张宝俊 李祯祥 沈庭芝 编

信号与系统
——学习及解题指导

北京理工大学出版社

信号与系统

——学习及解题指导

张宝俊　李祯祥　沈庭芝　编

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书是我国高等工业学校电类专业开设的《信号与系统》课程的辅助教材，内容包括：信号与系统的基本概念，线性系统的时域分析，信号与系统的频域分析，系统的复频域分析及状态变量分析。以上各部分内容均为连续和离散并重，且按先连续后离散构成本书的体系。全书共九章，每章都由四个环节构成：基本要求、基本概念和方法、例题解答与分析、练习题，书后附各章所有的练习题答案。

本书对报考硕士研究生的人员尤为适用，也可供有关专业的教师和科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统：学习及解题指导/张宝俊等编. --北京：北京理工大学出版社，1997.10（2001.9 重印）

ISBN 7-81045-328-9

Ⅰ. 信… Ⅱ. 张… Ⅲ. ①信号理论-高等学校：专业学校-教学参考资料②线性系统-高等学校：专业学校-教学参考资料 Ⅳ. TN911.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 19663 号

责任印制：李绍英　责任校对：林晖

北京理工大学出版社出版发行
（北京市海淀区中关村南大街 5 号）
邮政编码 100081　电话(010)68912824
各地新华书店经售
北京房山先锋印刷厂印刷

*

787 毫米×1092 毫米　32 开本　13.375 印张　318 千字
1997 年 10 月第 1 版　2001 年 9 月第 2 次印刷
印数：4001—6500 册　定价：15.50 元

前　　言

《信号与系统》是高等学校电子工程、通信工程、信息工

[illegible]

科书相同。对于使用国内出版的其他教科书的读者，本书的全部内容对他们具有同样的指导意义。全书共分九章，每章内容均由下述四个环节组成：

(1) 基本要求。用简洁和明确的文字指出学习本章应掌握的基本内容，使读者在学习或复习时能有的放矢、胸中有数。

(2) 基本概念和方法。用清晰的文字提炼、概括出本章应掌握的基本概念和基本分析、计算方法，使读者看到的不是一堆公式的罗列，而是让读者阅读后能加深对本章内容的理解，澄清一些模糊概念。

(3) 例题解答与分析。这部分内容是本书的重点，每章精选了十几个例题对其进行详解，有的例题同时给出几种解法并加以分析比较，并从中归纳出相应的规律和结论。读者阅读并弄通了这部分内容，可使他们应用基本概念和方法求解较复杂习题的能力会有显著提高。

(4) 练习题。每章最后都选择十几个习题供读者学习本章时进一步练习使用。为使读者便于判断自己做题的正确性，在书后给出了全部练习题的答案供参考。

本书第一章至第四章由张宝俊编写，第六、八、九章由李祯祥编写，第五、七章由沈庭芝编写，全书由张宝俊统编。曹禹村教授审阅了本书初稿，并对编写工作提出了宝贵意见。

由于我们的水平有限，加之编写过程中可能有疏忽或不妥之处，诚恳希望读者提出宝贵意见，供今后再版时进一步修改。

编　者

于北京理工大学

1997 年 5 月

目 录

第一章　信号与系统的基本概念

1.1　基本要求

（1）消息、信息、信号的基本概念。信号分类。

（2）信号的时域描述方法及基本运算。

（3）基本连续/离散时间信号。复指数信号及阶跃、冲激（抽样）信号。

（4）系统的基本概念和描述。系统互联。

（5）系统的线性、时不变性、因果性、稳定性、可逆性和记忆性等六大特性。

1.2　基本概念和方法

1. 消息、信息、信号

消息（或信息）是借助各种传递手段（系统）给人们带来很多新知识，例如，电报中的电文，电话中的声音，电视中的图像等。其中电报、电话、电视这些系统就是传递手段，而被传递的电文、声音、图像是带给人们的消息或信息。

为了达到传递信息的目的，所采用的基本方法是：先把待传递的信息送入一个载体，如电压、电流、压力、温度等等，然后借助系统即传递手段对这些载有信息的载体进行必要的加工，如此来实现传递信息即通信的目的。

从上述信息传递的过程可以得出信号的定义以及信号与系统的密不可分的关系，这就是：信号是反映（或曰载有）信息的各种物理量，是系统直接进行加工、变换以实现通信的对象。

2. 信号的描述与运算

对信号进行描述（或说表示）的基本形式是用相应的时间函数来反映信息的变化，无论载有信息的是哪种物理量，都采用一般化的时间函数 $x(\cdot)$ 描述它，其中的圆点代表与时间 t（量纲为秒）有关的宗量，它可以是在 $(-\infty, +\infty)$ 域内连续取值的 t，也可以是含有 t 的某表达式，如 $x(t), x(2t)$，$x[3-(t/2)]$ 等等。时间函数的自变量当取为 $(-\infty, +\infty)$ 域内整数值 n（无量纲）或 n 的表达式，如 $x[n], x[2n]$，$x[3-(n/2)]$ 等等，则称这一类信号为离散时间信号（或称序列）。与此相对应，则把 $x(t), x(2t)$ 等信号称为连续时间信号。一个与时间无关的信号，若写为 $x(t)=K$（常数），则是连续时间信号；若写为 $x[n]=K$（常数），则是离散序列。

$x(\cdot)$ 可用一个具体的数学表达式来描述，也可以用对应的图形（或波形）来表示。在频域内还可以用其频谱表示，频谱的概念将在第四章给出。

对于函数构架已确定的 $x(\cdot)$，把宗量取为 t 或 t 的表达式，这二者之间存在确定的波形变换关系。读者应切实掌握反转、移位、尺度伸缩等三种变换关系，即

反转：在波形上绕纵轴反折 180°，这相应于函数式 $x(\cdot)$ 仅对宗量中的 t 代之以 $-t$。

移位：在波形上沿横轴移动 t_0，这相应于函数式 $x(\cdot)$ 仅对宗量中的 t 代之以 $t-t_0$。如 $t_0>0$，波形向右移动 t_0；$t_0<0$，

波形向左移动$|t_0|$。

尺度伸缩：在波形上沿横轴相对于原点拉伸或压缩 a 倍，这相应于函数式 $x(\cdot)$仅对宗量中的 t 代之以 at。$|a|>1$，波形压缩 a 倍；$|a|<1$，波形拉伸 a 倍。

上述这些变换规则同样适用于离散时间信号，但需要注意两点：①函数宗量中的 t 应写成 n，常数 t_0 写成整常数 n_0。②伸缩倍数 a 应写成整常数 K 或 $1/K$，拉伸时使宗量中的 $n\to n/K$，这时仅当 n/K 等于整值时取原序列的对应值，n/K 为非整值时则取零值。而当宗量中的 $n\to Kn$，这时会失去原序列的某些值，从而使序列被压缩。

信号的基本运算除了前述三种变换外，还包括信号瞬时值的加、乘、标乘、微分、积分等，对此读者也应熟练掌握，我们将在后而通过解题举例对其中的某些基本运算进行练习。

3. 基本连续/离散时间信号

(1) 复指数信号。这类信号既是线性时不变系统分析中最常用的信号，也是自然界中用于描述众多物理现象的基本函数。

连续型：$x(t)=ce^{at}$，c、a 一般取复数。根据 c、a 取值形式不同，可把该信号分为

①实指数信号：c、a 都取实数

②单位复指数信号：$c=1$，$a=\mathrm{j}\omega$

③复指数信号：$c=|c|e^{\mathrm{j}\theta}$，$a=\sigma+\mathrm{j}\omega$

单位复指数信号是这类信号中最重要的形式，表示为

$$x(t)=e^{\mathrm{j}\omega t}=\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t \qquad (1-1)$$

上式描述的信号是一个周期信号，其基波周期记为 T(单位为秒)，它与振荡频率 ω(单位弧度/秒)之间满足

$$\omega T = 2\pi(\text{弧度}) \qquad (1-2)$$

把式(1-1)和(1-2)结合起来考察可知，对于给定的ω，每当t的增量达到T，信号$x(t)$则重复前一个周期的变化规律。

离散型：$x[n]=c\alpha^n$，c、α一般取复数。根据c、α取值，该信号分为

①实指数序列：c、α取实数

②单位复指数序列：$c=1$，$\alpha=e^{j\Omega}$

③复指数序列：$c=|c|e^{j\theta}$，$\alpha=|\alpha|e^{j\Omega}$

同样其中单位复指数序列是其基本形式，写为

$$x[n] = e^{j\Omega n} = \cos\Omega n + j\sin\Omega n \qquad (1-3)$$

其中Ω为数字频率(单位是弧度，不是弧度/秒)，当其与2π之比等于两个正整数之比，即

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{m}{N}, \text{或 } \Omega N = m(2\pi) \qquad (1-4)$$

$x[n]$是一个周期序列，其基波周期为N(无量纲，且当N与m互质)。

$x[n]$与$x(t)$分别如式(1-1)和(1-3)，它们之间有相似的一面，如在时域内呈周期性；但也有重要的不同，这就是$x[n]$具有双周期性，即$x[n]$在频域内也呈周期性。频域周期性来源于序列变数n的整值性，如

$$e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j\Omega n} \cdot e^{j2\pi n} = e^{j\Omega n}$$

显见数字频率Ω每当增量达到2π，则使$x[n]$得以重复。在数字信号处理领域，一般取$0\sim2\pi$为Ω的主值区间。

将单位复指数序列的双周期性综合考虑，可以得出如下重要结论：若用不同数字频率的一组周期复指数序列构造一个集合$\{e^{j(m\frac{2\pi}{N})n}\}$，则集合中仅有$N$个分量是独立的，即在主值区间内仅取$m=0,1,2,\cdots,N-1$。而且在这$N$个分量中其

振荡速率不是随 m 单调增加，当 Ω 接近 π 的奇数倍，振荡最快；Ω 接近 π 的偶数倍振荡最慢，故一般称 $\Omega=\pi$ 为折迭频率。

(2) 阶跃和冲激(抽样)信号。这类信号也是线性系统分析中最常用的信号，尤其是冲激(抽样)信号，掌握它的应用是现代科学工作者必备的基础。在自然界中，可把这类函数作为一些物理现象的理想化数学描述。

连续型：

①单位阶跃信号 $u(t)$

$$u(t)=\begin{cases}0, t<0\\1, t>0\end{cases} \tag{1-5}$$

②单位冲激信号 $\delta(t)$

$$\begin{cases}\delta(t)=0, t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\end{cases} \tag{1-6}$$

上述两种信号的定义式中，其自变量 t 也可代之以宗量"·"，它可代表 t 或 t 的表达式。如此处理和理解就较容易地解决看似很难的问题。

我们知道，定义一个普通函数 $x(t)$ 就是对于每一个 t 值指定一个数的过程。用这样的观点来考察式(1-6)定义的 $\delta(t)$，显然它有别于普通函数，而且 $\delta(t)$ 的各阶导数也是如此。这种函数一般称为奇异函数或分配函数。如果用分配函数的方法定义 $\delta(t)$ 及其各阶导数，第一步要构造一个试验函数集 $\{\varphi(t)\}$，它包括的每一个函数应具有任意阶导数，且当 $t\to\infty$ 时它们比 t 的任意次幂更快地趋于零(定义某些分配函数时，此条件可以放宽)。第二步令待定义的分配函数为 $g(t)$，则定义 $g(t)$ 的过程就是对 $\{\varphi(t)\}$ 中每一个函数 $\varphi(t)$ 分配一个

数的过程。

例如，单位阶跃函数 $g(t)=u(t)$ 的分配函数定义：

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{1-7}$$

$u(t)$ 为 $\varphi(t)$ 指定的数是 $\varphi(t)$ 自 $t=0$ 至 ∞ 所覆盖的面积，这里试验函数 $\varphi(t)$ 应满足前面提出的条件。

单位冲激函数的分配函数定义：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \varphi(0) \tag{1-8}$$

$\delta(t)$ 为 $\varphi(t)$ 指定的数是 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 的值，这里的试验函数 $\varphi(t)$ 只要求其在 $t=0$ 处连续。作为式(1—8)的推广，下式也成立：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\varphi(t)\mathrm{d}t = \varphi(t_0) \tag{1-9}$$

类似地，$\delta(t)$ 的 k 阶导数定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(t-t_0)\varphi(t)\mathrm{d}t = (-1)^k\varphi^{(k)}(t_0) \tag{1-10}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$。$k=0$ 即为式(1-9)定义的单位冲激函数，$k=1$ 为单位冲激偶 $\delta^{(1)}(t)$ 的定义等等。

用分配函数的运算规则可以证明下述关系：

①奇偶性

$$\delta^{(k)}(-t) = (-1)^k\delta^{(k)}(t), k \geqslant 0 \tag{1-11}$$

由此得 $\delta(t)$ 是偶函数，$\delta^{(1)}(t)$ 是奇函数等等。

②尺度变换

$$\delta^{(k)}(at) = \frac{1}{a^{k+1}}\delta^{(k)}(t), k \geqslant 0, a > 0 \tag{1-12}$$

由此得 $\delta(at)=(1/a)\delta(t), \delta^{(1)}(at)=(1/a^2)\delta^{(1)}(t)$ 等等。

③与普通函数相乘

$$x(t)\delta^{(n)}(t-t_0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{(k)}(t_0)\delta^{(n-k)}(t-t_0)$$

(1-13)

其中 $$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!},\quad n\geqslant 0$$

由此得 $$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$x(t)\delta^{(1)}(t-t_0)=x(t_0)\delta^{(1)}(t-t_0)-x^{(1)}(t_0)\delta(t-t_0)$$

④$\delta(t)$与$u(t)$的换算关系

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-14}$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-15}$$

单位冲激函数 $\delta(t)$还可以用普通函数的广义极限来定义，例如，我们若能找到一个普通函数序列 $f_n(t)$，对于每一试验函数 $\varphi(t)$，如下形式的极限存在且等于 $\varphi(0)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\varphi(0) \tag{1-16}$$

则在式(1-8)的意义上把 $f_n(t)$当 $n\to\infty$的极限定义为 $\delta(t)$。下面通过一个具体例子来说明。

图 1-1 是一个面积为 1 的矩形脉冲 $r_\Delta(t)$，而且当 $\Delta\to 0$ 时，其面积仍保持为 1。我们以 $r_\Delta(t)$作为式(1-16)中的普通函数 $f_n(t)$，并设试验函数 $\varphi(t)$在 $t=0$ 处连续。根据式(1-16)可写出

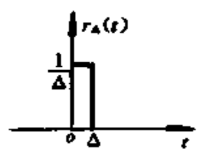

图 1-1

$$\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}r_\Delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_{0}^{\Delta}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

由 $\varphi(t)$在 $t=0$ 处的连续性可知，上式右侧的积分当 $\Delta\to 0$ 时趋于 $\varphi(0)\Delta$，所以有

$$\lim_{\Delta \to 0}\int_{-\infty}^{\infty} r_{\Delta}(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \varphi(0)$$

根据上述 $\delta(t)$的广义极限定义可得

$$\lim_{\Delta \to 0} r_{\Delta}(t) = \delta(t) \tag{1-17}$$

应当指出，不仅面积为 1 的矩形脉冲在广义极限下可视为 $\delta(t)$，一些形状很不相同的脉冲，如高斯脉冲、三角脉冲、抽样函数等都可以在一定条件下趋于 $\delta(t)$。这一论断在后面的例题中将予以说明。

离散型：

①单位阶跃序列

$$u[n] = \begin{cases} 0, n < 0 \\ 1, n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-18}$$

②单位抽样序列

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, n \neq 0 \\ 1, n = 0 \end{cases} \tag{1-19}$$

$u[n]$和 $\delta[n]$都是普通函数。$\delta[n]$和 $u[n]$中的自变量 n 可用一般宗量“·”代替，以解决某些序列的变换问题。

关于 $\delta[n]$的若干关系式：

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n] \tag{1-20}$$

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0] \tag{1-21}$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] = \nabla u[n] \tag{1-22}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k] = u[n] \tag{1-23}$$

4. 系统的概念与描述

(1) 系统概念。系统是由一些基本单元（如元件、装置、事物等等）相互联结在一起而实现某特定功能的整体。系统

的这种概念所涉及的范围很宽，组成它的单元可以很简单，也可以很复杂；可以是物理实体（硬件），也可以是非物理实体（软件）。

系统也可以看成是产生信号变换的任一过程，最简单的系统也应有一个输入信号和一个输出信号，系统对输入信号进行某种变换以后而给出输出信号。

系统的这两种定义在本质上是一回事，只是强调的重点有所不同，前者强调系统的组成，后者强调系统的变换功能。因此这两种定义对于理解系统的概念都是有用的。

（2）系统描述。系统最基本的描述方法是联系其输出与输入关系的微分方程或差分方程，前者用于描述连续时间系统，后者用于描述离散时间系统。应该明确，一个微分或差分方程可视为范畴极其广阔的物理过程的数学抽象，因此这些方程是描述了一般化的系统。本课程正是在这个起点上讨论系统的各种分析方法以及信号通过系统引起的变换过程。从这样的认识出发，我们还可以把系统表示为一个有输入端口和输出端口的黑箱，如图 1－2 所示。“黑箱”的意思是其内装的系统看不到，或者说用不着去关心它，我们只需用一种数学方法来描述它的端口间的关系，如前面提到的微分方程或差分方程。学完本书会知道，还有若干其他方法都可用于描述这样的系统。为了书写简洁，有时还利用简单的符号表示系统的输入——输出关系：

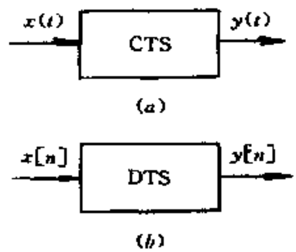

图 1－2

$$x(t) \longrightarrow y(t)\text{（连续系统）}$$
$$x[n] \longrightarrow y[n]\text{（离散系统）}$$

与微分/差分方程描述法紧密相关的另一种表示系统的方法是方框图表示法。对于连续时间系统，由于微分方程描述中包括三种运算，即微分、乘某系数、相加，因此在框图表示中就定义了三种相应的网络单元即微分器、系数倍乘器和加法器，但由于微分器不易于用硬件实现，故一般改用积分器来代替它。对于离散时间系统，其方框图表示基本与连续系统相同，仅积分器被延时器代替，引入延时器是为了完成方程中的差分运算。这样在系统的框图表示中共用到四种基本网络单元：积分器或延时器、系数倍乘器、加法器。以这些基本单元为基础，则根据微分/差分方程所规定的算法，可以构成不同形式的系统框图，如直接Ⅰ型和直接Ⅱ型等。读者不仅要掌握由方程画方框图的过程，还应能从方框图得出微分或差分方程。

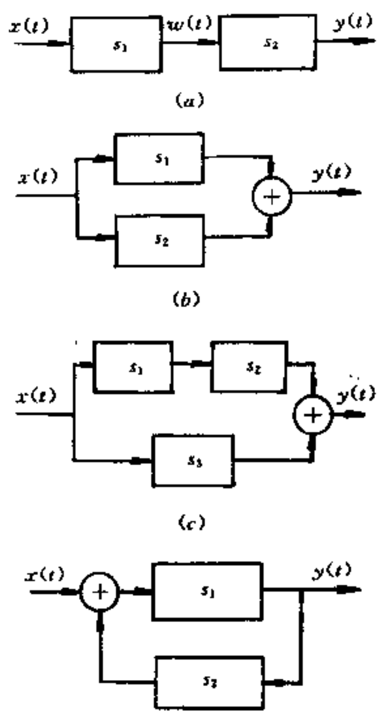

图 1－3

(3) 系统互联。系统相互联结的概念是一个极为重要的概念，因为通过互联使我们可以用基本单元构造一个系统，或从已有的较简单的系统构成新的更复杂的系统，这是综合过程。反之，通