的标准型。

【例 1.1】 考虑如下 2×2 拟线性双曲型方程组(特征形式)

$$
\begin{cases}
l_{11}(u)\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}_1 t}+l_{12}(u)\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}_1 t}=\mu_1(u) \\
l_{21}(u)\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}_2 t}+l_{22}(u)\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}_2 t}=\mu_2(u)
\end{cases} \tag{1-4}
$$

由数学分析的知识可知,存在积分因子 $\pi_1(u)\neq 0$ 和 $\pi_2(u)\neq 0$,使

$$
\begin{cases}
\pi_1(u)[l_{11}(u)\mathrm{d}u_1+l_{12}(u)\mathrm{d}u_2]=\mathrm{d}r, r=r(u_1,u_2) \\
\pi_2(u)[l_{21}(u)\mathrm{d}u_1+l_{22}(u)\mathrm{d}u_2]=\mathrm{d}s, s=s(u_1,u_2)
\end{cases}
$$

因此方程组(1-4)可化为如下等价形式,即

$$
\begin{cases}
r_t+\lambda(r,s)r_x=f_1(r,s) \\
s_t+\mu(r,s)s_x=f_2(r,s)
\end{cases} \tag{1-5}
$$

其中,$\lambda(r,s)$,$\mu(r,s)$为方程组(1-4)的特征,(r,s)为方程组(1-4)的 Riemann 不变量。

方程组(1-5)称为方程组(1-4)的对角化方程组。对于 2×2 拟线性双曲型方程组一定可以对角化(至少在局部),但对于 $n>3$ 的拟线性双曲型方程组一般不能对角化。可以对角化的方程组称为可约化方程组。

三、特征的分类

定义 1.3 如果对所考察的区域上任意的 u,有

$$\nabla\lambda_i(u)r_i(u)\neq 0$$

则称第 i 特征$\lambda_i(u)$在 P.D. Lax 意义下为真正非线性特征。如果对所考察的区域上任意的 u,有

$$\nabla\lambda_i(u)r_i(u)\equiv 0$$

则称第 i 特征$\lambda_i(u)$为线性退化特征。

进一步,若方程组所有特征都是真正非线性特征或线性退化特征,则称方程组是真正非线性方程组或线性退化方程组。

注 1.6 定义 1.3 中真正非线性和线性退化的定义与未知函数的可逆变换无关。

定义 1.4 由$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=r_i(u)(i=1,2,\cdots,n)$确定的积分曲线称为方程组(1-1)的第 i 特征轨线。

定理 1.1 方程组(1-1)真正非线性的充分必要条件为 $\lambda_i(u)$沿第 i 特征轨线严格单调;方程组(1-1)线性退化的充分必要条件是 $\lambda_i(u)$沿第 i 特征轨线为常数。

【例 1.2】 考虑可约化方程组

$$
\begin{cases}
r_t+\lambda(r,s)r_x=0 \\
s_t+\mu(r,s)s_x=0
\end{cases} \tag{1-6}
$$

由于右特征向量 $r_1(r,s)/\!/(1,0)^{\mathrm{T}}$,$r_2(r,s)/\!/(0,1)^{\mathrm{T}}$,因此,方程组(1-6)真正非线性的充分必要条件为 $\lambda_r(r,s)\neq 0$,$\mu_s(r,s)\neq 0$;其线性退化的充分必要条件则为 $\lambda_r(r,s)\equiv 0$,$\mu_s(r,s)\equiv 0$。

【例 1.3】 考虑非线性弦振动方程

$$u_{tt} - (K(u_x))_x = 0 \tag{1-7}$$

其中,$K = K(v) \in C^1$ 满足

$$K(0) = 0, \quad K(v) > 0$$

记 $v = u_x, w = u_t$,则方程(1-7)可化为如下等价形式,即

$$\begin{cases} v_t - w_x = 0 \\ w_t - K(v)_x = 0 \end{cases} \tag{1-8}$$

由 $K(v)$的性质可知,方程组(1-8)是具互异特征的严格双曲型方程组,其中特征

$$\lambda = -\sqrt{K'(v)} < 0 < \mu = \sqrt{K'(v)}$$

引进 Riemann 不变量,即

$$2r = w + \int \sqrt{K'(v)}\mathrm{d}v, \quad 2s = w - \int \sqrt{K'(v)}\mathrm{d}v$$

则方程组(1-8)可化为方程组(1-6)。方程组(1-6)中 $\lambda = -\mu = k(r-s)$,这里 $k(y) = \sqrt{K'(G(y))}$,$v = G(y)$是 $y = \int_0^v \sqrt{K'(v)}\mathrm{d}v$ 的反函数。

方程组(1-8)是真正非线性的充分必要条件为 $K''(v) \neq 0$;方程组(1-8)是线性退化的充分必要条件为 $K''(v) \equiv 0$,也即方程(1-7)是线性弦振动方程。

通常,如果取

$$K(v) = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

则

$$K''(0) = 0, \quad K''(v) = -\frac{3v}{(1+v^2)^{5/2}}$$

由此可以看到,此时方程组(1-8)既非真正非线性方程组,也非线性退化方程组。

【例 1.4】 考虑 Euler 坐标系下一维等熵流体动力学方程组

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ u_t + uu_x + \rho^{-1}p_x = 0 \end{cases} \tag{1-9}$$

其中,$\rho, u, p = p(\rho)$分别表示气体的密度、速度和压强。对于多方气体

$$p = A\rho^\gamma$$

其中,$A(>0)$为常数,$\gamma(>1)$为气体的绝热指数。为避免出现真空状态,总假定 $\rho > 0$,由下式

$$c^2 = p'(\rho) = A\gamma\rho^{\gamma-1} > 0$$

确定的 c 为局部声速。

容易计算,在区域 $\rho > 0$ 上,方程组(1-9)是严格双曲型方程组,其特征为

$$\lambda = u - c < \mu = u + c$$

引进 Riemann 不变量

$$2r = u - \frac{2}{\gamma-1}c, \quad 2s = u + \frac{2}{\gamma-1}c$$

则方程组(1-9)可化为方程组(1-6),其中

$$\lambda = \frac{\gamma+1}{2}r + \frac{3-\gamma}{2}s, \quad \mu = \frac{3-\gamma}{2}r + \frac{\gamma+1}{2}s$$

因为 $\gamma>1$,所以

$$\frac{\partial\lambda}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial\mu}{\partial s} > 0$$

即方程组(1-9)是真正非线性严格双曲型方程组。

定义 1.5 若在 u-空间中沿由

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = r_i(u(s)) \\ u(0) = 0\end{cases}$$

确定的过原点的第 i 特征轨线 $u = u^{(i)}(s)$ 对适当小的 $|u|$ 有下式成立

$$\nabla\lambda_i(u) r_i(u) \equiv 0$$

则称第 i 特征 $\lambda_i(u)$ 为弱线性退化特征。

特别地,如果方程组(1-1)所有特征为弱线性退化特征,则称方程组(1-1)为弱线性退化方程组。

由弱线性退化特征和线性退化特征的定义可知,弱线性退化特征是线性退化特征,但反之不成立。

定义 1.6 若在 u-空间过原点的第 i 特征轨线 $u = u^{(i)}(s)$ 有下式成立

$$g(u) \equiv 0$$

则称 $g(u)$ 满足匹配条件。

第二节 Cauchy 问题概述

一、局部经典解理论

考虑如下严格双曲型方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}u_t + A(u)u_x = F(u) \\ t = 0: u = \varphi(x) \in C^1(R)\end{cases} \tag{1-10}$$

其中,$u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}}$;$A(u) = (a_{ij}(u))$ 是 n 阶矩阵;$F(u) = (F_1(u), F_2(u), \cdots, F_n(u))^{\mathrm{T}}$。

由严格双曲型的定义,不妨假设 Cauchy 问题(1-10)中方程组的特征满足

$$\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \cdots < \lambda_n(u) \tag{1-11}$$

对应 $\lambda_i(u)(i = 1,2,\cdots,n)$ 的右(左)特征向量分别为

$$r_i(u) = (r_{i1}(u), r_{i2}(u), \cdots, r_{in}(u))^{\mathrm{T}} \quad (l_i(u) = (l_{i1}(u), l_{i2}(u), \cdots, l_{in}(u)) \\ (i = 1,2,\cdots,n)$$

其特征形式为

$$\begin{cases}l_i(u)[u_t + \lambda_i(u)u_x] = l_i(u)F_i(u) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \\ t = 0: u = \varphi(x)\end{cases}$$

对于 Cauchy 问题(1-10)的局部经典解的存在惟一性，迄今为止已有成熟的理论。这里不加证明地引述，有兴趣的读者可参阅参考文献[29]。

定理 1.2 设 $l_{ij}(u), r_{ij}(u), \lambda_i(u)(i,j=1,2,\cdots,n) \in C^1(R)$，$\varphi(x)$ 的 C^1 模有界，即

$$\|\varphi\|_1 \triangleq \|\varphi\|_0 + \|\varphi'\|_0, \quad \|\varphi\|_0 = \sup_{x\in R} |\varphi(x)|$$

则存在 $\delta>0$，使 Cauchy 问题(1-10)在区域

$$D(\delta) \triangleq \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant \delta, x \in R\}$$

上存在惟一的 C^1 解，且 $\delta=\delta(\|\varphi\|_1)$ 单调不增。进一步，当 $\|\varphi\|_1 \to 0$ 时，$\delta \to \infty$。

推论 1.1 对任意的 $T>0$，总存在参数 $\eta>0$，使得只要 $\|\varphi\|_1 \leqslant \eta$，则 Cauchy 问题(1-10)一定在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上存在惟一的 C^1 解。

定理 1.3 (稳定性)设 Cauchy 问题(1-10)的具有界 C^1 模的初始函数 $\varphi_i(x)(i=1,2)$ 对应的解为 $u_i(t,x)(i=1,2)$，则

$$\|u_1(t,x) - u_2(t,x)\|_1 \leqslant C\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\|_1$$

其中，常数 $C>0$。

定理 1.4 (解对参数的连续依赖性)假设 Cauchy 问题(1-10)的初始函数 $\varphi(x)=\varphi(x,\varepsilon)$ 的 C^1 模有界(不依赖于小参数 ε)，则存在与 ε 无关的 $\eta>0$，使得在 $0\leqslant t\leqslant \eta$ 上 Cauchy 问题(1-10)存在惟一的连续可微解 $u(t,x,\varepsilon)$，且当 $\varepsilon\to 0$ 时，如果 $\varphi(x,\varepsilon)\to\varphi(x,0)$，那么一定有

$$u(t,x,\varepsilon)\to u(t,x,0)$$

二、由局部 C^1 解向整体 C^1 解的过渡

局部经典解能否通过不断的延拓得到整体 C^1 解？一般说来，结论是否定的。因为拟线性双曲型方程组 Cauchy 问题(1-10)的经典解要在有限时间内产生奇性，发生破裂现象。但在一些特殊情形，Cauchy 问题(1-10)的经典解在 $t\geqslant 0$ 上是整体存在的。下面将介绍两类将局部经典解延拓到整体经典解的方法。

第一种模式：对任意的 $T>0$，假设 Cauchy 问题(1-10)在区域 $D(T)$

$$D(T) \triangleq \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, x \in R, \forall T > 0\}$$

上存在惟一的 C^1 解 $u(t,x)$，则

$$\|u(t,x)\|_1 \leqslant C, \forall t \in [0,T]$$

其中，$C(>0)$是与 T 无关的常数。那么 Cauchy 问题(1-10)在 $t\geqslant 0$ 上存在惟一的 C^1 解。

第二种模式：对任意的 $T>0$，若 Cauchy 问题(1-10)在区域 $D(T_0)(0\leqslant T_0\leqslant T)$

$$D(T_0) \triangleq \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T_0, x \in R, \forall 0 \leqslant T_0 \leqslant T\}$$

上存在惟一 C^1 解 $u(t,x)$，则

$$\|u(t,x)\|_1 \leqslant C(T), \forall t \in [0,T]$$

其中，$C(T)(>0)$与 T_0 无关，即 C^1 解可以延拓到 $t=T$。由 T 的任意性可知，Cauchy 问题(1-10)在 $t\geqslant 0$ 存在惟一的 C^1 解。

通过上述分析，可以证明 Cauchy 问题(1-10)经典解整体存在的基本框架为

局部经典解理论 + 解的一致先验估计⇒整体经典解

因此，证明 Cauchy 问题(1-10)整体经典解的存在性关键在于得到其连续可微解 $u(t,x)$ 的 C^1 模的一致先验估计。

【例 1.5】 考虑单个方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t + \lambda(u)u_x = 0 \\ t = 0: u = \varphi(x) \in C^1(R) \end{cases} \tag{1-12}$$

定理 1.5 假设 $\lambda(u) \in C^1$，$\|\varphi(x)\|_1$ 有界，则 Cauchy 问题(1-12)在 $t \geqslant 0$ 上存在惟一整体经典解的充分必要条件为

$$\frac{\mathrm{d}\lambda(\varphi(x))}{\mathrm{d}x} \geqslant 0, \forall x \in R \tag{1-13}$$

证明 根据一阶拟线性双曲型方程组 Cauchy 问题局部经典解的存在惟一性定理，存在仅依赖于初始数据 C^1 模的正常数 T_0，使 Cauchy 问题在区域 $D(T_0)$上存在惟一的经典解。因此，为证明定理 1.5，只须证明对任意的 $T > 0$，Cauchy 问题(1-12)的 C^1 解的 C^1 模在区域 $D(T)$上具有不依赖 T 的一致先验估计。

因为解 $u(t,x)$沿方程过 x 轴上点$(0,\alpha)$的特征线为常数 $u(t,x) = \varphi(\alpha)$，因此，在区域 $D(T)$上 $u(t,x)$的 C^0 模一致有界，即

$$|u(t,x)| \leqslant \sup_{x\in R} |\varphi(x)|, \forall (t,x) \in D(T)$$

为证明$|u_x(t,x)|$一致有界，设

$$v = \lambda'(u)u_x$$

经计算，v 沿特征线方向满足

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \triangleq v_t + \lambda(u)v_x = -v^2 \tag{1-14}$$

注意到初始条件，容易得到

$$t = 0: v = v_0(x) \triangleq \frac{\mathrm{d}\lambda(\varphi(x))}{\mathrm{d}x} \tag{1-15}$$

因此，沿过 x 轴上点$(0,\alpha)$的特征线积分式(1-14)，并利用式(1-15)，得

$$v(t,x) = \frac{v_0(\alpha)}{1 + v_0(\alpha)t} \tag{1-16}$$

由此可以看出，式(1-13)是 Cauchy 问题(1-12)在 $t \geqslant 0$ 上存在惟一整体经典解的必要条件。

另一方面，由式(1-13)和式(1-16)可直接得到

$$0 \leqslant v \leqslant \sup_{x\in R} v_0(x) = \sup_{x\in R} \frac{\mathrm{d}\lambda(\varphi(x))}{\mathrm{d}x}$$

设 $w = u_x$，则有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \triangleq w_t + \lambda(u)w_x = -vw \\ t = 0: w = w_0(x) = \varphi'(x) \end{cases}$$

沿过 x 轴上点$(0,\alpha)$的特征线积分上式，即得

$$w = w_0(\alpha)\exp(-\int_0^t v\mathrm{d}t)$$

从而得

$$|u_x(t,x)| \leqslant |w(t,x)| \leqslant \sup_{x\in R}|w_0(x)| \leqslant \sup_{x\in R}|\varphi'(x)|$$

至此，可以证明 u_x 的C^0 模在区域 $D(T)$上具有不依赖于 T 的一致先验估计。

定理 1.5 证毕。

注 1.7 如果方程组(1-6)是真正非线性的，不妨设

$$\lambda_r > 0, \quad \mu_s > 0$$

则式(1-13)等价于

$$\varphi'(x) \geqslant 0, \ \forall x \in R$$

如果方程组(1-6)是线性退化的，即

$$\lambda_r \equiv 0, \quad \mu_s \equiv 0$$

则对 C^1 模有界的任意初始数据 $\varphi(x)$，Cauchy 问题(1-12)对任意的时间 t 存在整体经典解。注意，该结论对于 $n>2$ 的方程组一般不再成立。

【例 1.6】 考虑如下 2×2 对角型严格双曲型方程组 Cauchy 问题

$$\begin{cases} r_t + \lambda(r,s)r_x = 0 \\ s_t + \mu(r,s)s_x = 0 \\ t = 0: r = r_0(x), s = s_0(x) \end{cases} \tag{1-17}$$

定理 1.6 假设 $\lambda,\mu,r_0(x),s_0(x)$都是 C^1 函数，$\|(r_0(x),s_0(x))\|_1$ 有界。由严格双曲型定义，不妨假设

$$\lambda(r,s) < \mu(r,s)$$

进一步假设

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda(r_0(\beta),s_0(\alpha))}{\partial\beta} \geqslant 0 \\ \dfrac{\partial\mu(r_0(\beta),s_0(\alpha))}{\partial\alpha} \geqslant 0 \end{cases} \quad (\forall\alpha\leqslant\beta,\alpha,\beta\in R) \tag{1-18}$$

则 Cauchy 问题(1-17)在 $t\geqslant0$ 上存在惟一整体经典解。

证明　类似定理 1.5 的证明，只须证明在区域 $D(T)$上 Cauchy 问题(1-17)的 C^1 解的 C^1 模一致有界。

因为 $r(t,x),s(t,x)$分别在第一特征和第二特征为常数，因此

$$\|(r(t,x),s(t,x))\|_0 \leqslant \|(r_0(x),s_0(x))\|_0, \forall(t,x)\in D(T)$$

下面证明 $r_x(t,x),s_x(t,x)$在区域 $D(T)$上的 C^0 模一致有界。

设

$$u = \mathrm{e}^{h(r,s)}r_x \tag{1-19}$$

其中，光滑函数 $h=h(r,s)$满足

$$h_s = \frac{1}{\lambda-\mu}\lambda_s$$

对方程组(1-17)中的第一式关于变量 x 求导,有

$$r_{xt}+\lambda(r,s)r_{xx}+\lambda_r r_x^2+\lambda_s r_x s_x=0$$

注意到式(1-19)及

$$u_x=e^h(r_{xx}+h_r r_x^2+h_s r_x s_x)$$
$$u_t=e^h(r_{xt}+h_r r_x r_t+h_s r_x s_t)$$
$$s_t+\lambda s_x=(\lambda-\mu)s_x$$

由此可得到

$$\begin{cases}u_t+\lambda u_x=-\lambda_r e^{-h}u^2\\ t=0:u=u_0(x)=e^{h(r_0(x),s_0(x))}r'_0(x)\end{cases}\tag{1-20}$$

设 $x=x(t,\beta)$ 为过 x 轴上点 $(0,\beta)$ 的第一特征线,则沿该特征线有

$$r(t,x)=r(t,x(t,\beta))=r_0(\beta)$$

由特征线定义,可知

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t,\beta)}{dt}=\lambda(r_0(\beta),s(t,x(t,\beta)))\\ x(0,\beta)=\beta\end{cases}\tag{1-21}$$

因此,沿第一特征线,由式(1-20)可得到

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=u_t+\lambda u_x=-\lambda_r(r_0(\beta),s(t,x(t,\beta)))e^{-h(r_0(\beta),s(t,x(t,\beta)))}u^2\\ t=0:u=e^{h(r_0(\beta),s_0(\beta))}r'_0(\beta)\end{cases}\tag{1-22}$$

积分式(1-22)得到

$$u=u(t,x(t,\beta))=\frac{e^{h(r_0(\beta),s_0(\beta))}r'_0(\beta)}{A(t,\beta)}\tag{1-23}$$

其中

$$A(t,\beta)=1+\int_0^t\lambda_r(r_0(\beta),s(\tau,x(\tau,\beta)))r'_0(\beta)e^{h(r_0(\beta),s(\tau,x(\tau,\beta)))}d\tau\tag{1-24}$$

设过第一特征线 $x=x(t,\beta)$ 上点 $(t,x(t,\beta))$ 向下引第二特征线交 x 轴于 $(0,\alpha(t,\beta))(\alpha\leqslant\beta)$,则有

$$s(t,x(t,\beta))=s_0(\alpha(t,\beta))$$

这样,由式(1-18),可得到

$$\lambda_r(r_0(\beta),s(\tau,x(\tau,\beta)))r'_0(\beta)\geqslant 0$$

从而推知

$$A(t,\beta)\geqslant 1$$

那么,由式(1-19)和式(1-23),立即可得到 $r_x(t,x)$ 的 C^0 模的一致有界性。

同理可证明 $s_x(t,x)$ 的 C^0 模的一致有界性。

定理 1.6 证毕。

注 1.8 由式(1-18)可以证明

$$\frac{\partial\lambda(r(t,\beta),s(t,\alpha))}{\partial\beta}\geqslant 0,\frac{\partial\mu(r(t,\beta),s(t,\alpha))}{\partial\alpha}\geqslant 0,\alpha\leqslant\beta,\forall t\geqslant 0$$