

等学校数学教材配套辅导书

高等 数学



辅导

(第二次修订本)

同济·高等数学

(上下册合订本配套用书)

主 编 北京大学数学科学学院
邹本腾 漆毅 王奕倩

总策划 胡东华

 科学技术文献出版社

高等数学辅导

同济·高等数学
(上下册合订本配套用书)

主 编 北京大学数学科学学院
邹本腾 漆 毅 王奕倩
总策划 胡东华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

前 言

高等数学在各个学科领域中的重要性是有目共睹的。但现在一个越来越突出的矛盾却摆在我们的面前：其一是学生课内外时间的减少；其二是各科后续专业课及考研对高等数学的要求越来越高。如何解决这一矛盾，成为教和学双方共同面临的一个问题。

这本书正是为解决这一问题而精心编写的。在每一节的开头，我们用表格的形式分类列出这一节的主要内容，便于读者把握知识点。对于例题，作者按分类的方式编排，把各种解题的技巧、方法、思路详细介绍给读者。并加了大量的注解，把容易出现的问题指出来，使读者少走弯路。其中加*号的内容较难，读者可根据需要自行选择。另外，每章都有一份提纲挈领的知识网络图，还附有最近几年考研真题评析，使读者对研究生入学考试的高等数学题的形式、难度有一定的了解，也便于考研的读者有针对性地复习。在帮助了解把握知识点的同时，我们还设计了同步自测题并配备了相应的答案。

最后，根据读者的需求，我们对全国流行的经典教材——同济大学《高等数学》第四版的习题作了相应的参考答案，以备读者在学习过程中使用。书中错漏不妥之处，欢迎读者批评指正。

编者

2001年6月

考研数学

目 录

第一章 函数与极限	(1)
§ 1.1 函数	(1)
§ 1.2 极限	(12)
§ 1.3 函数的连续性	(28)
§ 1.4 无穷小量	(44)
本章知识网络图	(49)
历届考研真题评析	(50)
同步自测题	(54)
同步自测题参考答案	(55)
第二章 导数、微分及应用	(62)
§ 2.1 导数	(62)
§ 2.2 微分与高阶导数	(81)
§ 2.3 导数的应用	(89)
本章知识网络图	(138)
历届考研真题评析	(139)
同步自测题	(152)
同步自测题参考答案	(155)
第三章 不定积分	(173)
本章知识网络图	(197)
历届考研真题评析	(198)
同步自测题	(202)
同步自测题参考答案	(202)
第四章 定积分及其应用	(205)
§ 4.1 定积分的定义与积分方法	(205)
§ 4.2 定积分的应用	(237)
§ 4.3 广义积分	(256)
本章知识网络图	(272)

历届考研真题评析	(213)
同步自测题	(284)
同步自测题参考答案	(286)
第五章 级数	(300)
§ 5.1 数值级数	(300)
§ 5.2 函数项级数	(324)
§ 5.3 幂级数	(333)
§ 5.4 傅立叶级数	(353)
本章知识网络图	(366)
历届考研真题评析	(367)
同步自测题	(372)
同步自测题参考答案	(373)
第六章 空间解析几何	(382)
§ 6.1 向量代数	(382)
§ 6.2 平面和直线	(402)
§ 6.3 空间曲面和曲线	(426)
本章知识网络图	(440)
历届考研真题评析	(441)
同步自测题	(444)
同步自测题参考答案	(445)
第七章 多元函数及其微分学	(446)
§ 7.1 多元函数的极限与连续性	(446)
§ 7.2 偏导数、全微分与微分法	(457)
§ 7.3 多元函数微分学的应用	(474)
本章知识网络图	(485)
历届考研真题评析	(486)
同步自测题	(491)
同步自测题参考答案	(492)
第八章 重积分	(496)
§ 8.1 二重积分	(496)
§ 8.2 二重积分	(517)
§ 8.3 重积分的应用	(531)
本章知识网络图	(537)

历届考研真题评析	(538)
同步自测题	(543)
同步自测题参考答案	(547)
第九章 曲线积分、曲面积分及场论初步	(565)
§ 9.1 第一型曲线积分与第二型曲线积分	(565)
§ 9.2 Green 公式、平面上曲线积分与路径无关的条件	(579)
§ 9.3 曲面积分	(587)
§ 9.4 Gauss 公式与 Stokes 公式及其应用	(599)
§ 9.5 场论初步	(607)
本章知识网络图	(614)
历届考研真题评析	(615)
同步自测题	(623)
同步自测题参考答案	(626)
第十章 常微分方程	(640)
§ 10.1 基本概念	(640)
§ 10.2 初等积分法(I)	(644)
§ 10.3 初等积分法(II)	(654)
§ 10.4 二阶线性微分方程	(664)
§ 10.5 一阶常系数线性微分方程组	(674)
本章知识网络图	(683)
历届考研真题评析	(684)
同步自测题	(694)
同步自测题参考答案	(695)
附录:同济大学《高等数学》第四版习题参考答案	(701)
第一章 函数与极限	
习题参考答案	(701)
总复习题参考答案	(713)
第二章 导数与微分	
习题参考答案	(715)
总复习题参考答案	(732)
第三章 中值定理与导数应用	
习题参考答案	(735)
总复习题参考答案	(746)

第四章 不定积分	
习题参考答案	(748)
总复习题参考答案	(755)
第五章 定积分	
习题参考答案	(758)
总复习题参考答案	(765)
第六章 定积分的应用	
习题参考答案	(769)
总复习题参考答案	(772)
第七章 空间解析几何与向量代数	
习题参考答案	(773)
总复习题参考答案	(780)
第八章 多元函数微分法及其应用	
习题参考答案	(783)
总复习题参考答案	(796)
第九章 重积分	
习题参考答案	(798)
总复习题参考答案	(803)
第十章 曲线积分与曲面积分	
习题参考答案	(805)
总复习题参考答案	(810)
第十一章 无穷级数	
习题参考答案	(811)
总复习题参考答案	(822)
第十二章 微分方程	
习题参考答案	(825)
总复习题参考答案	(836)

第一章 函数与极限

在这一章里,我们首先简单复习一下函数的定义、性质和几个常用的初等函数。然后研究序列、函数的极限,这其中包括它们几种情况下的不同定义形式和例题。最后我们讨论函数的连续性,以及如何利用函数的连续性的一些性质证明一些命题。

§ 1.1 函数

1.1.1 考试内容及理解记忆方法

表 1.1.1 函数及相关的定义

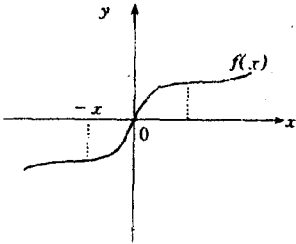
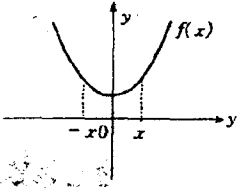
名称	定义	要点	补充说明
函数	给定集合 X , 若存在某种对应规则 f , 对于 $\forall x \in X$, 存在唯一 $y \in R$ 与之对应, 称 f 是从 X 到 R 的一个函数, 记作 $y = f(x)$; X 称为定义域, x 称为自变量, y 为因变量。 $\{f(x) x \in X\}$ 为值域	对应规则、定义域	
函数的图形	平面上点集 $\{(x, f(x)) x \in X\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形		
复合函数	设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域, 则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y = f[g(x)]$, 称 g 与 f 的复合函数。记作 $y = f[g(x)]$ 或 $y = f \circ g$	对应规则、定义域、值域	<u>结合律成立</u> $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, 但没有交换律, 即 $f \circ g \neq g \circ f$

复合函数

续表 1.1.1

名称	定义	要点	补充说明
一一 对应	设 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 若由 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, 或者由 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的		一一对应的函数把不同的 x 变成不同的 y
反函 数	设 $y = f(x)$ 在 X 上是一一对应的, 值域为 Y , $\forall y \in Y$, 用满足 $f(x) = y$ 的唯一确定的 $x \in X$ 与之对应, 由这样的关系所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 就称为原来函数 $y = f(x)$ 的反函数		$f: X \rightarrow Y$; $f^{-1}: Y \rightarrow X$; $f^{-1}(f) = I_X: X \rightarrow X$; $f \circ f^{-1} = I_Y: Y \rightarrow Y$; $(f^{-1})^{-1} = f: X \rightarrow X$; I_X 表 X 上恒同变换。
初等 函数	基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后所得到的函数	有限次 复合	

表 1.1.2 函数的几种特性

性质	定义	图例或说明
奇偶性	奇函数 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x, -x \in X$, 且 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数	
	偶函数 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x, -x \in X$, 且 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数	

续表 1.1.2

性质	定义	图例或说明
单调性	单调上升(单调递增) 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	
	单调下降(单调递减) 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	
若严格不等号成立, 则称严格单调上升(下降)		
有界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, 若 $\exists M > 0, \forall x \in X$, 有 $ f(x) \leq M$, (或 $\exists m, M$, 使得 $m \leq f(x) \leq M$ 成立), 则称 函数 $f(x)$ 在 X 上是有 界函数	<p>即函数的图形位于 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间</p>
无界性	函数 $f(x)$ 在 X 上定义, 若 $\forall M > 0, \exists x' \in X$, 使得 $ f(x') > M$, 则称 函数 $f(x)$ 在 X 上无界	例: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界, 因为 $\forall M > 0$, 取 $x' = \frac{1}{3M}$, 则 $f(x') = 3M > M$

续表 1.1.2

性质	定义	图例或说明
周期性	<p>函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义, 若 $\exists T > 0, \forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数。若在无穷多个周期中, 有最小的正数 T, 则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期, 简称周期</p>	<p>若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 1° $f(x+kT) = f(x)$, (k 为整数); 2° $f(ax+b)$ ($a \neq 0, b \in \mathbb{R}$) 是一个以 $\frac{T}{a}$ 为周期的函数</p>

表 1.1.3 基本初等函数

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x) = C, (-\infty < x < +\infty)$ 。平行于 x 轴, 过 $(0, C)$ 点的直线	
幂函数	$y = x^a, (0 < x < +\infty, a \neq 0)$ $a > 0$ 时, 函数 x^a 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升 $a < 0$ 时, 函数 x^a 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降 $y = x^a$ 与 $y = x^{\frac{1}{a}}$ 互为反函数	
指数函数	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ $a > 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格上升 $a < 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格下降	

名称	定义式及性质	图例
对数函数	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1, 0 < x < +\infty)$ $a > 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升 $a < 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 互为反函数。(若 $a = e$, 记 $y = \log_e x$ 为 $y = \ln x$)	
三角函数	正弦函数 $y = \sin x, (-\infty < x < +\infty)$	
	余弦函数 $y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x), (-\infty < x < +\infty)$	
	正切函数 $y = \tan x (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	
	余切函数 $y = \cot x (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	

续表 1.1.3

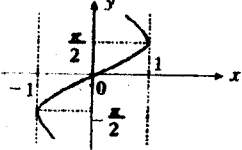
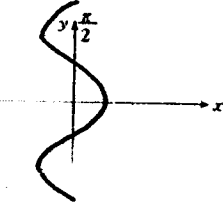
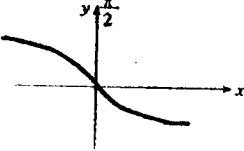
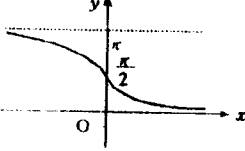
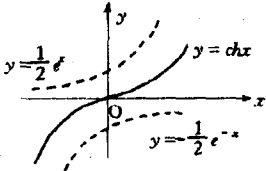
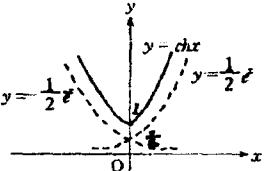
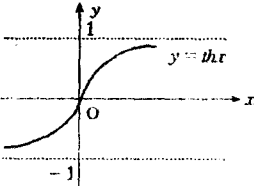
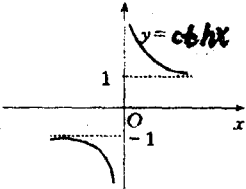
名称	定义式及性质	图例
	反正弦函数 $y = \arcsin x$, $(-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$	
	反余弦函数 $y = \arccos x$, $(-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi)$	
反三角函数	反正切函数 $y = \arctan x$, $(-\infty < x < +\infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$	
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$, $(-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi)$	

表 1.1.4 双曲函数

名称	定 义	图 形
双曲正弦	$y = \operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	
双曲余弦	$y = \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	
双曲正切	$y = \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$	
双曲余切	$y = \operatorname{cth}x = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$	

1.1.2 典型例题解析

例1: 判别下列各组函数是否相等.

(1) 函数 $f(x) = \frac{x}{x}$ 与 $g(x) = 1$

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$ 与 $h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

【解题提示】 当且仅当给定的函数, 其定义域和对应关系完全相同时, 才表示同一函数, 否则表示不同的函数.

解: (1) 由于 f 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 g 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 故 $f \neq g$

(2) 由于 f, g, h 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 且对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 均有 $f(x) = g(x) = h(x) = |x|$, 故 $f = g = h$.

例2: 求 $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{\lg \cos x}$ 的定义域

【解题提示】 求复杂函数的定义域, 就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集

记住下列简单函数的定义域:

$$y = \frac{1}{x}, \quad D: x \neq 0, (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$y = \sqrt[2y]{x}, \quad D: x \geq 0, [0, +\infty)$$

$$y = \log_a x, \quad D: x > 0, (0, +\infty)$$

$$y = \tan x, \quad D: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$$

$$y = \cot x, \quad D: x \neq k\pi, k \in Z$$

$$y = \arcsin x \text{ (或 } \arccos x), \quad D: |x| \leq 1, [-1, 1]$$

解: 只有 $\sqrt{4-x^2}$, $\lg \cos x$ 同时有意义, 且分母不为0的 x 才是 $f(x)$ 的定义域, 即

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0, \\ \cos x > 0, \\ \cos x \neq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ 2n\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}, (n = 0, \pm 1 \cdots) \\ x \neq n\pi \end{cases}$$

上述不等式组的解为 $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$, 因此 $f(x)$ 的定义域为 $(-\frac{\pi}{2},$

$0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ 。

例3 设 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 4x + 1, & \text{当 } x \geq 1 \text{ 时,} \\ x + 2, & \text{当 } x < 1 \text{ 时.} \end{cases}$ 求 $f(x+4)$ 。

解: 把 $f(x+4)$ 中, $x+4$ 作为自变量, 代入到 $f(x)$ 的定义式中自变量 x 的位置, 再考查各分段定义域上新的 x 应满足的条件。当 $x+4 \geq 1$ 时, 也即 $x \geq -3$; 同理, 当 $x+4 < 1$ 时, $x < -3$ 。

因此, 我们有

$$f(x+4) = \begin{cases} (x+4)^3 + 4(x+4) + 1, & \text{当 } x \geq -3 \text{ 时,} \\ (x+4) + 2 = x + 6, & \text{当 } x < -3 \text{ 时.} \end{cases}$$

例4 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 2, \\ 2, & |x| > 2. \end{cases}$

求 $f \circ g$ 。

$$\text{解: } f \circ g(x) = f[g(x)] = \begin{cases} 1, & \text{当 } |g(x)| \leq 1, \\ 0, & \text{当 } |g(x)| > 1, \end{cases}$$

先看 $|g(x)| \leq 1$, 显然此时要求 $|x| \leq 2$, 否则与 $g(x) = 2$ 矛盾。

$$\Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 2, \\ |2 - x^2| \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ \{-\sqrt{3} \leq x \leq -1\} \cup \{1 \leq x \leq \sqrt{3}\}, \end{cases}$$

取交集可得 $x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$ 。

再考查 $|g(x)| > 1$, 其中包含两部分, $\{|g(x)| > 1\} \cap \{|x| \leq 2\}$ 或 $\{|x| > 2\}$, 解第一组不等式得

$$\begin{cases} \{-1 < x < 1\} \cap \{|x| \leq 2\} \\ \text{或者 } \{\{x < -\sqrt{3}\} \cup \{x > \sqrt{3}\}\} \cap \{|x| \leq 2\}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in [-2, -\sqrt{3}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{3}, 2].$$

解第二组不等式可得 $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ 。

综合得当 $|g(x)| > 1$ 时, $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$,

$$\Rightarrow f \circ g(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}], \\ 0, & \text{当 } x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{3}, +\infty). \end{cases}$$

注 一般情况下, 我们写区间的并集时, 按数轴的顺序, 从左到右依次

排列。这样结合数轴,会有一个较直观的印象。

例5 指出下面两个函数是否有界?

1° $y = \frac{1}{x^2}, a \leq x \leq 1$, (其中 $0 < a < 1$)。

2° $y = x \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$ 。

解:1° 因为 $a \leq x \leq 1$, 所以 $a^2 \leq x^2 \leq 1, \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{a^2}, (0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} > 1)$,

即 $y = \frac{1}{x^2}$, 当 $x \in [a, 1]$ 时有界。

2° $\forall M > 0$, 取 $x = (2[M] + 1)\pi$, ($[M]$ 表示取 M 的整数部分), 则 $\cos x = -1$ 。

此时 $|f(x)| = |(2[M] + 1)\pi \cos(2[M] + 1)\pi| = (2[M] + 1)\pi > M$,
 $\Rightarrow y = x \cos x$, 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时无界。

例6 求双曲正弦函数 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 的反函数。

解:由 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, 化简得

$$2y = e^x - \frac{1}{e^x}, \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,$$

解得 $e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$ 。

因为 $e^x > 0$, 所以取正号, $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \Rightarrow$

反函数为 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 。

例7 求 $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}$ 的反函数。

解:由 $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}$, 得 $y^3 - 2 = x^2, \Rightarrow x = \pm \sqrt{y^3 - 2}$ 。

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 反函数为 $y = -\sqrt{x^3 - 2}, (x \geq 2\frac{1}{3})$ 。

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, 反函数为 $y = \sqrt{x^3 - 2}, (x \geq 2\frac{1}{3})$ 。

例8 证明 $y = (c^n - x^n)^{\frac{1}{n}}$ 的反函数是它本身, 其中 c 是任意常数。

证明:由 $y = (c^n - x^n)^{\frac{1}{n}}$ 可得 $y^n = c^n - x^n$