电磁场理论要点与题解

贺金玉　李永平　刘建成　编著

山东大学出版社

电磁场理论要点与题解

贺金玉　李永平　刘建成　编著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论要点与题解/贺金玉,李永平,刘建成编著
—济南:山东大学出版社,2003.8 (2005.1 重印)
ISBN 7-5607-2637-2

Ⅰ.电…
Ⅱ.①贺…②李…③刘…
Ⅲ.电磁场-理论-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 071598 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
安丘市九州印刷包装有限公司印刷
850×1168 毫米　1/32　10.5 印张　271 千字
2003 年 8 月第 1 版　2005 年 1 月第 2 次印刷
印数:3001—4000 册
定价:23.80 元

前　言

随着现代科学技术的进步，特别是IT产业的迅速发展，高等院校中以物理学专业为基础而设立的电子信息类专业越来越多．而电磁场理论作为这类专业中的重要基础理论课之一，也越来越受到高校师生的重视．我们编写这本电磁场理论要点与题解，正是为了促进这门课程的教与学．其目标是要真正实现"不仅懂而且会"这句格言，真正达到使学生不仅学到知识，而且形成独立分析问题和解决问题的能力之目的．

为了这个目的，我们以全国综合类院校和师范院校较为通用的经典教材——郭硕鸿先生的《电动力学》(第二版)为主要参考书，采取的编写体例是每章首先以理论要点的形式，将有关基础理论和主要公式进行较为系统的归纳、总结和提示，然后对郭硕鸿先生的《电动力学》(第二版)的全部习题，以及阚仲元、梁绍荣等教材中较为典型的中低难度的部分习题，作出了较为详细的解答，同时对部分典型而又灵活性较强的习题进行了一题多解的尝试．

为了这个目的，我们在附录中还编写了以下三部分内容：一是电磁场理论中有关的数学知识，如矢量代数、矢量分析与场论、δ函数、格林函数与格林定理、球坐标系中拉普拉斯方程的通解以及张量的运算等内容，以便读者在学习中使用．二是部分院校相关专

业硕士研究生入学考试的电磁场理论(或电动力学)试题,以帮助本科毕业生在考研准备过程中准确把握学习的深度和广度,同时也可作为考研前的模拟与自测.三是电磁场理论中的国际单位制和高斯单位制中主要公式对照表,以方便读者在查阅不同单位制的书籍时使用.

作者长期从事电磁场理论、电动力学和电磁学等课程的教学与研究,本书正是我们从事多年教学与研究的成果.全书共分7章,总计183个习题,理论要点精练系统,习题解答分析透彻,对于相关课程教师的教与学生的学具有较高的学术价值和指导意义,又具有较强的使用价值.

在本书的编著与出版过程中,得到了闫秉科教授、耿效辙教授的精心指教,在此一并表示衷心的感谢!同时对本书中所引用的有关内容出处著作和教材的编著者表示崇高的敬意.由于受篇幅等条件限制,原引内容不能一一注明,也请有关专家学者海涵.

鉴于作者水平所限,又加之时间仓促,不妥之处及错误在所难免,恳请使用者不吝赐教.

贺金玉 李永平 刘建成

2003年3月于德州学院

目　录

第一章　电磁现象的普遍规律

理论要点

本章的主要内容是把电磁现象的基本实验定律总结提高为电磁场所遵循的普遍规律——麦克斯韦方程组，进而导出求解麦克斯韦方程组所需要的边界条件，最后从能量的观点出发，讨论电磁场的运动规律．学习掌握好本章内容，对于后面在各种特定条件下讨论研究电磁场的性质与运动规律至关重要．

一、麦克斯韦方程组

1．真空中的场方程组

由库仑定律

$$\boldsymbol{F}=\frac{QQ'}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$$

和电场强度的定义式

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}$$

不难得出静电场的高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

这里，S 是空间 V 的边界闭曲面. 应用高斯定理，将上式定域化，便得静电场的散度方程：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.1}$$

相似地，由库仑定律也可以导出静电场的环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

应用斯托克斯定理，将上式定域化，便得到静电场的旋度方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{1.2}$$

由电荷守恒定律，$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

和毕奥－萨伐尔－拉普拉斯定律 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V'$

直接计算便得出稳恒磁场的场方程

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.4}$$

再把法拉第电磁感应定律 $\varepsilon = \oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

定域化为 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

并引入位移电流

$$\boldsymbol{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

的概念，可将(1.1)—(1.4)式总结为电磁现象所遵循的普遍规律——麦克斯韦方程组. 即

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\qquad(1.5)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

2.介质中的场方程组

为了不失一般性，可把它推广到介质内.在介质中，方程(1.1)，(1.4)不变，而其他两式变为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho_f-\rho_P}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_M+\boldsymbol{J}_P+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

通过对介质电磁性质微观机制的讨论，可以得到

$$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{J}_M=\nabla\times\boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{J}_P=\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}$$

将它们分别代入前面两式便得　$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_f$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_f+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

这里，　$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$

称为电位移强度矢量，

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$$

称为磁场强度矢量.

这完全是为了方便而引入的辅助量，于是，可得到有介质时的麦克斯韦方程组.即

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
&\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
&\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f \\
&\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

应当指出，在解决实际问题时，除了这些基本方程外，还必须引入一些关于介质电磁性质的实验关系. 对于各向同性的线性非铁磁介质有

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{M} = \chi_M \boldsymbol{H}$$

利用前边的关系不难推出

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

对于导电物质 $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$

这里，$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = \varepsilon_0(1+\chi_e)$为电介质的介电常数，$\mu = \mu_r \mu_0 = \mu_0(1+\chi_M)$为磁介质的磁导率，$\sigma$ 为导体的电导率.

二、电磁场的边值关系

麦克斯韦方程组是关于电磁场的微分方程. 在求解电磁场时，必定要用到与之相应的边界条件，来决定积分常数. 在不同介质的分界面上，场方程的微分形式已经失效. 为此，我们将麦克斯韦方程组的积分形式

$$
\begin{cases}
\oint_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\dfrac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \\
\oint_L \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_f + \dfrac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} \\
\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = Q_f \\
\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0
\end{cases}
\tag{1.7}
$$

应用到不同介质的分界面上，便得到与它们相应的边界条件（边值关系），即

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma \\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 \end{cases} \tag{1.8}$$

这里必须注意两点：

(1)这些关系的得出，是规定了界面的法向 $\boldsymbol{n}$ 从介质 1 指向介质 2 的缘故，否则，便相差一负号.

(2)用这种方法得到的边界条件具有普遍意义. 也就是说，对于任意的矢量场，只要它们的场方程与麦克斯韦方程组具有相同的形式，这些矢量也具有相同的边界条件.

例如，在电介质中 $\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ 或 $\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\rho_P$

则 $\boldsymbol{P}$ 的边值关系必定可表示为 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)=-\sigma_P$

在磁介质中， $\boldsymbol{J}_M=\nabla\times\boldsymbol{M}$

相似地，$\boldsymbol{M}$ 的边值关系为 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1)=\boldsymbol{\alpha}_M$

三、电磁场的能量和能流密度

由洛伦兹力公式 $\boldsymbol{f}=e\boldsymbol{E}+e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$

和麦克斯韦方程组，不难导出电磁场和电荷体系间的能量转化和守恒定律的微分形式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}+\frac{\partial w}{\partial t}=-\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.9}$$

这里，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 为电磁场的能流密度，代表在单位时间内垂直流过单位横截面的能量，其方向代表能量传输的方向；

$$w=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})=w_e+w_m$$

表示电磁场的能量密度；$\boldsymbol{v}$ 为电荷体系在电磁场中的运动速度.

将上式积分便得能量守恒定律的积分形式

$$-\oint_{\Sigma}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\sigma=\int_{V}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V}w\,\mathrm{d}V \tag{1.10}$$

其物理意义便可表述为：单位时间内流入某一区域 V 内的能量，等于其内电荷所消耗的焦耳热与场能的增加.

由这些概念和定律便可明确地解释电磁场能量的传播图像，也可进一步地证明电磁能是通过场来传播的.

习题解答

本章习题的主要目的不在于掌握求解电磁场的一般方法，而旨在加深电动力学基本概念、规律和方程的理解，以及熟练掌握电动力学中一些常用的公式，以便为今后各章的学习打下基础.

本章习题大致可分 3 种类型：

(1)用麦克斯韦方程组解题；

(2)有关介质极化和磁化的问题；

(3)用介质电磁性质方程和电磁场边值关系解题.

1.1 根据算符 ∇ 的微分性和矢量性，推导下列公式：

(1) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$
$\qquad+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$

(2) $\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\nabla A^{2}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$

解：(1)根据算符 ∇ 的微分性，将它分别作用于矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之上，得

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\nabla_{A}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})+\nabla_{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

由矢量代数公式 $\quad\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

并将∇_B看做一个矢量，得

$$\nabla_B(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\nabla_B\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}(\nabla_B\cdot\boldsymbol{A})$$
$$= \boldsymbol{A}\times(\nabla_B\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla_B)\boldsymbol{B}$$

式中∇_B是对$\boldsymbol{B}$的微分运算，所以$\boldsymbol{B}$应移到∇_B之后.

同理，得 $\nabla_A(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \nabla_A(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}\times(\nabla_A\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla_A)\boldsymbol{A}$

所以有 $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla_B\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla_B)\boldsymbol{B}$
$$+\boldsymbol{B}\times(\nabla_A\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla_A)\boldsymbol{A}$$

省去∇的脚标，得 $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$
$$+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

(2)在上式中，当$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$时，

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

即 $$\nabla A^2 = 2\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + 2(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

所以 $$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}\nabla A^2 - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

1.2 设u是空间坐标x,y,z的函数，证明

(1) $\nabla f(u) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u$

(2) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}(u) = \nabla u\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$

(3) $\nabla\times\boldsymbol{A}(u) = \nabla u\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$

证明：(1) $$\nabla f(u) = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}f(u) + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}f(u) + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}f(u)$$
$$= \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u$$

(2) $$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(u) = \frac{\partial}{\partial x}A_x(u) + \frac{\partial}{\partial y}A_y(u) + \frac{\partial}{\partial z}A_z(u)$$

$$= \frac{\partial A_x(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial A_y(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial A_z(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= \nabla u \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$$

$$(3)\ \nabla \times \boldsymbol{A}(u) = \left[\frac{\partial A_z(u)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(u)}{\partial z}\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{\partial A_x(u)}{\partial z} - \frac{\partial A_z(u)}{\partial y}\right]\boldsymbol{j} + \left[\frac{\partial A_y(u)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(u)}{\partial y}\right]\boldsymbol{k}$$

$$= \left[\frac{\partial A_z(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial A_y(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{\partial A_x(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial A_z(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right]\boldsymbol{j} + \left[\frac{\partial A_y(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial A_x(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right]\boldsymbol{k}$$

$$= \nabla u \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$$

1.3 设 $r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ 为源点 $\boldsymbol{x}'$ 到场点 $\boldsymbol{x}$ 的距离，$\boldsymbol{r}$ 的方向规定为从源点指向场点.

(1)证明下列结果，并体会对源点变数求微商$\left(\nabla'=\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x'}+\boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y'}+\boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}\right)$与对场变数求微商$\left(\nabla=\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)$的关系.

$$\nabla r = -\nabla' r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0$$

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0\quad(r\neq 0)$$

(2)求$\nabla\cdot\boldsymbol{r}$,$\nabla\times\boldsymbol{r}$,$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}$,$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$,$\nabla[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$及$\nabla\times[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$,其中$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{k}$均为常量.

证明:(1)$\nabla r=\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k}$

因
$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$
$$=\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$
$$=\frac{x-x'}{r}$$

同理,
$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y-y'}{r},\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z-z'}{r}$$

所以,
$$\nabla' r=\frac{x-x'}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y-y'}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z-z'}{r}\boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

又因为
$$\nabla' r=\frac{\partial r}{\partial x'}\boldsymbol{i}+\frac{\partial r}{\partial y'}\boldsymbol{j}+\frac{\partial r}{\partial z'}\boldsymbol{k}$$
$$\frac{\partial r}{\partial x'}=-\frac{x-x'}{r},\frac{\partial r}{\partial y'}=-\frac{y-y'}{r},\frac{\partial r}{\partial z'}=-\frac{z-z'}{r}$$

所以,
$$\nabla' r=-\left[\frac{x-x'}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y-y'}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z-z'}{r}\boldsymbol{k}\right]=-\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

故有
$$\nabla r=-\nabla' r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

由
$$\nabla f(u)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u$$

得
$$\nabla\frac{1}{r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right)\nabla r=\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$
$$\nabla'\frac{1}{r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right)\nabla' r=\left(-\frac{1}{r^2}\right)\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

所以 $$\nabla\frac{1}{r}=-\nabla'\frac{1}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\nabla\times\left(-\nabla\frac{1}{r}\right)=-\nabla\times\left(\nabla\frac{1}{r}\right)=\mathbf{0}$$

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x'}{r^3}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y-y'}{r^3}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z-z'}{r^3}$$

这里, $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x'}{r^3}=\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial x}(x-x')+(x-x')\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right)=\frac{1}{r^3}-\frac{3(x-x')^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{y-y'}{r^3}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(y-y')^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{z-z'}{r^3}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(z-z')^2}{r^5}$$

所以,

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^5}[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]$$

$$=\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^5}\cdot r^2=0$$

而 $$\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{x-x'}{r^3}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{y-y'}{r^3}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{z-z'}{r^3}$$

$$=-\left[\frac{\partial}{\partial x'}\frac{x'-x}{r^3}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{y'-y}{r^3}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{z'-z}{r^3}\right]$$

用与前面完全相同的方法可以证明,括号内的结果为零.

于是便证得 $$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0$$

由上面的证明可见,对源点变数求微商(∇')与对场变数求微商(∇)只差一负号,即相当于$\nabla=-\nabla'$.

(2) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\frac{\partial}{\partial x}(x-x')+\frac{\partial}{\partial y}(y-y')+\frac{\partial}{\partial z}(z-z')=1+1+1=3$

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x-x' & y-y' & z-z'\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{i}\left[\frac{\partial(z-z')}{\partial y}-\frac{\partial(y-y')}{\partial z}\right]+\boldsymbol{j}\left[\frac{\partial(x-x')}{\partial z}-\frac{\partial(z-z')}{\partial x}\right]$$

$$+\boldsymbol{k}\left[\frac{\partial(y-y')}{\partial x}-\frac{\partial(x-x')}{\partial y}\right]=0$$

$$\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{r})=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)[(x-x')\boldsymbol{i}+(y-y')\boldsymbol{j}+(z-z')\boldsymbol{k}]$$

$$=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}$$

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)[a_x(x-x')+a_y(y-y')+a_z(z-z')]$$

$$=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}$$

$$\nabla\cdot[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]=(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0)\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})+\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla[\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$$

$$=\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla[\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$$

$$=\boldsymbol{E}_0\cdot[\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\cdot\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$$

$$=\boldsymbol{E}_0\cdot[\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{k}]$$

$$=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0)\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

$$\nabla\times[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]=\nabla[\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]\times\boldsymbol{E}_0+\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\nabla\times\boldsymbol{E}_0$$

$$=\nabla[\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]\times\boldsymbol{E}_0$$

$$=\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{E}_0$$

$$=(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

1.4 (1)应用高斯定理证明

$$\int_V \mathrm{d}V\,\nabla\times\boldsymbol{f}=\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{f}$$

(2)应用斯托克斯定理证明

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\varphi=\oint \mathrm{d}\boldsymbol{l}\varphi$$

证明:(1)设 $\boldsymbol{d}$ 为任意的常矢量,有

$$\boldsymbol{d}\cdot\int_V \mathrm{d}V(\nabla\times\boldsymbol{f})=\int_V \mathrm{d}V\boldsymbol{d}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})$$

由矢量分析公式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{f})=(\nabla\times\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{f}-\boldsymbol{d}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})$

$$=-\boldsymbol{d}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})$$