音乐物理学导论

唐　林　张永德　陶纯孝

中国科学技术大学出版社

音乐物理学导论

唐　林　张永德　陶纯孝

中国科学技术大学出版社
1991・合肥

内 容 简 介

本书尽量用通俗的语言致力于阐述音乐中的物理学，作者试图在音乐王国与物理世界之间架起一座桥梁，读者可以从这种思路、方法和努力中获得有益的启示，全书共八章，前两章分别介绍物理和音乐基础，以后四章对各类乐器及声乐作了物理分析，第七章介绍了音乐厅声学，最后一章从物理学的角度对音乐心理学的一些重要问题作了探讨。

本书内容新颖、资料翔实、通俗易懂、适合广大高等学校师生、科技人员、音乐工作者、中学教师以及一切爱好音乐或物理的读者阅读参考。

音乐物理学导论

唐林　张承德　陶纯孝

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号　邮政编码：230026）

安徽省金寨县印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

开本：850×1168/32　印张：8　插页：1　字数：207千

1991年12月第1版　1991年12月第1次印刷

印数　1—3000册

ISBN7-312-00311-7/O·101

〔皖〕第08号　定价：4.50元

前　言

音乐与物理，看起来她们彼此远离得象是地球的两极，但实在象是哑铃的两端，回旋跳荡在人类生活中，离开得并不象表面看来那么远。音乐，由感觉和激情出发，通过听觉的感受，追求心理的情感美；物理，则从实验和理性出发，通过逻辑的论证，去揭示理性的力量美。正如音乐无处不在一样，物理学也无处不在。当然，她们本身也就有对方的渗入。

本书的目的是向读者阐明，音乐中无处不渗透着物理，而在叙述这些物理时，又结合着音乐。之所以可能做到这一点，是因为音乐不仅仅是一种通过听觉获得情感共鸣的过程，一种心理领受的过程，同时也是一种自然现象，在一定程度上、在某些侧面也必定受着自然界中物理规律的支配。不仅音乐三要素：节奏、旋律、和声里有物理，在对这些要素进行伟大创造的艺术溶合里更有物理。然而，就我们个人而言，由于任务艰巨，也由于时间仓促和学识所限，能否建造好两者之间的桥梁，实现哑铃两端之间的“心有灵犀一点通”，实不敢自信。诚如苏东坡先生所言：“论事易、作事难；作事易，成事难”。我们惟愿将这本书作为引玉之砖，奉献给读者诸君。但愿诸君闲读本书时，多少能有一点收益，我们也就得到了慰籍。

本书初稿曾在中国科技大学讲授过，经过很大的扩充、修改和整理成为现在的样子。其中，第三、四、五章及第六章一部分由唐林起草；第一、七、八章和第二章第一节由张永德起草；第二章的第二节和第六章的一部分由陶纯孝起草。经过相互校阅修改后，最后由陶纯孝对全稿的音乐问题作了校勘。

在写作过程中，作者们曾得到一些前辈的关心爱护，许多同辈

好友的支持帮助。钱临照先生的热忱关怀、马大猷先生的有益指教并慷慨借给有关音乐建筑的资料，都使作者得到不少教益，增强了信心。伍小平教授阅读了全部书稿，提出许多宝贵意见。项端祈先生提供音乐厅声学的部分资料并校阅了音乐厅声学初稿，提出不少重要建议。孙玉温教授仔细校阅了第八章初稿。和林耀基教授、刘光泗副教授的讨论对作者很有帮助。叶云秀副教授和肖旭东博士自海外寄来不少资料和照片。对以上的关心、爱护、支持和帮助，作者表示真挚的谢意。

唐 林 张永德 陶纯孝

1990年10月

目　录

第一章 物理基础

本章简要叙述与音乐有关的基本物理知识。它们主要是关于振动、弹性波、声波及其传播、阻抗匹配等普通物理知识。至于弦、空气柱、杆、板和膜振动的进一步知识将在以后相应章节叙述。

1.1 振　　动

1. 振动的概念

广义地说，物理学中振动概念的含义是：任意一个物理量(物体位置、电流强度、电压、温度、物质密度、电场强度、……)随时间的推移围绕它的某一数值作往返式的变化，便称之为关于这个物理量的振动，有时也称振荡。比如，人们发声时声带位置振动、拨动后琴弦位置的振动、风吼中树枝的擅动等等，这些是关于位置的振动；交流电压变化、声波传播时空间某一小体积内空气密度的波动、电路中电流强度的变化等等，这是不同于位置的另一些物理量的振动。本书只涉及杆、板以及张紧的弦、膜上每点的位置振动，还有管中空气柱的密度振动。

这里要强调指出，按傅里叶展开理论，凡是周期性的振动，即随时间变化的物理量 $f(t)$ 是时间 t 的周期函数(周期为 T)，

$$f(t+T)=f(t) \tag{1-1}$$

对 $f(t)$ 作傅里叶分析时将会发现，$f(t)$ 是由一系列振幅虽然可能各异，但频率却是等间距的简谐振动组成

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \tag{1-2}$$

这里 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu$ 通常称为圆频率，而 ν 称为频率(为简单，下面常将 ω 和 ν 都称为频率)。各分量的振幅由下式决定

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{1-3}$$

如果 $f(t)$ 不是 t 的周期函数，便不能由等间距频率的简谐振动所组成，一般都应展开成连续谱的傅里叶积分的形式。

2. 简谐振动

简谐振动是物体在弹性恢复力作用下所进行的最简单的周期运动。弹性恢复力的特征是力的大小和被其作用的物体的位移成正比，力的方向则指向被作用物体的平衡位置。最简单的例子是和物体相连的弹簧施给物体的力。这时描述物体运动的微分方程为

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \tag{1-4}$$

这里 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$，$k$ 为弹簧的弹性系数，m 为物体的质量。方程的解为

$$x(t)=x_0e^{\pm i\omega t+i\alpha} \tag{1-5}$$

x_0 为实数振幅，α 是初位相，它们由初始条件决定。(1-5)式的实部和虚部可分别随意使用。

其实，自然界的力本来都是非线性变化的，只在一定条件下可将其看成线性变化。比如，对于平衡值附近的小扰动、小振动、小摆动、小变化、小变形、小涨落，可将作用在物体(物体系)上的力 $f(x)$ 在平衡参量 x_0 附近作泰勒级数展开：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots\cdots \tag{1-6}$$

由于位移 $(x-x_0)$ 是小量，略去含 $(x-x_0)^2$ 及更高阶的小量，于是力 $f(x)$ 便成了线性函数，其变化和偏离 $(x-x_0)$ 成正比；而如果

$f'(x_0)<0$，便是恢复力，这便成为常说的准弹性力。通常，当弹簧的压缩或伸长过大，超过了弹簧的弹性极限，虎克定律便不再成立，力和位移不再成正比，出现了非线性的成份。再比如，一个复摆，如图 1-1 所示，当它摆角较小，重力的分力 $mg\sin\varphi\approx mg\varphi$ 时，它的摆动方程才为

$$\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0 \qquad (1\text{-}7)$$

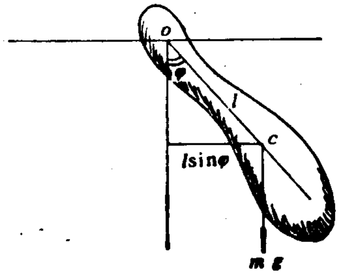

图 1-1 复摆

这里 $\omega=\sqrt{\dfrac{mgl}{I}}$，$I$ 为复摆绕定点 o 的转动惯量。显然这也是一个简谐振动方程，只是将 (1-4) 中的位置替换为摆角。由此可以抽象出一个概念：一个振动体系（准确说，是这个体系中的某个物理量），它在弹性力或准弹性力的作用下，进行着简单的谐振动，便称这个物体系（关于这个物理量）为一个谐振子。

当物体位置作简谐振动时，它的动能和势能时刻都在相互转化着。比如复摆，当它摆到最大偏角时，动能已全部转化为势能；而当朝下摆动，通过垂直位置的一刹那，全部可以转化的势能都转化成为动能。可以证明，在一个往返，即一个振动周期内，平均的动能和平均的势能相等，并等于总能量的一半。

另外，对于用弹簧相连的两个物体 m_1 和 m_2 的耦合简谐振动，通过分离它们的质心坐标和相对坐标，结果表明：对于相对坐标，可用折合质量 $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_2+m_2}$ 将问题转化为上述单体的简谐振动。

3. 阻尼振动

如果物体除受弹性力作用之外，还受到阻尼力的作用，这时的振动称为阻尼振动。阻尼力的典型特征是（系数 $\gamma>0$）：

$$f = -\gamma\dot{x} \tag{1-8}$$

就是说，力的数值和物体运动的速率成正比，但方向与运动方向相反。这时运动方程为

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1-9}$$

若以阻尼弹簧振子为例，$\beta = \dfrac{\gamma}{2m}$，$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$。$\beta$ 称为阻尼因子，代表阻尼力的作用。按 β（相对于ω_0来说）的大小，这个方程可以分三种情况求解：小阻尼 $\beta < \omega_0$；临界阻尼 $\beta = \omega_0$；大阻尼 $\beta > \omega_0$。但不论β数值大小，由于它的存在，振动的振幅均含衰减指数 $e^{-\beta t}$，并最终使振动停止。对于小阻尼情况，可以验算，(1-9) 式的解为

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) \tag{1-10}$$

这里 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$，$A_0$ 和 α 是由初始条件决定的常量。这个解显然代表了包络曲线是负指数的衰减振动。

从能量观点来看，阻尼振子一直在克服摩擦力作功，使自已的总机械能单调减少，减少的数值等于克服阻尼力作的功。

4．受迫振动

上面所说的简谐振动和阻尼振动的运动方程都是二阶线性齐次方程。如果物体除受到（准）弹性力和阻尼力的作用外，还受到一个周期性外力（称为强迫力）的作用，这时产生的振动称为受迫振动。设外力为

$$f(t) = F_0 \cos \omega' t$$

则物体的运动方程为

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega' t \tag{1-11}$$

这里 $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$。实际上这仍然是个牛顿第二定律的方程，不过它和(1-4)、(1-9)不同，现在是非齐次的。此方程的通解为：

$x(t) =$ 相应的齐次方程(1-9)的通解

+此非齐次方程的一个特解

方程(1-9)的通解能分三种情况求得。至于一个特解，可以指出它为

$$B\cos(\omega' t+\phi)$$

这里

$$\begin{cases} B=\dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega'^2)^2+4\beta^2\omega'^2}} & \text{(1-12}a\text{)} \\ \operatorname{tg}\phi=\dfrac{2\beta\omega'}{\omega'^2-\omega_0^2} & \text{(1-12}b\text{)} \end{cases}$$

于是，对小阻尼的受迫振动，通解为：

$$x(t)=A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha)+B\cos(\omega' t+\phi) \tag{1-13}$$

由此式可以看出，当时间足够长之后，第一项将消失，只剩下代表强迫振动的第二项：

$$x(t)\xrightarrow{t\to\infty}B\cos(\omega' t+\phi) \tag{1-14}$$

下面对此稍作讨论。

当 $\omega'\to\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ 时，由方程(1-12a)表示的 B 趋于最大值。在一般的受迫振动中，这种当强迫力的频率达某些值时，受迫振动振幅达极大值的现象，称为共振现象。这时，方程(1-14)中

$$\begin{cases} \omega'\to\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} & \text{(1-15}a\text{)} \\ B\to B_r=\dfrac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} & \text{(1-15}b\text{)} \end{cases}$$

由后面相应章节的叙述知道，乐器中广泛使用了共振现象。值得指出的是，若将共振振幅写为

$$B_r=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_r^2+\beta^2}} \tag{1-16}$$

于是当阻尼 $\beta\to0$，$\omega_r\to\omega_0$ 时，$B_r\to\infty$。换句话说，当阻尼够小时，若外界周期性强迫力的频率 ω' 接近或等于系统的固有频率 ω_0 时，系统会发生共振现象。而小阻尼的存在将使共振频率数值发生少许移动，并且当 β 减小时，B_r 增大。于是，从(1-15)式可知，如果想避免不需要的共振(或避免发生尖锐的共振)，可以加大阻

尼(使 B_r 下降)；也可以改变 ω'，使之远离 ω_r；如不能改变 ω'，可通过加固(振动着的电机的)基座、增加振动板厚度等措施改变 ω_0(或 ω_r)使之离开 ω' 并减小 B_r。若 β 很大，此时(1-13)式不合适，但(1-14)式依然成立。于是，当

$$2\beta^2 \geqslant \omega_0^2 \tag{1-17}$$

时，由于 ω_r 不存在，不会发生共振现象。但是，由于实际物理系统的固有频率 ω_0(或 ω_r)常常不止一个，在某个 ω_0 附近(由于相应的 β 大而)不发生共振并不意味着在另外的 ω_0'(或 ω_r')处不发生共振。

另外，由(1-12b)式可知，当 ω' 从 0 变到 $+\infty$ 时，ϕ 的取值在第三、四两象限。就是说，ϕ 取值区间为$[0, -\pi]$。因此，稳定的受迫振动总是"落后"于强迫力振动。

最后，谈谈受迫振动的能量分析。通过对(1-11)式乘以 $m\dot{x}$ 并在一个周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega'}$ 内对时间积分的办法，不难证明：在受迫振动稳定之后，体系的总能量在每个周期内的平均值保持不变。这时体系不断从外加的强迫力那里吸取能量用于克服阻尼力的耗散。与此同时，由于稳定振动时的频率 $\omega' \neq \omega_0$，所以体系的总机械能并不守恒而是随时间呈周期性变化。

5. 振动的迭加或合成

这里按频率是否相同、振动方向是平行还是垂直，区分为四种情况：

1) 两个频率相同而且振动方向也相同的振动叠加

这时

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

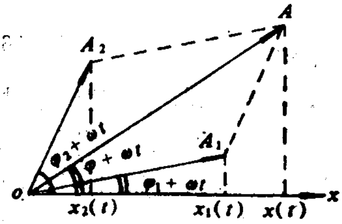

图 1-2　同频率同方向振动迭加

叠加的结果可用图 1-2 的矢量叠

加办法求得。这时，整个平行四边形 OA_2AA_1 绕 O 以 ω 旋转，故 A 点在 x 轴上的投影仍为简谐运动。

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (1\text{-}18)$$

这里

$$\begin{cases} A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} & (1\text{-}19a) \\ \mathrm{tg}\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2} & (1\text{-}19b) \end{cases}$$

2）两个频率相同但振动方向相互垂直的振动合成

这时

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}(t)&=\{x(t),y(t)\}\\&=\{A_1\cos(\omega t+\varphi_1),A_2\cos(\omega t+\varphi_1-\delta)\}\end{aligned}$$

这里 δ 为两个振动的相位差。合成结果，$\boldsymbol{\rho}(t)$ 的端点随时间的流逝画出一个椭圆（或直线），例如图 1-3。

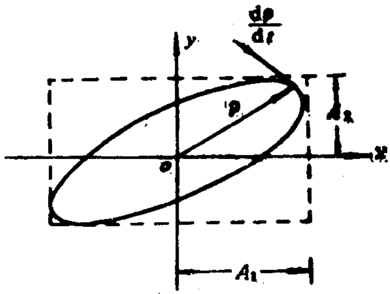

图 1-3　同频率但振动方向相互垂直的振动合成

关于合成振动的轨迹形状和其旋转方向，这里给出一个简易判断准则。可以证明：轨迹上动点的矢径 $\boldsymbol{\rho}$ 在单位时间内扫过的面积（面积速率）是一常数。因为，不计 $\frac{1}{2}$ 因子，面积速度为：

$$\left(\boldsymbol{\rho}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right)=\{0,0,x\dot{y}-y\dot{x}\}=\{0,0,A_1A_2\omega\sin\delta\} \qquad (1\text{-}20)$$

于是，当

$$\begin{cases}\sin\delta>0, & 0<\delta<\pi, & \text{椭圆，逆时针转动（如图1-3所画）}\\ \sin\delta<0, & -\pi<\delta<0, & \text{椭圆，顺时针转动}\\ \sin\delta=0, & \delta=0,\pm\pi, & \text{线振动}\end{cases}$$

其中