



普通高等教育“十五”国家级规划教材

塑性力学概要

陈 笃 编著



高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

塑性力学概要

陈 笃 编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

塑性力学概要/陈笃编著. —北京:高等教育出版社,
2005.5

ISBN 7-04-016096-X

I. 塑... II. 陈... III. 塑性力学-高等学校-
教材 IV. O344

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 011113 号

策划编辑	黄毅	责任编辑	李激	封面设计	于涛
责任绘图	朱静	版式设计	范晓红	责任校对	殷然
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社
社址	北京市西城区德外大街4号
邮政编码	100011
总机	010-58581000
经销	北京蓝色畅想图书发行有限公司
印刷	肥城新华印刷有限公司

购书热线	010-58581118
免费咨询	800-810-0598
网 址	http://www.hep.edu.cn
	http://www.hep.com.cn
网上订购	http://www.landaco.com
	http://www.landaco.com.cn

开本	787×960 1/16
印张	8.5
字数	150 000

版次	2005年5月第1版
印次	2005年5月第1次印刷
定价	13.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 16096-00

内容简介

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材。本书主要阐述塑性力学小变形问题的基本理论和计算方法。全书共分五章,第一章从实验观察入手,考察一维应力条件下金属材料弹塑性变形的基本规律。第二章将有关的认识从一维情况推广到三维情况,讨论了屈服条件、强化特性和加载法则三个问题,对一般情况下金属材料的弹塑性变形行为作出了完整的概括。第三章和第四章分别是弹塑性全量本构关系的表述及应用与弹塑性增量本构关系的表述及应用,其中特别注意全量方法与增量方法在立论和应用上的差别,强调了弹塑性平衡边值问题的概念并联系到计算方法的讨论。第五章是关于理想塑性体极限状态理论的一个适当的归纳和介绍。各章中均附有例题和习题。最后,在附录中给出了关于有限元方法的一些说明。

本书结构严谨,概念清晰,切合实用,取材体现了少而精的原则。

本书可作为高等院校力学专业及机械、土木、航空等专业的专业课程教材或选修课程教材,也可作为一般工程技术人员参考用书。

序 言

塑性力学是固体力学的重要分支,也是某些工程学科必要的理论基础,常属于高等院校力学、机械、土木、航空等专业的专业课程或选修课程,也属于结构力学、计算力学、材料科学等方向的研究生研习的范围。若干年来关于塑性力学已有不少专著和教材出现,其中汇集了大量有价值的资料和成果,在一定程度上满足了学习者和研究者的需求。但一般说来,由于内容本身的难度,加上历史资料的堆积,这方面的参考读物往往都比较难读、难懂,以致常被学生视为畏途。本书的目的正是为高校的塑性力学教学提供一本有一定深度且又较为易读、实用的塑性力学教材。

本书内容力求简要,主要是介绍塑性力学小变形问题的基本理论。从一维弹塑性变形的研究开始,以弹塑性本构关系的讨论为主线,用一种尽可能简要的方式对塑性力学的重要观念(如屈服条件、强化特性和加载法则)与基本方法(包括增量语言、本构关系的建立、边值问题的表述和处理等)加以阐明,同时这种阐述对于一般的工程应用和计算也已经足够。

本书的编写是在教学实践中经过一定的摸索、逐步完成的,除对塑性力学基本内容有所整理外,在取材和体系方面均有一些新的尝试,如始终强调弹塑性体元应力-应变间的过程相依关系;详尽阐述增量方法的思想;以 Mises 屈服条件作为构建整个本构理论的基础;塑性强化材料的性质直接按计算中常用的双线性模型处理;对随动强化特性给予应有的重视;注意工程记号的运用与算式矩阵形式的表述;增加计算方法的说明和讨论等,相信这些尝试对于教学的改革和研究能起到一定的参考作用。

本书稿请太原理工大学杨桂通教授审阅,在审阅中提出了不少宝贵意见。本书稿在编写过程中得到了中国科技大学教务处的大力支持,又蒙刘云平副教授浏览初稿并提出意见。在此作者谨向他们致以感谢。

限于作者认识水平,书中难免有疏漏和不足之处,恳请读者和同行批评指正。

作者

2004 年 6 月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

目 录

引言——什么是塑性力学	1
第一章 一维应力条件下的弹塑性变形	3
§ 1.1 金属材料经受简单拉(压)时的若干实验表现	3
§ 1.2 塑性变形的细观机理与应变强化现象	7
§ 1.3 一维弹塑性本构关系	12
§ 1.4 简单桁架的弹塑性变形分析	16
§ 1.5 轴力杆非均匀弹塑性变形分析	21
习题	26
第二章 屈服条件、强化特性和加载法则	29
§ 2.1 三维应力分析(应变分析)的若干基本结论	29
§ 2.2 应力偏量和应变偏量	32
§ 2.3 金属材料的屈服条件	36
§ 2.4 两种强化模型	40
§ 2.5 加载, Drucker 公设与加载法则	44
习题	49
第三章 弹塑性全量本构关系与全量形式的弹塑性平衡边值问题	50
§ 3.1 简单加载条件下的弹塑性全量本构关系	50
§ 3.2 全量形式的弹塑性平衡边值问题	54
§ 3.3 全量边值问题的简单解举例	60
§ 3.4 受内压作用的厚壁球壳	70
习题	75
第四章 弹塑性增量本构关系与增量形式的弹塑性平衡边值问题	77
§ 4.1 理想塑性材料的增量本构关系	77
§ 4.2 线性等向强化材料的增量本构关系	83
§ 4.3 线性随动强化材料的增量本构关系	89
§ 4.4 增量形式的弹塑性平衡边值问题	94
习题	98
第五章 理想塑性体的极限状态	100
§ 5.1 极限状态的概念和极限状态的控制方程	100

§ 5.2 极限载荷的下限定理和上限定理	105
习题	115
附录 关于有限元方法	116
参考文献	120
索引	121
Synopsis	124
Contents	125
作者简介	127

引言——什么是塑性力学

塑性力学是固体力学的一个分支,为了大致说明什么是塑性力学,可以就内容及方法将它与弹性力学作一比较。

弹性力学讨论的是弹性物体在外力作用下的平衡形态问题(包括变形情况和应力分布)。所谓弹性指的是物体在外力作用下会发生变形而外力除去之后又能回复到原来形态的性质,这种性质是用材料微元的弹性本构关系描述的。弹性本构关系的一个基本特点是体元应力状态和应变状态的单一对应(或者说相互决定),正是这个特点决定了弹性力学的基本面貌。当然,经典的弹性力学讨论的是均匀各向同性的弹性物体在外力作用下的小变形平衡态问题,这方面的理论已经相当成熟和完整,其中出现的弹性本构关系即是工程中熟知的广义胡克定律。由于小变形前提的存在,整个问题将归结为关于物体的位移场、应变场和应力场的一个线性的边值问题。

与弹性力学相对应,塑性力学讨论的是弹塑性物体在外力作用下的平衡形态问题。所谓弹塑性指的是物体在外力作用下会发生变形而外力除去之后变形不一定能完全回复的性质。这里变形中的可回复部分称为弹性变形,不可回复部分称为塑性变形,塑性变形总是在外力的作用超过一定限度后出现。物体的弹塑性变形性质是用材料微元的弹塑性本构关系描述的,弹塑性本构关系一般说来已不再是体元应力状态和应变状态的简单对应,而是一种应力-应变过程相依关系,对这种过程相依关系的认识和描写构成了塑性力学的相当大一部分内容。在弹塑性本构关系的表述完成之后,弹塑性体的平衡形态问题也可以归结为有关场变量的某种形式的边值问题来处理,称为弹塑性平衡边值问题。作为塑性力学基本内容的介绍,本课程要讨论的仍限于小变形弹塑性平衡问题。

塑性力学开始于对金属材料的弹塑性变形的研究,由于金属材料在工程中的广泛应用,塑性力学的出现和研究可以看成是弹性力学的一个很自然的发展,即将弹性力学的一些概念和方法推广应用到金属材料的非弹性变形的分析,其中需要更新的无非是本构关系的表述。虽然在生产实践中人们对金属材料的塑性变形早有认识和利用,但是要提升到本构关系的高度对金属材料的弹塑性变形规律加以总结和表述一直是固体力学的一个难题,直到 20 世纪中期这个问题才算得到较为完整的解决。

鉴于弹塑性本构关系表现为材料体元应力过程与应变过程间的过程相依

(不再是应力状态与应变状态间的简单对应,如弹性本构关系那样)。在塑性力学中,这种过程相依关系是利用增量方法来表述的,即考察过程中应力的微小增量与应变的微小增量间的关联性质,从而得到所谓增量形式的本构关系。基于对增量本构关系的认识,具体的弹塑性平衡问题也是按照给定的载荷过程(加载过程)用载荷增量法来处理,每个载荷增量步则对应着一个增量场的边值问题分析。这一部分理论称为塑性力学的增量理论或流动理论,它体现了塑性力学的一般原理和方法。

在弹塑性本构关系的研究中,人们还发现,对于材料体元的一类非常特殊的应力-应变过程(所谓“比例加载”过程),即使体元已进入到弹塑性变形阶段,建立起应力状态与应变状态间的直接对应也还是有可能的。这种直接对应关系在形式上类似于某种非线性的弹性关系(仅仅是形式上的类似),称为弹塑性全量本构关系。全量本构关系的成立有它的前提条件,即体元的比例加载条件。在一个具体的弹塑性平衡问题中,如果物体内各体元的变形过程都能在一定程度上满足比例加载条件,这个问题的分析自然也就可以引用弹塑性全量本构关系以全量形式来进行,而不必采取增量步骤。塑性力学中的这一部分理论称为弹塑性全量理论或变形理论。用全量理论解决问题时,人们面对的是关于场变量(位移、应变、应力)的一个非线性边值问题。全量理论概念上稍简单,但在应用上有它的局限性,它实际上应看成是增量理论在特定条件下的一种推论。

弹塑性平衡边值问题(不论是全量形式还是增量形式)的具体处理一般都要借助于离散化步骤和数值计算,在这方面弹性力学的数值方法是最好的借鉴。

塑性力学一百多年的发展经历了曲折的探索过程,出现过种种的流派和理论,这其中很多深入的研究都不是本书所能涉及的。本书的目的在于参考已有的成果,对塑性力学的小变形问题给出一个基本合理而又相对完整的理论框架,为一般的工程计算提供一个较为切实的理论基础。

第一章 一维应力条件下的弹塑性变形

一维应力指材料体元经受简单拉(压)的应力状态,此时作用在体元上仅有一个非零的主应力,即拉(压)应力。记此拉(压)应力为 σ ,又记体元相应的拉(压)应变为 ϵ 。本章所要讨论的即是在涉及到弹塑性变形的情况下,体元应力过程 σ 与应变过程 ϵ 间的关联性质(相依关系)。基于金属材料的简单拉压试验,可以较直观地总结出此种一维应力条件下的弹塑性本构关系,它对于初步认识金属材料弹塑性变形的基本规律并在此后最终建立起复杂应力条件(三维应力条件)下材料弹塑性本构关系的一般表述将具有重要意义。

本章也将通过一些简单的弹塑性变形问题的讨论,展示下一维弹塑性本构关系的应用,并说明塑性力学的一些方法和特点。

§ 1.1 金属材料经受简单拉(压)时的若干实验表现

金属材料的简单拉伸试验是最常见的材料试验,在此种试验中即可以观察到材料弹塑性变形的若干表现。试验总是以标准形状(尺寸)的试件在材料试验机上进行,试件在受到拉力 F 作用时(图 1-1)可以认为其中间一段(长为 l_0)是处于均匀的单向应力状态,故其中任意体元的应力和应变都将是

$$\sigma = F/A_0, \quad \epsilon = \Delta l/l_0$$

其中, A_0 ——断面面积; Δl ——该段伸长量。

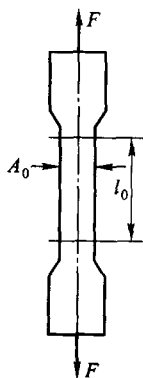


图 1-1

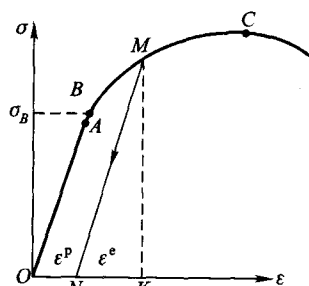


图 1-2

通过对 F 与 Δl 的测量记录,即可以观察材料体元的 $\sigma - \epsilon$ 关系(例如拉伸曲线或者卸载曲线)。

1.1.1 塑性强化材料的拉伸试验

金属材料的拉伸曲线可大致归结到两种类型,像中碳钢,某些高强度合金钢、铜、铝等,通常称之为弹塑性强化材料的(以后简称为塑性强化材料),其拉伸曲线属于第一种类型,如图1-2。图中曲线从 O 点出发,随着应力的增长,应变起初是按比例地增加(直线段 OA),到达比例极限点 A 后曲线开始弯折,随后通过弹性极限点 B ,材料即进入弹塑性变形阶段(此前,即 OB 段为弹性变形阶段),在弹塑性变形阶段,曲线仍继续上抬,直至最高点 C (称为强度极限点),过 C 点后试件随即破断。

弹性变形阶段(OAB 段)的特点是此时材料尚未出现不可恢复的变形,如果试验中在应力到达 σ_B 前即转向卸载操作,将会看到材料的应力-应变状态仍沿加载时走过的路径退回到出发点 O 。

加载一旦进入 BC 段,譬如已到达图中 M 点,再行卸载时情况便不同,体元的应力-应变状态将沿着图中的 MN 线(基本上与 OA 线平行)下行,卸载到 N 点时,有

$$\sigma_N = 0, \quad \text{而} \quad \epsilon_N \neq 0$$

ϵ_N 称为卸载后的残余应变。残余应变的出现,说明自 O 点拉伸到 M 点时的总应变 ϵ_M (图中 OK 段)是由两部分构成的

$$\epsilon_M = \epsilon^e + \epsilon^p$$

其中, ϵ^e (图中 NK 段)是可恢复的,卸载后消失,是总应变中的弹性部分,而 ϵ^p (图中 ON 段)是不可恢复的,卸载后仍存留,是总应变中的塑性部分。基于以上事实,可以得出如下结论:

1. 拉伸加载过程中,应力超出弹性极限 σ_B 后,体元的变形即成为弹塑性性质的(在此以前为弹性性质的),其中会出现不可恢复的变形,即塑性变形。

2. 在弹塑性加载段(BC 段),既然变形为弹塑性性质,每步应力增量 $d\sigma$ 所造成的应变增量 $d\epsilon$ 必然也是由两部分构成的,

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p$$

其中, $d\epsilon^e$ 为弹性部分, $d\epsilon^p$ 为塑性部分,而且弹性应变部分仍然服从胡克定律, $d\epsilon^e = d\sigma/E$, (E 为拉伸曲线上 OA 段斜率,即材料弹性模量),事实上可以看到沿 MN 线的卸载过程正是弹性应变的逐步释放过程,而最终的残余应变所反映的即是加载过程 BM 中各步塑性应变增量的累积值。

在塑性力学中为处理问题的方便,通常将此类塑性强化材料的拉伸曲线简化为两段直线,如图 1-3,图中点 A 相当于将材料的比例极限点和弹性极限点合而为一(实际上二者十分接近),称为材料的屈服极限点,其对应的应力值记作 σ_s ,称为材料的拉伸屈服限,OA 段为弹性变形段,其斜率 E 即是材料的弹性模量,图中 AB 段为弹塑性变形段,其斜率记作 E' ,可称为材料的弹塑性模量(作为拉伸过程中应力增量与对应的弹塑性应变增量的比值)。又由于在 AB 段有

$$\Delta\epsilon = \Delta\sigma/E' = \Delta\epsilon^e + \Delta\epsilon^p$$

而

$$\Delta\epsilon^e = \Delta\sigma/E$$

可以找出 AB 段拉伸中 $\Delta\epsilon^p$ 与 $\Delta\sigma$ 的关系为

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon^p &= \Delta\epsilon - \Delta\epsilon^e \\ &= \Delta\sigma/E' - \Delta\sigma/E \\ &= \Delta\sigma/h\end{aligned}$$

此处

$$h = \left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right)^{-1} = \frac{EE'}{E - E'} \quad (1.1)$$

此 h 值作为拉伸过程中应力增量与塑性应变增量之比可称为材料的塑性模量。

图中点 A 对应的应变值 $\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}$ 通常称为材料的屈服应变值。

1.1.2 理想塑性材料的拉伸试验

另有一类金属如低碳钢和某些铝合金,通常称之为理想弹塑性材料的(以后简称为理想塑性材料),其拉伸曲线形态稍有不同,如图 1-4。图中曲线自 O 点出发按线弹性规律上升到上屈服点 A 后,会很快地进入一个屈服平台段 BB' (即随着变形的发展应力值可能会略有下降到达下屈服点 B,而后即在不变的屈服应力 σ_B 作用下,应变有一段相当长的发展),此后再出现上抬至 C 点后很快破断。曲线的 BB' 段一般称为塑性流动段,如果在流动过程中(譬如图中 M 点)将试验转向卸载,可以发现材料的应力-应变状态也是沿着一条大致与弹性变形段 OA 相平行的路径 MN 下行。注意到残余应变段 ON 大体上与曲线上的 ABM 段长度相等,可知 ABM 段的变形或者说整个流动段的变形都是塑性变形性质。鉴于曲线上 A、B 两点十分接近,又考虑到体元塑性流动段的变形可以

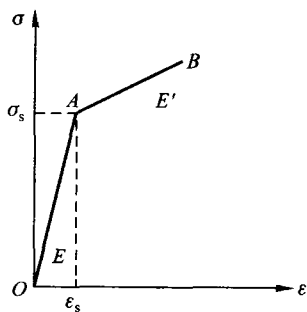


图 1-3

很大(比如,可达到前期弹性变形的 20 倍)塑性力学中通常也将此种拉伸曲线加以简化处理,简化成图 1-5 的形态。图 1-5 中 A 点是材料的屈服点,对应的应力值 σ_s 是材料的拉伸屈服限,过 A 点后曲线呈水平状延伸,表明材料进入塑性流动,且一直流动下去。

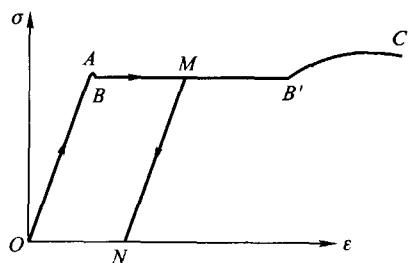


图 1-4

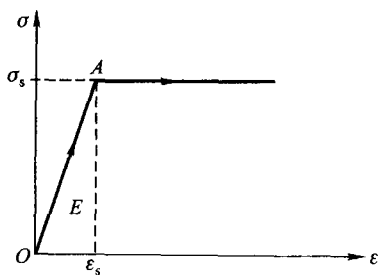


图 1-5

1.1.3 压缩试验与综合表现

对两类金属材料(塑性强化材料和理想塑性材料)的压缩试验也是需要的。试验表明材料在单向受压时的弹塑性变形行为与拉伸时的表现大致相同,可以认为材料在单向受压时的屈服限(屈服应力)其绝对值与拉伸屈服限相等,受压屈服后的强化表现(或流动表现)也与拉伸时相一致,卸载表现亦相同,如图1-6。

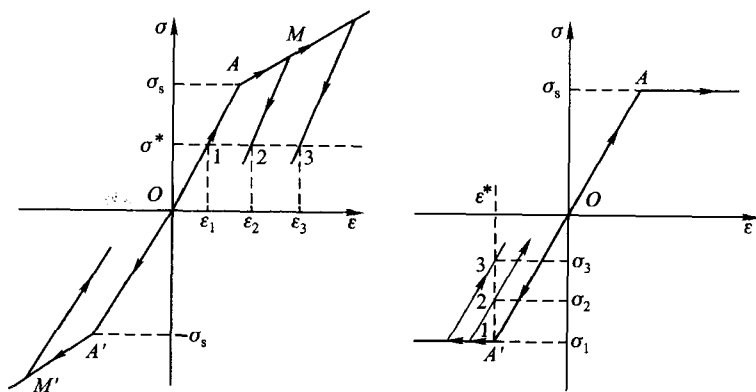


图 1-6

图 1-6 中左图综合了塑性强化材料的拉、压变形行为,右图则综合了理想塑性材料的拉、压变形行为。图 1-6 清楚地表明,不论哪种材料,其初始弹性状

态的应力范围均以应力轴上的拉、压屈服限作为界限,而材料的塑性变形则是发生在体元的应力状态“向外”突破(或试图突破)此限值的情况下。另外,不论是拉伸情况还是压缩情况,关于金属材料的弹塑性变形的以上实验观察中应该特别注意的一点是,加载过程和卸载过程中体元应力-应变状态的变化是按 $\epsilon - \sigma$ 平面上的不同路径来体现的(OAM-加载, MN-卸载),这点即决定了体元的应力状态和应变状态间已经不存在简单的对应关系,比如图 1-6 中同一应力值 σ^* 可以对应着若干不同的应变值 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 等,而同一应变值 ϵ^* 也可以对应着若干不同的应力值 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 等,这里每一种对应实际上都是由先期不同的加-卸载过程决定的。所以即使在目前这种简单的拉压条件下,弹塑性的应力-应变关系的描述也需要作为应力过程与应变过程间的过程相依关系来处理才有可能,这是弹塑性本构关系与弹性本构关系本质上不同的地方。

§ 1.2 塑性变形的细观机理与应变强化现象

1.2.1 晶体的两种变形机制

在宏观的力学分析中,金属材料一般可以作为均匀各向同性的介质来看待。细观的研究则表明绝大部分的金属材料都具有多晶结构,即是由大量细小晶粒不规则地结集而成的多晶体,而其中每颗晶粒是金属原子的有序排列(图 1-7a、b),故应力场作用下金属材料宏观变形的某些性质可以从晶粒变形的平均表现上得到解释。金属学的研究指出,晶体(晶粒)中主要存在着两种不同的变形机制(塑性变形的细观机理是一个很复杂的研究课题,这里只是一个极其简化的说明),一种是弹性机制,它表现为应力场作用下金属原子间距离的改变,这种改变不是永久性的,当应力场消失时,原子间距离将又重新回复到正常状态,此种机制中一般伴随有晶粒体积的改变,金属材料的宏观弹性变形可以从此种机制中得到说明。晶粒的另一种可能的变形机制是滑移机制,它表现为晶粒中相邻部分间的滑移或错动。滑移总是发生在晶粒中某些特定取向的平面上(称为滑移面),且沿着面中特定的方向(称为滑移方向)。当滑移面上沿滑移方向的剪切应力达到一定大小时滑移机制即相应开动,由它造成的晶粒变形是永久性的,应力场消失后滑移变形仍将存留,此种变形机制一般不会造成晶体体积的改变(图 1-7c),金属材料的宏观塑性变形正是晶粒中此种滑移运动的平均表现。由此还可以预期金属体元的塑性变形中将不会包含体积改变成分(参看图 1-7c)。关于这一点,在稍后的理论的形成中还会有所涉及。

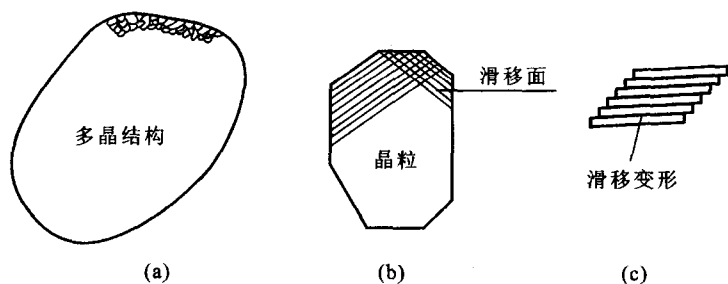


图 1-7

1.2.2 一维弹塑性变形的等效比拟

基于对金属材料弹塑性变形的细观机理的认识,图 1-8 中给出了两种模拟材料变形行为的等效模型,利用它们可以对理想塑性材料和塑性强化材料在拉、压加载和卸载时的表现以及屈服限、弹性变形、塑性变形这些概念作出更直观の説明。

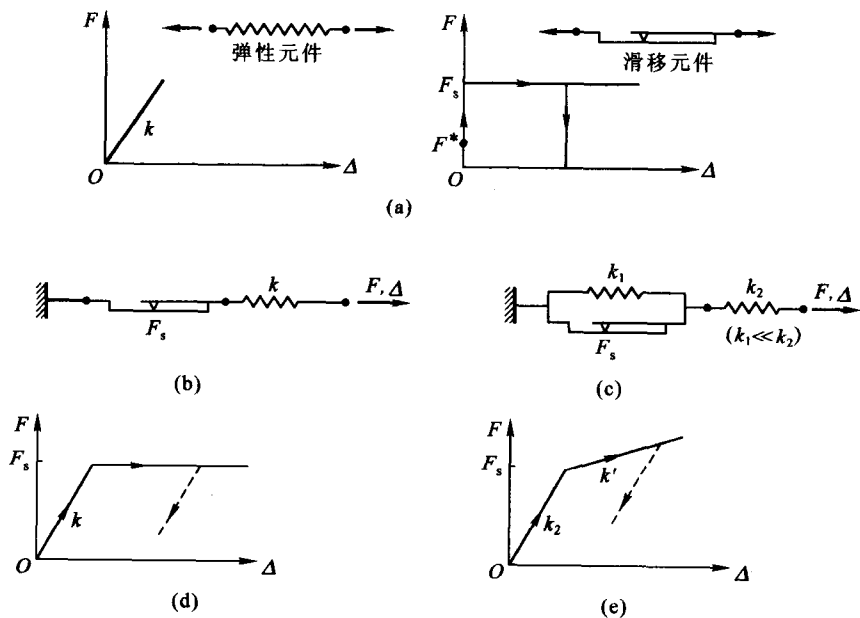


图 1-8

模型中包含有两种元件,弹性元件和滑移元件。两种元件代表着两种不同的变形特性,如图 1-8a(注意滑移元件受拉时,仅在拉力达到限值 F_s 的情况下方能产生滑动,受压时则有限值 $-F_s$,此种特性与理想的“干摩擦”特性十分相似)。弹性元件与滑移元件的串联即构成了理想弹塑性模型,滑移元件与一个弹性常数较小的弹性元件并联后再与一个弹性常数较大的弹性元件相串联,即构成了弹塑性强化模型(图 1-8b、c)。可以看到作用在模型端部的外力 F 与模型端点的位移量 Δ 间的关联性质正好表征出材料的应力-应变关系(图 1-8d、e)。注意此种模型中滑移元件所提供的滑移量正好就是模型的塑性变形量。另外,由于滑移元件的存在, F 和 Δ 间不存在简单的对应关系是显然的, F 和 Δ 间只能是一种过程相依关系(即从已知的状态出发, F 的变化过程将决定 Δ 的变化过程,反之亦然)。

1.2.3 应变强化现象

塑性强化材料性质上不同于理想塑性材料的地方不仅在于达到屈服后仍有抵抗变形的能力(拉伸曲线继续上抬),更需要注意的是它还具有所谓“应变强化”的性质,理想塑性材料则不具有应变强化性质。应变强化性质指的是材料的先期塑性应变会造成后继受载时,屈服应力发生改变的现象,这一点很容易从加载-卸载-再加载的试验中得到验证。参看图 1-9,若强化材料自 O 点开始经受拉伸加载,体元的应力-应变状态经由路径 OAM 到达 M 点后,加载停止,转入卸载,应力卸除后体元的状态将到达 N 点,此时的体元上虽然不存在应力的作用,但它已经是一个经受过塑性应变的体元,和初始状态相比,其微观结构已经有了改变,这种改变对体元性质的影响可通过再次加载来观察。再次拉伸时体元的状态将沿路径 NM 上行,作为先前卸载的反过程,这过程中的变形当然都是弹性性质的,于是可以看到后继拉伸时的弹性变形阶段一直要延续到拉应力到达 σ_M 时才结束(此后路径才发生转折),这表明体元的拉伸屈服限有了改变,变成了 σ_M 这就是应变强化现象。如果将上述试验改变一下,在体元卸载到 N 点后接下来进行反向加载(压缩),也会看到体元的弹性压缩过程将在图中 M' 点结束,而 $\sigma_{M'} \neq -\sigma_s$ (一般说来

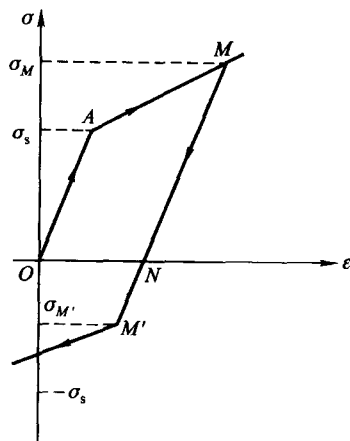


图 1-9