文都教育考研精品系列

2005

考研数学复习大全

（理工类）

主　编：蔡子华
副主编：韩於羹　曾祥金　童　武

现代出版社

2005年

考研数学复习大全(理工类)

主　编:蔡子华

副主编:韩於羹　曾祥金　童武

策　划:文都考研信息中心

现 代 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习大全 理工类/蔡子华编. 一北京:
现代出版社,2004.2
(学习战略丛书)
ISBN 7－80188－213－x

Ⅰ.考... Ⅱ.蔡... Ⅲ.高等数学一研究生一入学考试一自学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 008107 号

编　　者:蔡子华
责任编辑:张俊国
出版发行:现代出版社
地　　址:北京市安定门外华安里 504 号
邮政编码:100011
电　　话:010－64267325　64240483(传真)
电子邮箱:xiandai@cnpitc.com.cn
印　　刷:北京长阳汇文印刷厂
开　　本:787×1092 毫米 1/16
印　　张:34.875
版　　本:2004 年 2 月第 1 版　　2004 年 2 月第 1 次印刷
印　　数:1－6000 册
书　　号:ISBN 7－80188－213－x
定　　价:45.00 元

考研数学精品名师简介

蔡子华

全国著名考研数学辅导专家，连续五年担任研究生入学考试数学阅卷组组长。蔡老师从事考研辅导工作十几年，熟悉考生的弱点和考试的难点，深谙命题规律和重点，授课针对性极强，效果卓著。同时蔡子华老师更以能全程讲授微积分、线代、概率并能融会贯通和押题精准而闻名。

韩於羹

北京航空航天大学数学系教授，具有多年考研辅导经验。“从来不需要想起，永远也不会忘记”，是韩老师的经典名句，他诙谐幽默却又不失生动技巧的讲课方式使你对数学的兴趣猛增，从更深，更广泛的层面去理解数学，掌握数学，从而顺利渡过考研难关。

曾祥金

著名考研辅导专家，数学系博士生导师，长期参与研究生考试的命题研究、辅导及阅卷工作。全国经济博弈论专业委员会常务理事，主持或参与了多项国家级科学研究基金资助项目以及多项教学研究项目，并有多项成果获奖励。

童　武

著名考研辅导专家，首都师范大学教授、北京大学客座教授。以全程讲解微积分、线性代数、概率论与数理统计而著称考研数学界。其从事考研辅导数十年。足迹遍及华夏，桃李广布九州，授课上一直倡导“在课堂上解决问题”，其解题方法独特，记忆方法更是令人叫绝，受到广大学员的一致好评。

前　　言

经常有学生在考研复习班上问："为什么历年全国硕士研究生入学统一考试的数学试题那么难?"如果从结果来看，的确如此。

从 1997 年到 2003 年 7 年中四类 28 份试卷的考试平均成绩（以总分为 100 分计）来看，平均分在 45 分及以下的有 7 份，45 分以上、50 分（含 50 分）以下的有 11 份，50 分以上的仅 9 份，也就是说，占 69% 的试卷考试结果得分偏低，特别是还有平均分 37.2 分（数一 1998 年和 2001 年的试卷）的试卷。从表面上看试卷是太难了。但深入地进行分析，除了少数部分确属难题外，造成得分率低还有以下几个原因：

1. 考生对概念的掌握不牢固，对基本概念和基本理论停留在记忆层面（有的考生甚至不知道考试大纲规定的内容）理解不透彻，如：

例 1：设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数

答案是 A。只要掌握了函数的奇偶性、周期性、单调性的定义及 $f(x)$、$F(x)$ 的这些特性的关系，题目的结论是显然的，这个题是 1999 年数一、二、三、四试卷中的考题，难度值为 0.19（所谓难度值即为该题的得分率）。

类似的重在考察基本概念和基本理论的题目在 2004 年数一、数二中再次出现，不同的是，考察方式更为灵活，如：

例 2：设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$

只要弄懂 $f'(0)$ 的定义，本题的答案 C 是显而易见的。

例 3：设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数。

(1) 试将 $x=x(y)$ 满足的微分方程

$\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程

(2) 求变换后的微分方程满足初给条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$ 的特解。

分析：此题求解的关键是求 $\frac{d^2x}{dy^2}$，求解过程需要用到反函数和复合函数求导法

正确解法是：$\because \frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$

$$\therefore \frac{d^2x}{dy^2}=(\frac{1}{y'})'_y=-\frac{(y')'_y}{(y')^2}=-\frac{(y')'_x x'_y}{(y')^2}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

而不少考生作成

$\frac{d^2x}{dy^2}=(\frac{1}{y'})'=-\frac{y''}{y'^2}$,(更有的考生连$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$都不知道)

因是机械地使用求导数法则,而不理解 y'、y''的含义,做错题目就不难理解了。

此题是 2003 年,数一、数二试卷中的考题,难度值分别为 0.308(数一)和 0.299(数二)。

可见概念不清,理解不深,即使题目简单,得分率也不高。

2. 考生对重要的数学法则理解不深,应用不当。如有的考生在求极限时,只要是未定式,不管三七二十一就使用洛必达法则,如:

例 4:求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$。

解:此题为$\frac{\infty}{\infty}$型未定式,令 $x=-t$,则

$$原式=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4t^2-t-1}-t+1}{\sqrt{t^2-\sin t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{\sin t}{t^2}}}=1$$

而盲目使用洛必达法则

$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x-1}}}{\frac{2x+\cos x}{2\sqrt{x^2+\sin x}}}则往下无法进行运算。$$

本题是 1997 年数学二的试题,最基本的计算题,难度值仅为 0.45。

例 5:设函数 $f(x)$连续,$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$ 且$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$.($A$ 为常数),求 $\varphi'(x)$并讨论 $\varphi'(x)$在 $x=0$ 处的连续性。

$$解:\varphi'(x)=\begin{cases}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2} & x\neq0 \\ \frac{A}{2} & x=0\end{cases}\quad(过程省略)$$

在研究 $\varphi'(x)$的连续性求$\lim\limits_{x\to0}\varphi'(x)$时,不少考生采用洛必达法则为

$$\lim_{x\to0}\varphi'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)+f(x)-f(x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}f'(x)=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{A}{2}$$

这种不管场合,不问条件乱用洛必达法则的现象,在历年考生的答卷中屡见不鲜。

本题是 1997 年数一、数二的考题，难度值为 0.31，其发生的错误主要集中在不知由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，可得到 $f(0)=0$，$f'(0)=A$，及乱用洛必达法则上，可见不深刻理解概念和法则，必然导致求解错误。

除以上两点外，相当多的考生不注意进行建立数学模型的训练，导致大部分应用题得分率都不高。

造成以上结果的主要原因是考生不注意强化三基（基本概念、基本原理与基本解题方法）而在复习的过程中陷入题海中，盲目地做一些偏题怪题而不能自拔使得在考试中概念模糊，解题方法生搬硬套，终致考试失败。

有鉴于此，作为多年从事考研数学辅导和参与阅卷工作的老师，觉得有必要将自己的心得和体会融化到自己的著作中去，引导考生采用正确的复习方法，狠抓三基，最终取得考研的成功。

本书的特点是：

一、完全按照全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》的要求编写，无超纲内容。

二、在内容提要中简述了考试必备的概念和理解这些概念应注意的问题，扫清知识中的盲点，牢固掌握各种知识点，彻底通晓它们之间的内在联系，确保考生能够将其融会贯通。

三、突出重点，集中再现近几年的考试重点，带着这些知识点进入"典型例题解析"。在典型例题解析中，对各类基本解题方法进行归纳、总结，使之条理化、系统化。对一些较难的题做到前有分析，后有总结使考生在例题的引导下深刻理解概念，突破难点。对各类重要类型题，本书都作了系统归纳，并给出一些独特解法，便于考生举一反三，融会贯通。

四、针对考生难于将数学知识应用到实践中去的现状，本书编有大量的应用题，引导考生掌握建立数学模型的基本方法，提高考生解决实际问题的能力。

五、对各类主要类型题，本书都作了系统归纳，并给出了一些独特解法，便于考生举一反三，融会贯通。

六、本书所选例题具有广泛的代表性，难度和历年试题相当，力求摒弃偏题与怪题。

七、本书每章都附有大量练习题，并在书后给出答案，便于考生检验解题是否正确。

八、为了沟通各学科知识之间的联系，本书的第四部分给出了综合解题，引导考生学会运用数学知识求解综合题。

数学考试科目自 2003 年调整后，数学学科成绩对总分提高及其影响效果再一次得到了印证和突出。这一方面是由于数学学科的特点，另一方面，数学教育本质上是一种素质教育，它最符合现在硕士研究生入学考试的选拔性质，希望广大考生首先要明白这一点，及早准备，在复习过程中，循序渐进、踏踏实实、心态平和、力戒浮躁。

参与本书编写的还有韩於羹老师、曾祥金老师、樊启斌老师，在本书的编写过程中，文都考研信息中心做了大量有益工作，在此一并表示感谢。由于时间仓促，错误和疏漏之处难免，恳请广大读者、数学同仁批评指正。

编者

2004 年 2 月

目　录

第一部分 高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率与数理统计

第一部分　高等数学

第一章　函数 极限 连续性

一　内容提要

(一) 主要内容

1. 函数

(1) 函数的定义及定义域

① 函数的定义：设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数.

② 函数的定义域：使函数 y 有意义的自变量 x 取值的集合.

③ 函数相同的条件：a. 定义域相同；b. 对应法则相同.

(2) 复合函数的定义：由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 而成的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由此二函数复合而成的复合函数.

掌握复合函数必须掌握以下四点：

① 要使 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 能复合成 $y=f[\varphi(x)]$，必须 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集不是空集；

② 给出函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 会将其复合，特别是当 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 都是分段函数时求复合函数是难点，要尽力突破；

③ 会将复合函数分解成多个简单函数的复合；

④ 会求复合函数的定义域.

(3) 反函数：若由函数 $y=f(x)$ 得到 $x=\varphi(y)$ 则称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，也可将 $x=\varphi(y)$ 记为 $y=f^{-1}(x)$.

应注意的是：单值、单调的函数 $y=f(x)$ 一定有反函数，且其反函数也一定是单值、单调的.

(4) 基本初等函数，称：

① 幂函数　$y=x^{\mu}$　(μ 是常数)

② 指数函数　$y=a^{x}$　(a 是常数　$a>0, a\neq 1$)

③ 对数函数　$y=\log_a x$ (a 是常数　$a>0, a\neq 1$)

④ 三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 等

⑤ 反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ (反三角函数的主值) 为基本初等函数.

(5) 初等函数：由常数和五类基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步

骤所构成并可用一个式子表示的函数.

应注意的是:由于分段函数一般不能用一个式子表示,故分段函数一般不是初等函数.

(6) 双曲函数和反双曲函数

① 双曲函数

双曲正弦:$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$　　双曲余弦:$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

双曲正切:$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

② 反双曲函数

反双曲正弦:$\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$　反双曲余弦:$\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^{2}-1})$

反双曲正切:$\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

(7) 函数的特性

① 有界性

a. 定义:对一切 $x\in D$,若存在正数 M,使 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上有界,否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

b. 应注意的问题:函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界,其导函数与原函数在 D 上都不一定有界

如 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $[-1,1]$ 上有界,但其导函数 $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}$ 在 $[-1,1]$ 上无界.

又如 $y=1+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,但其原函数 $F(x)=x-\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

② 单调性

a. 定义:设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2 且 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少.

b. 应注意的问题:单调函数的原函数和导函数都不一定单调. 如 $y=x^{3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加. 但其导函数 $y'=3x^{2}$ 和原函数 $F(x)=\dfrac{x^{4}}{4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内都不单调.

③ 奇偶性

a. 定义:$f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对一切 $x\in D$,$f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数. 若对一切 $x\in D$,$f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

b. 奇、偶函数的性质

奇函数 + 奇函数 = 奇函数　　偶函数 + 偶函数 = 偶函数

奇函数 × 偶函数 = 奇函数　　偶函数 × 偶函数 = 偶函数

奇函数 × 奇函数 = 偶函数

任一个以关于原点对称的区间为定义域的函数 = 奇函数 + 偶函数.

即
$$f(x)=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{(\text{偶函数})}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{(\text{奇函数})}$$

c. 导函数与原函数的奇偶性

可导偶函数的导函数是奇函数　　可导奇函数的导函数是偶函数

可积奇函数的原函数是偶函数　　可积偶函数的原函数中有一个是奇函数

④ 周期性

a. 定义：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 T，使对一切 $x \in D(x \pm T \in D)$，$f(x+T)=f(x)$ 恒成立. 则称 $f(x)$ 为周期函数，最小的正数 T 称作其周期.

b. 导函数的周期性：可导周期函数的导函数一定是周期函数.

c. 应注意的问题：周期函数的原函数不一定是周期函数. 如 $f(x)=1+\cos x$ 是以 2π 为周期的函数，但其原函数 $F(x)=x+\sin x$ 不是周期函数. 而 $f(x)=\cos x$. 则 $F(x)=\sin x$ 又是周期函数.

2. 极限的概念及运算性质

(1) 极限的定义：

① 数列的极限的定义：$\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，使当 $n>N$ 时 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称 a 是 $n \to \infty$ 时 数列 x_n 的极限. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

② $x \to \infty$ 时函数极限的定义：$\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正数 X，使当 $|x|>X$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限. 记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

③ $x \to x_0$ 时函数的极限的定义：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

④ $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的左、右极限

a. 定义：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的右极限. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时 的左极限. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

b. $x \to x_0$ 时极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

(2) 极限的四则运算法则

① 法则：若 $\lim f(x)=A$　　$\lim g(x)=B$.

则　$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$　　$\lim[f(x)\cdot g(x)]=AB$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

② 应注意的问题：

a. 只有当各极限存在时才能运用极限的四则运算法则.

b. 函数的和、差、积、商的极限存在不能保证各自的极限存在.

如 $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{2}$$

函数的乘积的极限存在，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} x$ 不存在.

3. 无穷小量

(1) 无穷小量的定义：以零为极限的变量叫无穷小量.

(2) 无穷小的运算性质

① 有限个无穷小之和为无穷小；② 有界函数与无穷小的积为无穷小；

③ 极限与无穷小的关系：

$\lim y = A \Leftrightarrow y = A + \alpha$，其中 α 为在自变量的相同变化趋势下的无穷小量.

(3) 无穷小的比较

① 定义：设 α 和 β 是在自变量的相同变化趋势下的无穷小量

若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$ 时，则称 α 较 β 高阶，记为 $\alpha = o(\beta)$

$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$ 时，则称 α 较 β 低阶

$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = c \neq 0$ 时，则称 α 与 β 同阶　当 $c = 1$ 时，则 α 与 β 等价. 记为 $\alpha \sim \beta$

② 等价无穷小替换定理

若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，则 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha}{\beta'}$

4. 无穷大

(1) 定义：$\forall M > 0$，$\exists \delta > 0$(或 $X > 0$) 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$) 时 $|f(x)| > M$，则称函数 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷大.

(2) 无穷大与无穷小的关系：倒数关系

即　若 $f(x) \to 0 (f(x) \neq 0)$ 则 $\dfrac{1}{f(x)} \to \infty$　　若 $f(x) \to \infty$ 则 $\dfrac{1}{f(x)} \to 0$

(3) 无穷大与函数无界的关系：

若 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时，$f(x)$ 为无穷大，则 $f(x)$ 必在 x_0 点的某邻域(或 $|x| > X$) 无界. 但 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域(或 $|x| > X$ 时) 无界，而 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时，$f(x)$ 不一定是无穷大. 如 $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 点的任一邻域内无界. 但当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 不是无穷大.

5. 极限存在的准则

(1) 准则 Ⅰ：

① 若 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

② 若 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \varphi(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = A$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = A$.

(2) 准则 Ⅱ：

① 单调有界数列必存在极限.

② 若 $|x| > X$ 时 $f(x)$ 单调且有界，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在.

6. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$　　(2) $\lim\limits_{u\to 0} (1 + u)^{1/u} = e$.

7. 有关极限的重要定理

(1) 唯一性：若变量 y 的极限存在，则必唯一.

(2) 有界性：

① 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 则必 $\exists M > 0$，使 $|x_n| \leqslant M$.

② 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = A$ 则必 $\exists M > 0$ 和 $\delta > 0(X > 0)$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$) 时，$|f(x)| \leqslant M$.

(3) 保号性：

① 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0(< 0)$，则必 $\exists \delta > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > 0(< 0)$.

② 若 $f(x) > 0(< 0)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0(A \leqslant 0)$.

8. 罗必塔法则

条件：

① $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = 0(\infty)$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = 0(\infty)$

② $f(x)$、$g(x)$ 在 x_0 点的某邻域(x_0 点可除外) 或 $|x| > X$ 时都可导，且 $g'(x) \neq 0$

③ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A(\infty)$

结论：$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

9. 函数的连续性

(1) 函数连续性的定义

① 在 x_0 点连续的定义：函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

(或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$)，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

② 在开区间 (a,b) 内连续的定义：

若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续.

③ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的定义：

若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(2) 间断点及其分类

① 间断点的定义：函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

② 间断点的分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点}\begin{cases}\text{可去间断点(左极限} = \text{右极限)} \\ \text{跳跃间断点(左极限} \neq \text{右极限)}\end{cases} \\ \text{(左、右极限都存在)} \\ \text{第二类间断点}\end{cases}$$

(3) 连续函数的运算性质

① 连续函数的和、差、积、商及复合函数连续.

② 若 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单值单调且连续，则 $y=f^{-1}(x)$ 在相应区间 (α,β) 内单值单调且连续.

(4) 初等函数的连续性

① 一切基本初等函数在其定义域内连续

② 一切初等函数在其定义区间内连续

(5) 在闭区间上连续函数的性质

① 定理 1(最大、最小值定理)：在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值

② 定理 2(有界性定理)：在闭区间上连续的函数一定在此区间上有界

③ 定理 3(介值定理)：

a. 介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且在这区间的端点取不同的函数值，$f(a)=A$,，$f(b)=B$. 那么，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

b. 零点定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则必 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

④ 定理 4：在闭区间上连续的函数必取得介于最小值 m 和最大值 M 之间的一切数值.

(二) 重要公式及结论

1. 重要公式

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(0<a)$　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\quad|q|<1$

(4) 若 $a_0\neq0,b_0\neq0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\infty & n>m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ 0 & n<m\end{cases}$

注意：极限的四则运算法则及两个重要极限前面已列出.

2. 重要结论

常用的等价无穷小

当 $u\to0$ 时

$\sin u\sim u\qquad \tan u\sim u\qquad \arcsin u\sim u\qquad \arctan u\sim u$

$\ln(1+u)\sim u\qquad e^u-1\sim u$

$1-\cos u\sim\dfrac{u^2}{2}\qquad(1+u)^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{u}{n}$

二 重点

(一) 函数的概念与特性

(二) 极限的概念

(三) 无穷小的定义、运算性质及无穷小的比较

（四）极限存在的准则　两个重要极限
（五）极限的求法
（六）函数连续性的定义及间断点的分类
（七）在闭区间上连续函数的性质

三　典型例题解析

（一）函数

例 1　判断下列各对函数是否相同

(1) $y=\sin(\arcsin x)$ 与 $y=x$

(2) $y=\sqrt{\sin^2 x}$ 与 $y=\sin x$

(3) $y=\cos^2 t+\sin^2 t+t$ 与 $y=1+x$

分析　判断两个函数是否相同，要看(1) 定义域是否相同；(2) 对应法则是否相同. 所谓对应法则相同即对定义域内任取一自变量的值两个函数的函数值相等.

解　(1) 是一对不相同的函数. 因前者定义域为 $|x|\leqslant 1$，而后者为 $x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) 是一对不相同的函数. 因为对应法则不相同. 如在定义域内取 $x=\frac{5}{4}\pi$，前者的函数值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，而后者的函数值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) 是一对相同的函数。因它们的定义域都是全体实数，且对任意实数 t，$\cos^2 t+\sin^2 t=1$，$\therefore$ 前者实为 $y=1+t$ 与后者的对应法则相同. 至于用何字母表示自变量与函数是否相同无关.

例 2　求函数 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.

解
$$\begin{aligned}y^3&=x+\sqrt{1+x^2}+3\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\right)^2\left(\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)\\&\quad+3\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)^2+x-\sqrt{1+x^2}\\&=2x+3\sqrt[3]{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})}\cdot\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\right.\\&\quad\left.+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)\\&=2x+3(-1)\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)\\&=2x-3y\end{aligned}$$

$\therefore\quad x=\frac{1}{2}(y^3+3y)$　即所求反函数为 $y=\frac{1}{2}(x^3+3x)$.

例 3　已知 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$，求 $f(\cos\frac{x}{2})$

解　$f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2(1-\sin^2\frac{x}{2})$

设 $u=\sin\frac{x}{2}$，则 $f(u)=2(1-u^2)$

$$\therefore\quad f(\cos\frac{x}{2})=2-2\cos^2\frac{x}{2}=2-(1+\cos x)=1-\cos x$$

例 4 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，且 $x\neq0$，求 $f[\frac{1}{f(x)}]$ 及 $f[f(x)]$

解 $\frac{1}{f(x)}=\frac{x-1}{x}$

则 $$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1}=1-x.$$

$$f[f(x)]=f[\frac{x}{x-1}]=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x.$$

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & |x|\leqslant1\\ x & |x|>1\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解 $$f[g(x)]=\begin{cases}[g(x)]^2 & |g(x)|\leqslant1\\ g(x) & |g(x)|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(2-x^2)^2 & |2-x^2|\leqslant1\text{ 且 }|x|\leqslant1\\ 2-x^2 & |2-x^2|>1\text{ 且 }|x|\leqslant1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & |x|=1\\ 2-x^2 & |x|<1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$$

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2}x^2 & -1\leqslant x<0\\ \frac{xe^x}{(e^x+1)^2} & 0\leqslant x\leqslant1\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$ 的表达式.

解 当 $-1\leqslant x<0$ 时

$$F(x)=\int_{-1}^{x}(2t+\frac{3}{2}t^2)dt=\left(t^2+\frac{t^3}{2}\right)\Big|_{-1}^{x}=\frac{x^3}{2}+x^2-\frac{1}{2}.$$

当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时

$$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{x}f(t)dt$$

$$=(t^2+\frac{t^3}{2})\Big|_{-1}^{0}+\int_0^x\frac{te^t}{(e^t+1)^2}dt$$

$$=-\frac{1}{2}-\int_0^x td(\frac{1}{e^t+1})=-\frac{1}{2}-\frac{t}{e^t+1}\Big|_0^x+\int_0^x\frac{dt}{e^t+1}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\frac{d(e^t)}{e^t(e^t+1)}$$