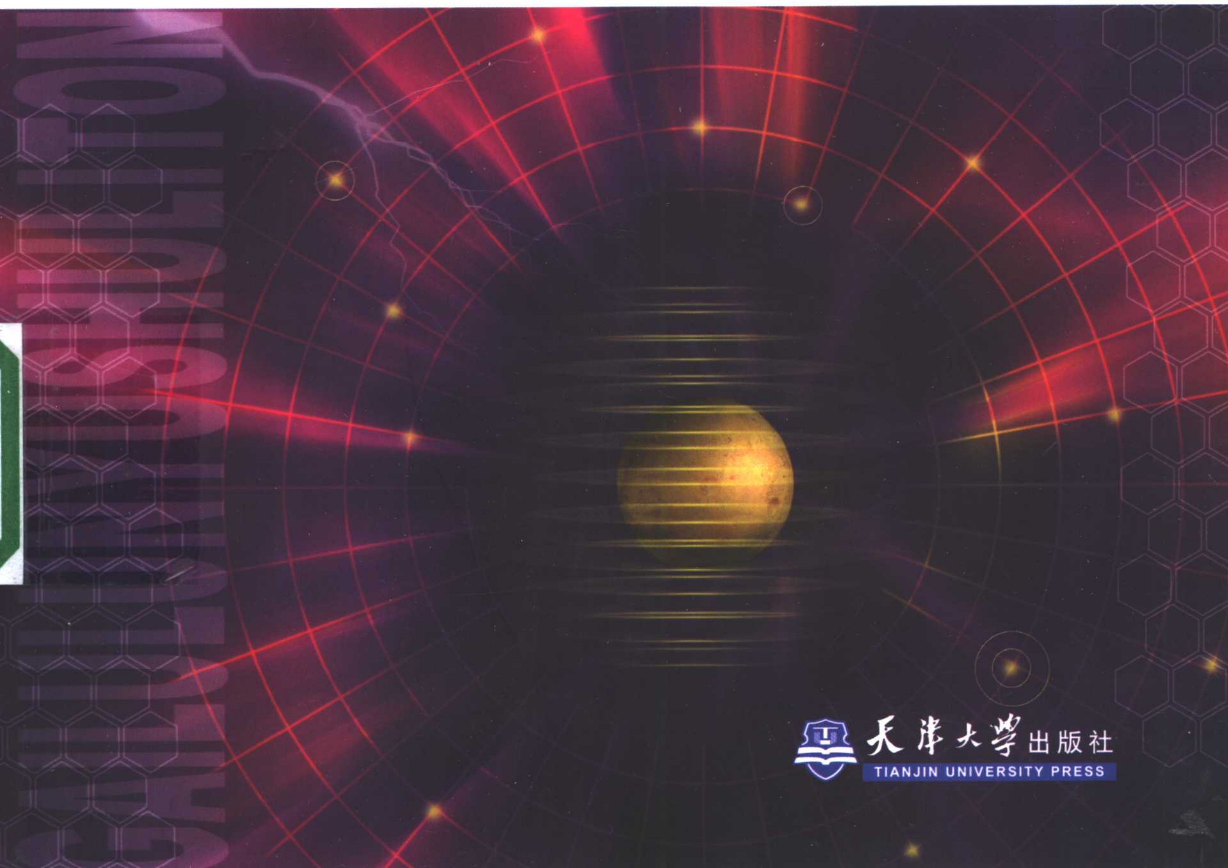
概率论与数理统计

学习方法指导

5

王家生 宋占杰 梁冯珍 编



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

概率论与数理统计
学习方法指导

王家生　宋占杰　梁冯珍　编

天津大学出版社
Tianjin University Press

内容提要

本书系统地综述了概率论与数理统计课程的基本内容、方法和技巧，并通过精心挑选的219道典型例题的分析为初学者提供了各类概率统计习题的解题示范．

本书适用于大学理工科各专业及经济管理类专业学生使用，可作为本科生概率统计课程同步学习参考书，同时可作为考研学生考前复习教材．

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习方法指导/王家生，宋占杰，梁冯珍编．—天津：天津大学出版社，2005.1
ISBN 7-5618-2058-5

Ⅰ．概… Ⅱ．①王… ②宋… ③梁… Ⅲ．①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第115625号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编：300072)
网　　址 www.tjup.com
电　　话 发行部：022-27403647　邮购部：022-27402742
印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 170mm×240mm
印　　张 14.75
字　　数 330千
版　　次 2005年1月第1版
印　　次 2005年1月第1次
印　　数 1－3 000
定　　价 20.00元

前 言

概率论与数理统计是一门讲述随机现象数量规律性的数学学科，它不仅具有理论的抽象性和逻辑的严密性，而且还具有自己独特的思维方法和计算技巧.初学这门课的学生常常反映“课文看得懂，习题做不出”，做习题时常常缺乏思路，难于下手.这反映了初学者不习惯于概率统计独有的思维方式.为帮助初学者克服上述困难，打开思路，找出方法，以尽快掌握这门课程的思维方式和计算技巧，作者在总结多年从事概率统计教学所积累经验的基础上，特地编写了这本《概率论与数理统计学习方法指导》，以期对初学者解题起到示范作用.

全书紧扣教材，共分 8 章，内容包括：随机事件与概率；随机变量(随机向量)及其概率分布；随机变量的数字特征；大数定律与中心极限定理；数理统计的基本概念；参数估计与假设检验；方差分析与回归分析.每章包括下列三个部分：

一、内容综述　力求做到内容综述简练准确，科学规范，重点突出，便于读者学习时提纲挈领地掌握课程内容.

二、典型例题分析　全书共收入 219 道典型例题.全部例题都经过精心挑选，每个例题都给出了细致分析和详尽解答.力求通过典型例题的示范作用，指导帮助读者学会各类习题的解题方法，掌握分析随机问题的思维方法，并逐步培养起独立分析和解决随机问题的能力.

三、自我测试题　为读者设计了一套体现该章重点内容的综合性试题，目的在于检验和提高读者解答各类随机问题的能力，巩固和提高学习效果(测试题全部给出了答案，其中部分重点题还给出了详细解答).

本书末的附录，给出了历年硕士研究生入学考试概率统计试题和答案(其中 2003，2004 年试题给出了解答)，供读者复习、准备考研之用.

科学巨匠拉普拉斯(法国著名天文学家，数学家，1749—1827)曾指出：生活中最重要的问题，其中占大多数实际上只是概率问题.并从哲学的高度预言：概率论终将成为人类知识中最重要的组成部分.

英国首相丘吉尔说：“一个人活得愈长，他就愈认识到一切取决于机会.任何人，哪怕只要回顾一下 10 年前的经历，他就会看到某些本身毫不重要的细小事件，实际上都左右了他的全部命运和前程.”

作为当今国际最著名的统计学家之一的 C.R.劳(美籍印度人，美国科学院院士)在《统计与真理——怎样运用偶然性》一书中指出：概率统计思维总有一天会像读和写一样成为一个有效率公民的必备能力.

在新的世纪之初，愿我们的青年学子谨记伟人的教诲，喜欢概率统计，学好概率统计，以服务于祖国和人类.

作者

2004 年 10 月于天津大学

目　　录

第 1 章　随机事件与概率 …………………………………………………… (1)
内容综述 ……………………………………………………………………… (1)
一、随机事件与样本空间……………………………………………………… (1)
二、概率的定义及性质………………………………………………………… (2)
三、条件概率…………………………………………………………………… (3)
四、事件的独立性……………………………………………………………… (4)
五、古典概型…………………………………………………………………… (5)
六、几何概型…………………………………………………………………… (5)
七、伯努利概型………………………………………………………………… (5)
典型例题分析 ………………………………………………………………… (6)
一、填空题……………………………………………………………………… (6)
二、选择题……………………………………………………………………… (8)
三、计算与证明题……………………………………………………………… (9)
自我测试题 …………………………………………………………………… (22)
第 2 章　随机变量及其概率分布 ………………………………………… (26)
内容综述 ……………………………………………………………………… (26)
一、随机变量与分布函数……………………………………………………… (26)
二、离散型随机变量及其分布律……………………………………………… (27)
三、连续型随机变量及其概率密度…………………………………………… (28)
四、随机变量的函数的分布…………………………………………………… (30)
典型例题分析 ………………………………………………………………… (31)
一、填空题……………………………………………………………………… (31)
二、选择题……………………………………………………………………… (32)
三、计算与证明题……………………………………………………………… (34)
自我测试题 …………………………………………………………………… (42)
第 3 章　随机向量及其概率分布 ………………………………………… (47)
内容综述 ……………………………………………………………………… (47)
一、二维随机向量及其联合分布函数………………………………………… (47)
二、二维离散型随机向量及其联合分布律…………………………………… (47)
三、二维连续型随机向量及其联合概率密度………………………………… (48)
四、边缘分布…………………………………………………………………… (48)
五、条件分布…………………………………………………………………… (49)
六、随机变量的独立性………………………………………………………… (50)

七、随机向量函数的分布 …… (51)
八、两个重要的二维分布 …… (52)
典型例题分析 …… (53)
一、填空题 …… (53)
二、选择题 …… (55)
三、计算与证明题 …… (56)
自我测试题 …… (66)
第 4 章　随机变量的数字特征 …… (73)
内容综述 …… (73)
一、随机变量的数学期望 …… (73)
二、方差 …… (74)
三、常用分布的期望与方差 …… (75)
四、协方差与相关系数 …… (75)
五、矩 …… (76)
典型例题分析 …… (76)
自我测试题 …… (104)
第 5 章　大数定律与中心极限定理 …… (108)
内容综述 …… (108)
一、切比雪夫不等式 …… (108)
二、大数定律 …… (108)
三、中心极限定理 …… (109)
典型例题分析 …… (110)
一、填空题 …… (110)
二、选择题 …… (111)
三、计算与证明题 …… (112)
自我测试题 …… (119)
第 6 章　数理统计的基本概念 …… (121)
内容综述 …… (121)
一、总体、样本、统计量 …… (121)
二、统计中常用分布 …… (122)
三、正态总体下统计量的分布 …… (123)
典型例题分析 …… (124)
一、填空题 …… (124)
二、选择题 …… (126)
三、计算与证明题 …… (128)
自我测试题 …… (134)
第 7 章　参数估计与假设检验 …… (136)

内容综述……………………………………………………………………………（136）
一、点估计 ……………………………………………………………………（136）
二、点估计优劣的评价标准 ……………………………………………………（138）
三、区间估计 …………………………………………………………………（138）
四、假设检验的基本概念和步骤 ………………………………………………（140）
五、单个正态总体均值和方差的假设检验 ……………………………………（141）
六、两个正态总体均值和方差的假设检验 ……………………………………（142）
典型例题分析…………………………………………………………………（142）
一、填空题 ……………………………………………………………………（142）
二、选择题 ……………………………………………………………………（143）
三、计算与证明题 ……………………………………………………………（144）
自我测试题……………………………………………………………………（159）
第 8 章　方差分析与回归分析……………………………………………（162）
内容综述………………………………………………………………………（162）
一、单因素试验的方差分析 ……………………………………………………（162）
二、有交互作用的双因素试验的方差分析 ……………………………………（164）
三、无交互作用的双因素试验的方差分析 ……………………………………（166）
四、一元线性回归分析 …………………………………………………………（168）
五、一元非线性回归 ……………………………………………………………（170）
六、多元线性回归 ………………………………………………………………（171）
典型例题分析……………………………………………………………………（172）
自我测试题………………………………………………………………………（189）
附录　1987—2004 年全国硕士研究生入学考试
概率统计试题及参考答案………………………………………………………（191）

第 1 章　随机事件与概率

内容综述

一、随机事件与样本空间

1.随机试验

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律的数学分支.概率论中的一个基本概念是随机试验.它是指其结果不能事先准确地预言且在相同条件下可以重复进行的那种试验.

2.样本空间

设 E 为一随机试验，则试验 E 的所有可能的“基本结果”(指试验的最简单的、不可或不必再细分的结果)构成的集合称为 E 的样本空间或基本空间，记为 Ω.样本空间的每个元素(即 E 的每个基本结果)称为样本点，常用 ω 表示.

3.随机事件

设 E 为随机试验，称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 中的随机事件，简称事件，记为 $A,B,C,\cdots$.在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时称这一事件发生.由一个样本点组成的单点集称为基本事件.

4.必然事件与不可能事件

在随机试验中，每次试验必然发生的事件称为必然事件，每次试验都不发生的事件称为不可能事件.必然事件用 Ω 表示，不可能事件用 $\varnothing$ 表示.

5.事件的关系与事件的运算

(1)包含：若事件 A 发生时，必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

(2)相等：若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

(3)和：表示事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的和事件，也称为事件 A 与事件 B 的并，记为 $A\cup B$.

(4)积：表示事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为事件 A 与 B 的积事件，也称为事件 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$ 或 AB.

(5)差：表示事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与 B 的差事件，记为 $A-B$.

(6)互不相容：若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是互不相容事件，或称互斥事件.

(7)逆：若事件 A 与 B 满足：$A\cup B=\Omega$，且 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互为逆事件，

亦称事件 A 与 B 互为对立事件．A 的对立事件记为$\bar{A}$，则 $\bar{A}=\Omega-A=B$．

事件运算顺序约定为先进行逆运算，再进行交运算，最后进行并或差运算．再恰当运用各种括号就能通过简单事件表示复杂的事件．

常用的事件运算规律：

交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A(BC)=(AB)C$；

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

对偶律(De Morgan 公式)　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}, \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$．

分配律和对偶律都可以推广到有限个事件情形，也可以推广到可列无穷多个事件的情形：

$$A\cup(\bigcap_{i=1}^{n}B_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup B_i),\quad A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)=\bigcup_{i=1}^{n}AB_i;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i;$$

$$A\cup(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup B_i),\quad A\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}AB_i;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i.$$

我们定义了事件的三种运算“并”，“交”，“逆”，其实在本质上只需要两种运算：“并与逆”或“交与逆”，这容易由事件运算性质和对偶律推算出来．例如，$A\cup B=\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}$，$A\cap B=\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}$．至于差运算可以表示为

$$A-B=A\cap\bar{B}\text{ 或 }A-B=\overline{\bar{A}\cup B}.$$

还应指出的是，记住一些事件之间关系的常用结论，有助于分析事件和进行概率计算．下面给出常用的关系式：

(1)$A\subset B$，当且仅当 $\bar{A}\supset\bar{B}$；

(2)$\varnothing\subset A\subset\Omega$；

(3)$A\cup\Omega=\Omega$，　$A\cup\varnothing=A$，　$A\cap\Omega=A$，　$A\cap\varnothing=\varnothing$，

$A-\varnothing=A$，　$A-\Omega=\varnothing$；

(4)$AB\subset A\subset A\cup B$，　$A-B\subset A\subset A\cup B$；

(5)$A\cap\bar{A}=\varnothing$，　$A\cup\bar{A}=\Omega$，　$\bar{A}=\Omega-A$；

(6)$(A-B)\cup A=A$，　$(A\cup B)\cap A=A$；

(7)$(A-B)\cap AB=\varnothing$，　$A=(A-B)\cup(AB)$，　$A-B=A-AB$；

(8)$(A-B)\cap B=\varnothing$，　$A\cup B=(A-B)\cup B=A\cup(B-A)$．

借助文氏图容易理解并记住上述各式．

二、概率的定义及性质

1．定义

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，A 是 E 中任意一事件，$P(A)$是 A 的实函数，且满

足

(1) $P(A) \geqslant 0$ （非负性）;

(2) $P(\Omega) = 1$ （规范性）;

(3)若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容,即 $A_iA_j = \varnothing (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots)$,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (\text{可列可加性}),$$

称 $P(A)$ 是事件 A 的概率.

2.性质

概率具有如下性质:

(1)不可能事件的概率为 0,即 $P(\varnothing) = 0$.

(2)概率具有有限可加性,即若 $A_iA_j = \varnothing (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3)设 A 为任一事件,则有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

(4)设 A, B 是两个事件,若 $A \subset B$,则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A), \quad P(B) \geqslant P(A).$$

(5)对任意事件 A, B,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

对任意事件 A, B, C,有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

一般地,对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n);$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

三、条件概率

1.定义

设 A, B 为二事件,且 $P(B) > 0$,则在事件 B 已发生条件下,事件 A 发生的条件概率为

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

2.乘法公式

设 A, B 为二事件,则

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A), \quad P(A) > 0;$$

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B),\quad P(B)>0.$$

一般地有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}),$$
$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0.$$

由条件概率的定义,易得

$$P(AB|C)=P(A|C)\cdot P(B|AC),P(AC)>0,$$

称上式为条件概率的乘法公式.

3.全概率公式

设 E 是随机试验,若 $B,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 E 中的事件,且满足条件:

(1)$P(A_i)>0,\quad i=1,2,\cdots,n;$

(2)$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,并且$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

在全概率公式中满足条件(2)的一组事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 称为样本空间Ω 的一个分割(或称为样本空间 Ω 的一个划分,或称为一个完备事件组).

4.逆概率(Bayes)公式

设 E 是随机试验,若 $B,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 E 中的事件,且满足:

(1)$P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n,$

(2)事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间Ω 的一个分割,即$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,

(3)$P(B)>0,$

则有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

四、事件的独立性

1.两个事件的独立性

若事件 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A,B 是相互独立的.

定理 1 若事件 A,B 相互独立,且 $P(B)>0$,则 $P(A|B)=P(A)$.

定理 2 若事件 A,B 相互独立,则 $\bar{A}$ 与 B,A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 均相互独立.

注意 当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时,若事件 A,B 相互独立,则 A,B 必相容;若事件 A,B 互不相容,则 A,B 必不相互独立.

2.三个事件的独立性

对于事件 A,B,C,若满足

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B),$$
$$P(AC)=P(A)\cdot P(C),$$
$$P(BC)=P(B)\cdot P(C),$$

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C),$$

则称事件 A,B,C 是相互独立的.

3. n 个事件的独立性

对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若对所有的可能组合 $1\leqslant i<j<k<\cdots\leqslant n$，有（共计 2^n-1-n 个等式）

$$P(A_iA_j)=P(A_i)\cdot P(A_j);\quad P(A_iA_jA_k)=P(A_i)\cdot P(A_j)\cdot P(A_k),$$

$$\cdots\cdots,\quad P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

定理 3 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则把其中任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个事件换成对立事件，所得的诸事件仍然是相互独立的.

五、古典概型

1. 定义

若随机试验 E 的样本空间 Ω 中只含有限个样本点，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，且每个样本点出现的可能性（概率）相同，则称 E 为古典型随机试验，简称古典概型.

2. 概率计算公式

设 A 是古典型随机试验 E 中的任意事件，则有

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点数}}{\text{样本点总数}}.$$

六、几何概型

1. 定义

向某一可度量的区域 G 内任投一点，如果所投的点落在 G 中任意区域 g 内的可能性大小与 g 的度量成正比，而与 g 的位置和形状无关，则称这一随机试验为几何概型试验，简称几何概型.

上述"度量"是指线段长度、可求积平面区域的面积或可求积空间区域的体积. 几何概型试验的样本点可用 G 内的点表示，因此样本空间就是 $\Omega=G$.

2. 概率计算公式

设 A 是几何概型试验中的任意事件，则有

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{\Omega\text{ 的度量}}.$$

七、伯努利概型

定义 只考虑两个可能结果的试验称为伯努利试验，把一伯努利试验独立地重复进行 n 次的随机试验称为 n 重伯努利试验，简称伯努利概型.

定理 进行 n 次独立重复试验，每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则 n 次试验中 A 恰发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^kp^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n.$$

典型例题分析

一、填空题

例 1.1 已知事件 A,B 满足条件 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，且 $P(A)=p\ (0<p<1)$，则 $P(B)=$________.

解 $P(B)=1-p$.

分析 因为 $P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$，而由题设知 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，所以 $P(B)=1-P(A)=1-p$.

例 1.2 若 $A\supset C,B\supset C,P(A)=0.7,P(A-C)=0.4,P(AB)=0.5$，则 $P(AB-C)=$________.

解 $P(AB-C)=0.2$.

分析 因 $P(AB-C)=P(AB)-P(ABC)$，而由题设知 $P(AB)=0.5,ABC=C$，所以 $P(AB-C)=0.5-P(C)$.

又由题设知 $P(A-C)=P(A)-P(C)=0.4,P(A)=0.7$，所以 $P(C)=0.3$，故得 $P(AB-C)=0.2$.

例 1.3 设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，且 $\bar{A}\supset\bar{B}$，则 $P(\bar{A}B)=$________.

解 $P(\bar{A}B)=\frac{1}{6}$.

分析 因 $\bar{A}\supset\bar{B}$，所以 $A\subset B$，从而

$$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

由上述三例可见，熟悉事件之间的常用关系式和概率的基本性质是求事件概率的关键.

例 1.4 从数字 1,2,…,9 中(可重复地)任取 n 个数字，每次取一个，则所取的 n 个数字的乘积能被 10 整除的概率为________.

解 所求概率为 $1-\frac{5^n+8^n-4^n}{9^n}$.

分析 令 $A=\{$所取 n 个数字的乘积能被 10 整除$\}$；

$B=\{$所取 n 个数字中至少有一个为偶数$\}$；

$C=\{$所取 n 个数字中至少有一个为 5$\}$.

则 $A=BC$，从而

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(\bar{B}\cup\bar{C})=1-[P(\bar{B})+P(\bar{C})-P(\bar{B}\bar{C})]$$
$$=1-\left(\frac{5^n}{9^n}+\frac{8^n}{9^n}-\frac{4^n}{9^n}\right)=1-\frac{5^n+8^n-4^n}{9^n}.$$

例 1.5 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5.现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为________.

解　所求概率为0.75.

分析　记 $A=\{甲命中目标\}, B=\{乙命中目标\}$,则所求概率为

$$P(A \mid A\cup B)=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

$$=\frac{0.6}{0.6+0.5-0.6\times 0.5}=0.75.$$

例 1.6　设三次独立试验中事件 A 出现的概率相等,若已知 A 至少出现一次的概率等于$\frac{19}{27}$,则事件 A 在一次试验中出现的概率为________.

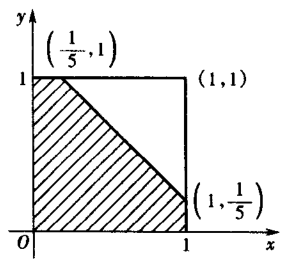
解　$P(A)=\frac{1}{3}$.

分析　由题设知,A 在三次独立试验中至少出现一次的概率为$\frac{19}{27}$,则 A 在三次独立试验中均不出现的概率为$[P(\bar{A})]^3=1-\frac{19}{27}$,故得$P(\bar{A})=\frac{2}{3}$,从而 $P(A)=\frac{1}{3}$.

例 1.7　在区间$(0,1)$中随机地取两个数,记事件 $A=\left\{两数之和小于\frac{6}{5}\right\}$,则 $P(A)$ =________.

解　$P(A)=\frac{17}{25}$.

分析　考虑几何概率问题.以 x,y 表示在区间$(0,1)$中随机地取得的两个数,若把(x,y)看作平面直角坐标系的一个点,则这些点的全体就是如图所示的正方形,而事件 $A=\left\{两数之和小于\frac{6}{5}\right\}$,便是此正方形中满足不等式 $x+y<\frac{6}{5}$的点的全体构成的集合,即图中阴影部分,故所求概率为



例 1.7 图

$$P(A)=\frac{阴影部分的面积}{正方形面积}=\frac{1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1}=\frac{17}{25}.$$

例 1.8　已知事件 A,B 相互独立,A 和 B 都不出现的概率为$\frac{1}{9}$,A 出现 B 不出现的概率与 B 出现 A 不出现的概率相等,则 $P(A)=$________.

解　$P(A)=\frac{2}{3}$.

分析　因事件 A,B 相互独立,所以 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立,从而由题设知

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=\frac{1}{9}.$$

又由题设知 $P(A\bar{B})=P(B\bar{A})$,则有

$$P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB),$$

从而有

$$P(A)=P(B),\quad P(\bar{A})=P(\bar{B}),$$

因此 $P(\bar{A})=\frac{1}{3}$,故得 $P(A)=\frac{2}{3}$.

二、选择题

例 1.9 设 A,B 为随机事件,若 $P(AB)=0$,则下列命题中正确的是________.

(A)A 和 B 互不相容　　　　(B)AB 是不可能事件

(C)AB 未必是不可能事件　　　　(D)$P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

解 应选(C).

分析 正确理解互不相容事件、不可能事件及概率为零的事件之间的关系与区别是解决本题的关键.

若 $P(AB)=0$,则 AB 未必是不可能事件.例如,进行一掷点试验,向区间[0,1]内任投一点,假设每次投掷都必落在区间[0,1]内,且落在区间[0,1]内任一点处是等可能的.记事件

$$A=\left\{\text{点落在}\left[0,\frac{1}{2}\right]\text{内}\right\};\qquad B=\left\{\text{点落在}\left[\frac{1}{2},1\right]\text{内}\right\},$$

则由几何概型的概率计算知,$P(A)=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{1}{2}$,$P(AB)=0$.此例中,虽然 $P(AB)=0$,但事件 A 与 B 却是相容的,$AB\neq\varnothing$,且 $P(A)\neq 0$,$P(B)\neq 0$,故选(C).

例 1.10 设随机事件 A,B,C 两两互不相容,且 $P(A)=0.2$,$P(B)=0.3$,则 $P[(A\cup B)-C]=$________.

(A)0.5　　(B)0.1　　(C)0.44　　(D)0.3

解 应选(A).

分析 因

$$\begin{aligned}P[(A\cup B)-C]&=P(A\bar{C}\cup B\bar{C})=P(A\bar{C})+P(B\bar{C})-P(AB\bar{C})\\&=P(A-AC)+P(B-BC)-P(AB\bar{C})\\&=P(A)-P(AC)+P(B)-P(BC)-P(AB\bar{C}),\end{aligned}$$

而由题设知 $P(AB)=P(AC)=P(BC)=0$,$P(A)=0.2$,$P(B)=0.3$,故得

$$P[(A\cup B)-C]=P(A)+P(B)=0.5.$$

例 1.11 设当事件 A 与 B 同时发生时,事件 C 必发生,则下列各式正确的是________.

(A)$P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　(B)$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C)$P(C)=P(AB)$　　(D)$P(C)=(A\cup B)$

解 应选(B).

分析 由已知,$AB\subset C$,则 $P(C)\geqslant P(AB)$.又

$$1\geqslant P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

则有 $P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$,从而 $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.故(B)正确,(A)不正确.(C)、(D)显然不正确.

例 1.12 设 A,B 为任意两个事件，且 $A\subset B$，$P(B)>0$，则下列各式中必然成立的是________.

(A) $P(A)<P(A\mid B)$　　(B) $P(A)\leqslant P(A\mid B)$

(C) $P(A)>P(A\mid B)$　　(D) $P(A)\geqslant P(A\mid B)$

解 应选(B).

分析 由题设知 $0<P(B)\leqslant 1$，则 $\frac{1}{P(B)}\geqslant 1$. 又由题设知 $A\subset B$，则

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}\geqslant P(A),$$

即有 $P(A\mid B)\geqslant P(A)$，故只有(B)正确.

例 1.13 设 $P(A)=a$，$P(B)=b$，$P(A\cup B)=c$，则 $P(A-B)=$________.

(A) $a-b$　　(B) $c-b$　　(C) $a(1-b)$　　(D) $a(1-c)$

解 应选(B).

分析 由题设知 $c=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，则

$$P(AB)=a+b-c,$$

从而 $$P(A-B)=P(A)-P(AB)=a-(a+b-c)=c-b,$$

故应选(B).

例 1.14 设 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(A\mid B)+P(\bar{A}\mid\bar{B})=1$，则下列各式中正确的是________.

(A)事件 A 与 B 互不相容　　(B)事件 A 与 B 互相对立

(C)事件 A 与 B 不相互独立　　(D)事件 A 与 B 相互独立

解 应选(D).

分析 由题设 $P(A\mid B)+P(\bar{A}\mid\bar{B})=1$ 得 $P(A\mid B)=1-P(\bar{A}\mid\bar{B})=P(A\mid\bar{B})$，即 $P(A\mid B)=P(A\mid\bar{B})$，则有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(AB\cup A\bar{B})=P(AB)+P(A\bar{B})=P(B)P(A\mid B)+P(\bar{B})P(A\mid\bar{B})\\&=[P(B)+P(\bar{B})]P(A\mid B)=P(A\mid B),\end{aligned}$$

从而得到 $P(AB)=P(A)P(B)$，即事件 A 与 B 相互独立，故应选(D). 因(C)是(D)的相反的结论，故(C)不正确. 又因为两事件互不相容或两事件互相对立均为事件本身的属性，故由题设概率条件得不出(A)，(B)的结论，所以(A)，(B)是不正确的.

三、计算与证明题

例 1.15 某地发行 A,B,C 三种报纸. 已知在该地居民中订阅 A 报的占 45%，订阅 B 报的占 35%，订阅 C 报的占 30%，同时订阅 A 及 B 报的占 10%，同时订阅 A 及 C 报的占 8%，同时订阅 B 及 C 报的占 5%，同时订阅 A,B,C 三种报的占 3%，求下列事件的概率：

(1)只订阅 A 报；

(2)只订阅 A 及 B 报；

(3)只订阅一种报；

(4)正好订阅两种报；

(5)至少订阅一种报；

(6)不订阅任何报纸；

(7)至多订阅一种报纸.

解　记 A,B,C 分别表示订阅 A 报，订阅 B 报，订阅 C 报的事件. 由题设，则有

$P(A)=0.45, P(B)=0.35, P(C)=0.30, P(AB)=0.10, P(AC)=0.08,$ $P(BC)=0.05, P(ABC)=0.03.$

(1) $P(A\bar{B}\bar{C})=P[A-(B\cup C)]=P(A)-P[A(B\cup C)]=P(A)-P(AB\cup AC)$

$$=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$$

$$=0.45-0.10-0.08+0.03=0.30.$$

(2) $P(AB\bar{C})=P(AB-C)=P(AB)-P(ABC)=0.10-0.03=0.07.$

(3)由于 $P(A\bar{B}\bar{C})=0.30$,

$$\begin{aligned}P(\bar{A}B\bar{C})&=P[B-(A\cup C)]=P(B)-P[B(A\cup C)]\\&=P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)\\&=0.35-0.10-0.05+0.03=0.23,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B}C)&=P[C-(A\cup B)]=P(C)-P[C(A\cup B)]\\&=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=0.31-0.08-0.05+0.03=0.20,\end{aligned}$$

故所求概率为 $P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$

$$=0.30+0.23+0.20=0.73.$$

(4)由于 $P(AB\bar{C})=0.07$,

$$P(A\bar{B}C)=P(AC)-P(ABC)=0.08-0.03=0.05,$$

$$P(\bar{A}BC)=P(BC)-P(ABC)=0.05-0.03=0.02,$$

故所求概率为

$$\begin{aligned}P(AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC)&=P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC)\\&=0.07+0.05+0.02=0.14.\end{aligned}$$

(5) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-0.05+0.03=0.90.$$

(6) $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.90=0.10.$

(7) $P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)+P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$

$$=0.73+0.10=0.83.$$

例 1.16　在整数 0 至 9 中任取 4 个数字，能构成一个 4 位偶数的概率是多少？

解　本题属于古典概型问题. 在 $0,1,\cdots,9$ 中任取 4 个数字进行排列，所有排列种数为 P_{10}^4，此即样本点总数.

记 $A=\{$在 $0,1,2,\cdots,9$ 中任取 4 个数字能构成一个 4 位偶数$\}$，则 A 含的样本点可分为两类：

一类是个位数字是 0 的 4 位数，除个位外的构成可看作是从 0 以外的其他 9 个数