高等学校数学教材配套辅导书

高等数学辅导

（第二次修订本）

同济·高等数学

（上下册合订本配套用书）

主　编　北京大学数学科学学院

邹本腾　漆　毅　王奕倩

总策划　胡东华

科学技术文献出版社

高等数学辅导

同济·高等数学

(上下册合订本配套用书)

主　编　北京大学数学科学学院
　　　　邹本腾　漆　毅　王奕倩
总策划　胡东华

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

前　言

高等数学在各个学科领域中的重要性是有目共睹的。但现在一个越来越突出的矛盾却摆在我们的面前:其一是学生课内外时间的减少;其二是各科后续专业课及考研对高等数学的要求越来越高。如何解决这一矛盾,成为教和学双方共同面临的一个问题。

这本书正是为解决这一问题而精心编写的。在每一节的开头,我们用表格的形式分类列出这一节的主要内容,便于读者把握知识点。对于例题,作者按分类的方式编排,把各种解题的技巧、方法、思路详细介绍给读者。并加了大量的注解,把容易出现的问题指出来,使读者少走弯路。其中加 * 号的内容较难,读者可根据需要自行选择。另外,每章都有一份提纲挈领的知识网络图,还附有最近几年考研真题评析,使读者对研究生入学考试的高等数学题的形式、难度有一定的了解,也便于考研的读者有针对性地复习。在帮助了解把握知识点的同时,我们还设计了同步自测题并配备了相应的答案。

最后,根据读者的需求,我们对全国流行的经典教材——同济大学《高等数学》第四版的习题作了相应的参考答案,以备读者在学习过程中使用。书中错漏不妥之处,欢迎读者批评指正。

编者

2001 年 6 月

学 解题方法

目 录

第一章　函数与极限

在这一章里，我们首先简单复习一下函数的定义、性质和几个常用的初等函数。然后研究序列、函数的极限，这其中包括它们几种情况下的不同定义形式和例题。最后我们讨论函数的连续性，以及如何利用函数的连续性的一些性质证明一些命题。

§ 1.1　函数

1.1.1　考试内容及理解记忆方法

表 1.1.1 函数及相关的定义

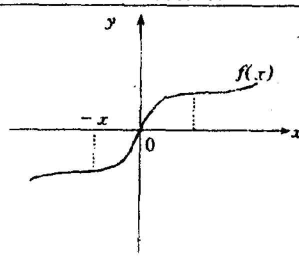
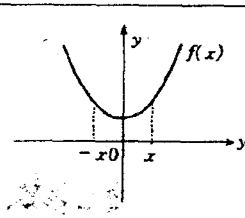
名称	定　义	要点	补充说明
函数	给定集合 X，若存在某种对应规则 f，对于 $\forall x \in X$，存在唯一 $y \in R$ 与之对应，称 f 是从 X 到 R 的一个函数，记作 $y = f(x)$；X 称为定义域，x 称为自变量，y 为因变量。$\{f(x) \mid x \in X\}$ 为值域	对应规则、定义域	
函数的图形	平面上点集 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形		
复合函数	设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域，则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y = f[g(x)]$，称 g 与 f 的复合函数。记作 $y = f[g(x)]$ 或 $y = f \circ g$	对应规则、定义域、值域	结合律成立 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$，但没有交换律，即 $f \circ g \neq g \circ f$

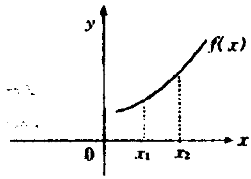
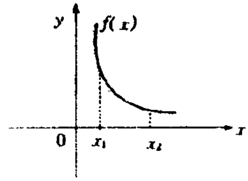
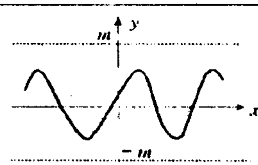
复合函数

续表 1.1.1

名称	定　　义	要点	补充说明
一一对应	设 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 若由 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, 或者由 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的		一一对应的函数把不同的 x 变成不同的 y
反函数	设 $y = f(x)$ 在 X 上是一一对应的, 值域为 Y, $\forall y \in Y$, 用满足 $f(x) = y$ 的唯一确定的 $x \in X$ 与之对应, 由这样的关系所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 就称为原来函数 $y = f(x)$ 的反函数		$f: X \to Y$; $f^{-1}: Y \to X$; $f^{-1}(f) = I_X: X \to X$; $f \circ f^{-1} = I_Y: Y \to Y$; $(f^{-1})^{-1} = f: X \to X$; I_X 表 X 上恒同变换。
初等函数	基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后所得到的函数	有限次复合	

表 1.1.2 函数的几种特性

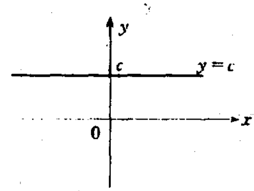
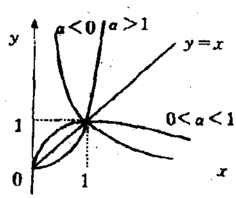
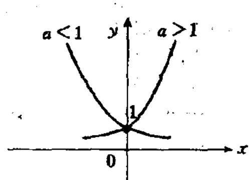
性质	定　　义		图例或说明
奇偶性	奇函数	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x, -x \in X$, 且 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数	
	偶函数	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x, -x \in X$, 且 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数	

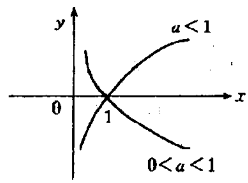
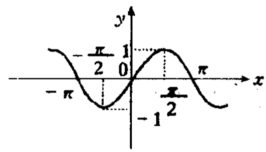
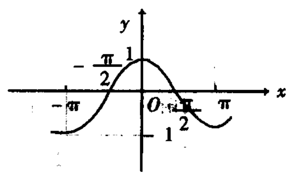
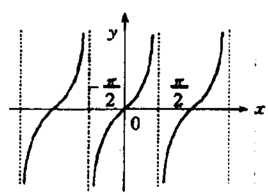
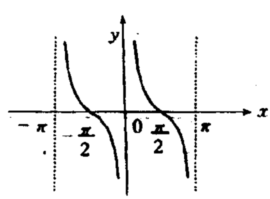
性质	定义		图例或说明
单调性	单调上升(单调递增)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1,x_2\in X$, 由 $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2)$	
	单调下降(单调递减)	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1,x_2\in X$, 由 $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geqslant f(x_2)$	
	若严格不等号成立,则称严格单调上升(下降)		
有界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义,若 $\exists M>0,\forall x\in X$,有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$,(或 $\exists m,M$,使得 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立),则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数		 即函数的图形位于 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间
无界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义,若 $\forall M>0,\exists x'\in X$,使得 $\lvert f(x')\rvert>M$,则称 $f(x)$ 在 X 上无界		例:$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界,因为 $\forall M>0$,取 $x'=\dfrac{1}{3M}$,则 $f(x')=3M>M$

续表 1.1.2

性质	定　义	图例或说明
周期性	函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义，若 $\exists T>0, \forall x \in (-\infty, +\infty)$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数。若在无穷多个周期中，有最小的正数 T，则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期，简称周期	若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 1° $f(x+kT)=f(x)$，(k 为整数)；2° $f(ax+b)(a\neq 0, b\in R)$ 是一个以 $\left\lvert \frac{T}{a} \right\rvert$ 为周期的函数

表 1.1.3 基本初等函数

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x)=C$，$(-\infty<x<+\infty)$。平行于 x 轴，过 $(0, C)$ 点的直线	
幂函数	$y=x^{\alpha}$，$(0<x<+\infty, \alpha\neq 0)$ $\alpha>0$ 时，函数 x^{α} 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升 $\alpha<0$ 时，函数 x^{α} 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降 $y=x^{\alpha}$ 与 $y=x^{\frac{1}{\alpha}}$ 互为反函数	
指数函数	$y=a^{x}(a>0, a\neq 1)$ $a>1$ 时，函数 $y=a^{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格上升 $a<1$ 时，函数 $y=a^{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格下降	

名称	定义式及性质	图例
对数函数	$y=\log_a x(a>0,a\neq 1,0<x<+\infty)$ $a>1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升 $a<1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数。(若 $a=\mathrm{e}$,记 $y=\log_e x$ 为 $y=\ln x$)	
三角函数	正弦函数 $y=\sin x,(-\infty<x<+\infty)$	
	余弦函数 $y=\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x),(-\infty<x<+\infty)$	
	正切函数 $y=\tan x(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$	
	余切函数 $y=\cot x(x\neq k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$	

续表 1.1.3

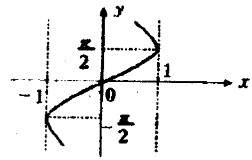
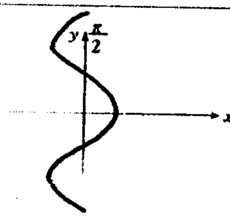
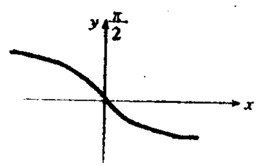
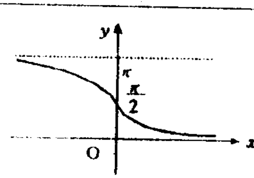
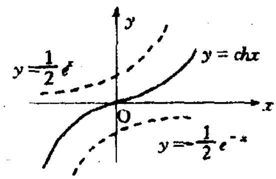
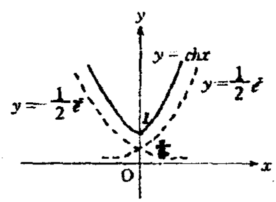
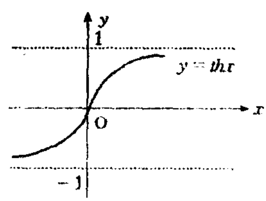
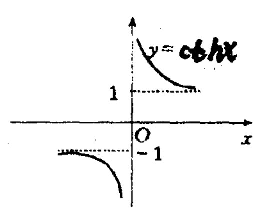
名称	定义式及性质	图例
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$，$(-1\leqslant x\leqslant 1,\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2})$	
	反余弦函数 $y=\arccos x$，$(-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \pi)$	
	反正切函数 $y=\arctan x$，$(-\infty<x<+\infty,\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2})$	
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，$(-\infty<x<+\infty, 0<y<\pi)$	

表 1.1.4 双曲函数

名称	定　　义	图　　形
双曲正弦	$y = \mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	
双曲余弦	$y = \mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	
双曲正切	$y = \mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$	
双曲余切	$y = \mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$	

1.1.2 典型例题解析

例1:判别下列各组函数是否相等

(1) 函数 $f(x)=\frac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$

(2) 函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=|x|$ 与 $h(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

[解题提示] 当且仅当给定的函数,其定义域和对应关系完全相同时,才表示同一函数,否则表示不同的函数。

解:(1) 由于 f 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 g 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,故 $f\neq g$

(2) 由于 f,g,h 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,且对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $f(x)=g(x)=h(x)=|x|$,故 $f=g=h$.

例2:求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{\lg\cos x}$ **的定义域**

[解题提示] 求复杂函数的定义域,就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集

记住下列简单函数的定义域:

$y=\frac{1}{x}$,	$D: x\neq 0, (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$y=\sqrt[2n]{x}$,	$D: x\geqslant 0, [0,+\infty)$
$y=\log_a x$,	$D: x>0, (0,+\infty)$
$y=\tan x$,	$D: x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$
$y=\cot x$,	$D: x\neq k\pi, k\in Z$
$y=\arcsin x$(或 $\arccos x$),	$D: \lvert x\rvert\leqslant 1, [-1,1]$

解:只有 $\sqrt{4-x^2}$, $\lg\cos x$ 同时有意义,且分母不为0的 x 才是 $f(x)$ 的定义域,即

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ 2n\pi-\frac{\pi}{2}<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}, (n=0,\pm 1\cdots)\\ x\neq n\pi\end{cases}$$

上述不等式组的解为$(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$，因此$f(x)$的定义域为$(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$。

例3 设$f(x)=\begin{cases}x^3+4x+1, & \text{当 } x\geqslant 1 \text{ 时},\\ x+2, & \text{当 } x<1 \text{ 时}。\end{cases}$求$f(x+4)$。

解：把$f(x+4)$中，$x+4$作为自变量，代入到$f(x)$的定义式中自变量x的位置，再考查各分段定义域上新的x应满足的条件。当$x+4\geqslant 1$时，也即$x\geqslant -3$；同理，当$x+4<1$时，$x<-3$。

因此，我们有

$$f(x+4)=\begin{cases}(x+4)^3+4(x+4)+1, & \text{当 } x\geqslant -3 \text{ 时},\\ (x+4)+2=x+6, & \text{当 } x<-3 \text{ 时}。\end{cases}$$

例4 设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2。\end{cases}$

求$f\circ g$。

解：$f\circ g(x)=f[g(x)]=\begin{cases}1, & \text{当 } |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & \text{当 } |g(x)|>1,\end{cases}$

先看$|g(x)|\leqslant 1$，显然此时要求$|x|\leqslant 2$，否则与$g(x)=2$矛盾。

$$\Rightarrow\begin{cases}|x|\leqslant 2,\\ |2-x^2|\leqslant 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ \{-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1\}\cup\{1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\},\end{cases}$$

取交集可得$x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]$。

再考查$|g(x)|>1$，其中包含两部分，$\{|g(x)|>1\}\cap\{|x|\leqslant 2\}$或$\{|x|>2\}$，解第一组不等式得

$$\begin{cases}\{-1<x<1\}\cap\{|x|\leqslant 2\}\\ \text{或者}\{\{x<-\sqrt{3}\}\cup\{x>\sqrt{3}\}\}\cap\{|x|\leqslant 2\}。\end{cases}$$

$\Rightarrow x\in[-2,-\sqrt{3})\cup(-1,1)\cup(\sqrt{3},2]$。

解第二组不等式可得$x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$。

综合得当$|g(x)|>1$时，$x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-1,1)\cup(\sqrt{3},+\infty)$，

$$\Rightarrow f\circ g(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}],\\ 0, & \text{当 } x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-1,1)\cup(\sqrt{3},+\infty)。\end{cases}$$

注 一般情况下，我们写区间的并集时，按数轴的顺序，从左到右依次

排列。这样结合数轴，会有一个较直观的印象。

~~例~~5 指出下面两个函数是否有界？

1° $y=\frac{1}{x^2}, a\leqslant x\leqslant 1$，(其中 $0<a<1$)。

2° $y=x\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$。

解：1° 因为 $a\leqslant x\leqslant 1$，所以 $a^2\leqslant x^2\leqslant 1, \Rightarrow 1\leqslant\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{a^2}$，$(0<a<1\Rightarrow\frac{1}{a^2}>1)$，

即 $y=\frac{1}{x^2}$，当 $x\in[a,1]$ 时有界。

2° $\forall M>0$，取 $x=(2[M]+1)\pi$，($[M]$ 表示取 M 的整数部分)，则 $\cos x=-1$。

此时 $|f(x)|=|(2[M]+1)\pi\cos(2[M]+1)\pi|=(2[M]+1)\pi>M$，

$\Rightarrow y=x\cos x$，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时无界。

~~例~~6 求双曲正弦函数 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数。

解：由 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，化简得

$$2y=e^x-\frac{1}{e^x}, \Rightarrow e^{2x}-2ye^x-1=0,$$

解得 $$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}。$$

因为 $e^x>0$，所以取正号，$e^x=y+\sqrt{y^2+1}\Rightarrow x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})\Rightarrow$ 反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$。

~~例~~7 求 $y=\sqrt[3]{x^2+2}$ 的反函数。

解：由 $y=\sqrt[3]{x^2+2}$，得 $y^3-2=x^2, \Rightarrow x=\pm\sqrt{y^3-2}$。

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，反函数为 $y=-\sqrt{x^3-2}$，$(x\geqslant 2^{\frac{1}{3}})$。

当 $x\in[0,+\infty)$ 时，反函数为 $y=\sqrt{x^3-2}$，$(x\geqslant 2^{\frac{1}{3}})$。

~~例~~8 证明 $y=(c^n-x^n)^{\frac{1}{n}}$ 的反函数是它本身，其中 c 是任意常数。

证明：由 $y=(c^n-x^n)^{\frac{1}{n}}$ 可得 $y^n=c^n-x^n$