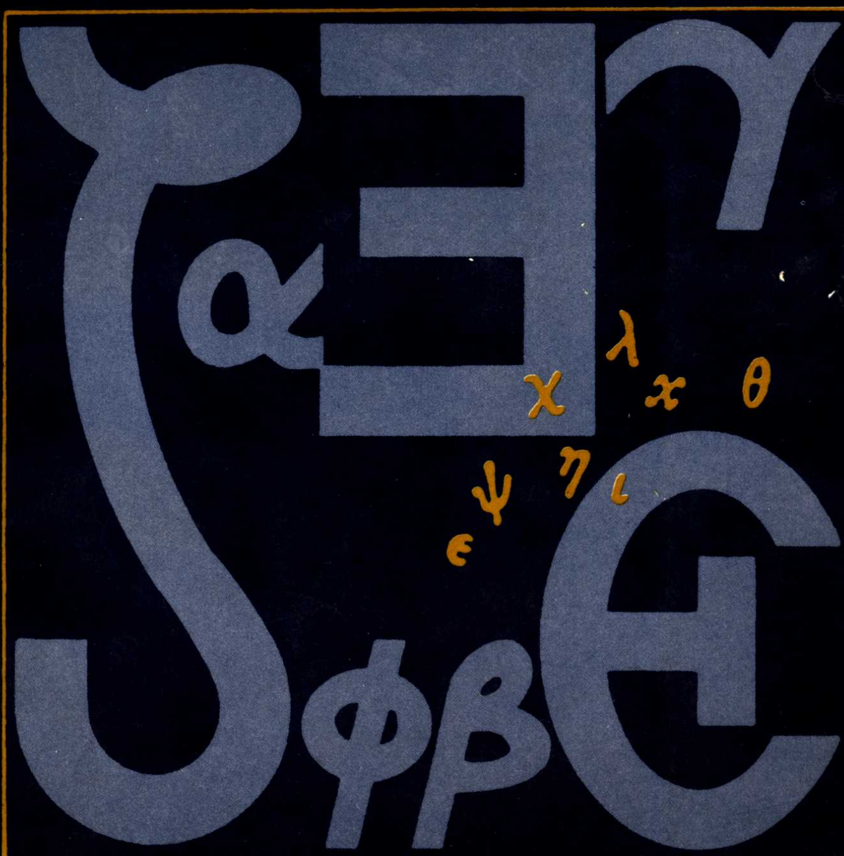
數理邏輯

MATHEMATICAL LOGIC

哈佛大學 蒯英(Quine)原著　臺灣大學 劉福增 譯



國立編譯館 主編　幼獅文化事業公司 印行

數理邏輯

MATHEMATICAL LOGIC

哈佛大學 蒯英(Quine) 原著　臺灣大學 劉福增 譯

國立編譯館 主編
幼獅文化事業公司 印行

行政院新聞局核准登記證局版臺業字第0143號

數理邏輯
Mathematical Logic

主　編：國立編譯館
著　者：蒯　英 (W.V.O. Quine)
譯　者：劉福增
校　對：陳肇健・羅麗芳
發行人：胡軌
出版者：幼獅文化事業公司
臺北市重慶南路1段66-1號3樓
電　話：(02) 3 1 1 2 8 3 2-9 號
臺北市漢中街51號
電　話：(02) 3 1 4 4 2 2 0 號
郵政劃撥 0 0 0 2 7 3 7-3 號
印刷者：崇寶彩藝印刷有限公司
基本定價：五元一角二分
中華民國七十六年三月出版

31028

譯 序

本書是從哈佛大學著名哲學家和邏輯家蒯英（W. V. O. Quine）的 *Mathematical Logic*（1958年版）譯成的。這本書是現代數理邏輯的經典之作。當然，在今天一般數理邏輯教本所含蓋的題材，遠比本書為多。然而，在相同的範圍內，本書是迄今寫的最精密和最嚴格的。學哲學和數學的人，如果能認真精習本書，相信一定非常有助於嚴密的邏輯思考。

蒯英的文筆，典雅精密，獨樹一格，並不好翻譯。本書的翻譯，盡量求其精確。精習本書的人，一定要耐心，反復思考。

劉 福 增

1987年1月10日

國立臺灣大學哲學系

序

在數理邏輯裡接受精密描塑的東西當中・有一個重要部分已經含混地顯現做日常討論的一個基本成分。從非數學的、非哲學的常識，這樣就很快地通到數理邏輯的第一步專技，雖然祇是一步。再說，一旦在數理邏輯領域裡面，我們就不需要為了要到達一個邊境，而遊歷到它更遠的端點；這個領域本身就是一個邊境，因而探究者就是在它的路程中馳騁四方。即使在一個初步的解說中，也有對專家也許不會乏味的新奇的餘地。因此像在少數其他領域那樣，在數理邏輯裡教科書和論文可以結合在同一本書內。這就是本書心目中想要的地位。

本書提出的題材，大體上是我在哈佛大學開的課程「數學 19」所含蓋的。我設想以這樣的方式提出這些題材，那就是不用預設先熟悉數理邏輯，或任何在數學或哲學上的特別訓練。但是本書是設想要給慎思的讀者；有些節次需要精細的探究。一般說來，嚴格並不有意地向明晰妥協要好。

第一章處理敘說的眞函組合：以否定改變敘說，以及以像'而且'、'或者'、'如果……則'這些連詞形成複合敘說。依照謝法（H.M.Sheffer），我們把這些化致'既非……也非'這個單一的連否言連詞。我們强調詞組（式子）的使用和對詞組（式子）的討論之間的差別對照，並且從這個區分的觀點，討論對涵蘊的爭論。我們引進一種後視數學記號（法）或語法記號，以便利對敘說和其他詞組的討論；並且不求助過去著作中所謂命題變元

'p','q'等等，而以這些詞語解說敍說組合的原理。套套言——那種僅僅依據真函組合的邏輯真理——的性質，在後視數學的詞語中接受一種新的描塑，然後舉出一序列的套套式。在套套言的層次上，我們省略了演繹方法，而採用真值表計算法。

第二章處理量辨：包含'所有'和'有些'的用語的形式對應。就在和量辨的關連裡，變元首次出現；因而，我們把若干注意放在釐清變元的性質，以及提示它和日常語言的代名詞的類似。像前面那部分的邏輯，我們在後視數學的媒體之內，解說量辨理論；由於和所謂變元的約束和自由出現的精微有關，以其他任何媒體呈現量辨理論，的確會顯出不便。這裡像第一章那樣，計算法會被認為比演繹法好；但是由於沒有適合於量辨理論真理的計算法，現在不得不訂定一個折中辦法。這個折中辦法是這樣組成的。依一種計算法特定一個無限集合的所謂量辨設基，然後依一種最簡單的一個演繹規則，允許從這些設基進行到定理。這一規則就是肯前（肯定前件）規則（*modus ponens*）。有一個和通常的程序不同，但比它更直覺的，是：我們把量辨設基特定得使定理僅祇包括嚴格意義的敍說——不含"自由"變元的敍式，沒有超出這樣的變元使用在量辨中。

在第三章中出現分子關係連號'$\in$'，隨後也出現類。當做量辨和連否言的補充，這個連號顯示給邏輯觀念、算術觀念，以及其他導出學科等觀念的定義，提供一個適當的基礎。在定義序列中有一個基本而重要的步驟是引進抽作——經由對類所加條件，類藉之而特定的記法。由系絡定義完成它的引進。根據抽作，依次引進描述詞的設計，這個設計相當於'使得……的元目'這個用語。現在可以把一般的名稱，不論是抽作的還是具體的，解釋為僅僅是可以從所有討論中隨意消除的速記。除了它所提供

的經濟以外，這個程序還顯示具有產生把語法的意義問題和事實的存在問題，做一種分開的價值。

在第四章，在量辨設基以外，補充了一種新的無限多的設基，這些設基提供分子關係和導出觀念的基本性質；但是除了原有的肯定規則以外，不需其他推演規則。我們定義了等同和單類，同樣也定義了通常的類代數；並且導出一連串的定理。

邏輯的悖論，例如羅素（B. Russell）的，由一種方法來避免；這個方法比像類層論這種過去的方法較少限制。像馮紐曼(von Neumann) 的，我們的方法是依賴把某些元目解釋為可能為分子關係的；但是這樣解釋的元目遠比馮紐曼理論的稀少。除了使計數方便以外，這個自由解放會使不用特別的設定，就可演證無限類的存在。

在第五章，根據類理論依韋納 - 庫拉托斯基（Wiener-Kuratowski）方法定義關係，並且引進和探究了日常概念的關係理論，根據關係理論，依次定義函應。在類理論中使用的抽作設計的類似，在和關係及函應的關連上再次出現。自然數的定義在第六章進入；然後下面一個定義引進把一個關係提升為一個數字巾的運算，這個運算可以提供一個簡單和統一的方法，定義各種算術運算。若干基本的算術定理被證明，而從這個層次到高等層次的數量數學的標準構作，簡要做了敍述。

在第七章我們涉及講到像前面諸章提出的一種形式系統的後視數學的或語法的機械法的形式化。有關邏輯和算術的不完備性的戈代爾定理，沿這個新線索導出來，並且略為擴大它的範圍。

劍橋　麻州

1940 年 4 月 7 日

致　謝

我要感謝哈佛大學答應我一個學期的自由（1983-39），加速我本書的撰寫。我要感謝美國哲學學會，提供資金幫助準備原稿。我要謝謝《科技評論》的編者，允許我把我的“關係與理性”的一些段落，編進導論最後幾段。

連納德（H.S. Leonard）、劉易士（C.I. Lewis）和亨丁頓（E.V. Huntington）諸教授，以及古德曼（H.N. Goodman）先生等對第一章初稿的批評，使我受惠很多。在後面幾章中，我過去和現在「數學 19」的學生中，至少有十一位為我訂正或其他有用的提示：科根（R.L. Korgen）教授、布朗（G.W. Brown）博士、史坦哈德（L.D. Steinhardt）小姐，和柏利（G.D.W. Berry）、傅里曼（B. Friedman）、卡普蘭基（I. Kaplansky）、克拉格（W.H. Kruskal）、諾里士（M.J. Norris）、拉溫（R.M. Ravven）、西門（K.R. Symon），以及尤其是和第七章有關的，華特（M.G. Wurtele）諸先生。我要感謝傅里曼先生、柏利先生和太太、皮爾（F.W. Peel）先生以及我太太，在準備原稿印刷中的辛苦。我再次感謝傅里曼先生在參考書目和索引上熟練的幫助。

修訂版序

在本版中做的修訂影響一半頁數，大部分是小地方。約三十頁有重大改變。

最重大修改的首要推動者是羅塞(Rosser)。在第一版出現不久，他發現本書中間類理論的設基有矛盾。知道他的發現時，我商請出版社把修訂單貼進存書中，表示暫代系統的修正。這個修訂單也插在第二版中(1947)。然而最近王浩設計一個更好的修正;這個修正極好，既適合原系統的精神，又適合原解說的大部分細節。因此，在本版中可訂正本文，不留痕跡。這樣的修訂影響157-160、162、163、166、193、238和305等頁。

另一點修正來自柏利。他顯示閉包概念的一個小修正(p.79)如何可以產生簡化量辨設基。柏利的觀念在第二版中曾提到(p.89)，但在本版中已直接編進去，付的代價是修改79-95頁和300-301頁，以及改變一百多頁中的參照數和量號。

從第一版出現以來的十年間，讀者有兩個困難至為明顯。一個是形式地演繹出的定理和非形式地建立的後視定理之間的區分;另一個是支持戈代爾不可完備定理的推理。這兩個困難在本版中已予以減輕，前者由添加一個附錄，後者由插入若干補充解說(p.307-312)。

在處理實數中，兩個由克勞士(Ralph M. Krause)先生和王浩博士發現的細微錯誤，由修正273-275頁而掃除。在25、81、89、144、177f、191、202、208f、229f、292、299和318諸頁上，做了其他修正和

添加。[本序裡的頁數是指原書的頁數。——譯者]

劍橋，麻州

1951 年 1 月 28 日

導 論

數理邏輯在方法上和傳統形式邏輯有着那麼顯著的不同，因而，在力量和精緻上，它遠勝後者。所以，一般都把它看做一門新的科學。這樣看也沒有什麼不當。數理邏輯在十九世紀中葉，從布爾（George Boole, 1815-64）初略開端。遠在布爾以前的萊布尼茲（G. W. Leibniz, 1646-1716），已預示數理邏輯的片斷之言；但是，從布爾以後，經由皮亞士（C. S. Peirce, 1839-1914）、史樂德（E. Schröder, 1841-1902）、弗列格（G. Frege, 1848-1925）、皮亞諾（G. Peano, 1858-1932）、懷德海（A. N. Whitehead, 1861-1947）、羅素，以及他們的後繼者，數理邏輯才歷經不斷的發展，而達到一個有聲望知識部門的地位。

雖然如此，其實質從亞里士多德（Aristotle, 384-322 B. C.）開始的傳統形式邏輯，是數理邏輯的直接起源。這兩者之間的顯著不同，不可弄糊塗了一個事實，那就是，在「邏輯」一詞的最嚴格意義上，它們兩者都是「邏輯」。含混地說，它們都具有相同的題材。不過，究竟那題材是什麼，不容易說。通常，把邏輯說成是「必然推演的科學」、「形式的科學」等等。不過，這些說法給我們的訊息很少，不足當做答案。

但是，如果我們把注意從題材轉到字彙，就容易在邏輯之眞和其他的眞敍說之間，劃一個表面的區別。一個邏輯地眞敍說具有這個特色，那就是，像「是（is)」、不（not)」、「而且（and)」、「或者（or)」、「除非（unless)」、「如果（if)」、「則（就）（then)」、

「既不(neither)」、「也不(nor)」、「有些(some)」、「所有(凡)(all)」等等的質詞在這個敍說中出現時，這個敍說之爲眞獨立於其他成分。這樣，試看下個古典的例子：

(1) 如果每一個人是會死的而且蘇格拉底是人則蘇格拉底是會死的。

這個敍說不但爲眞，而且它爲眞獨立於「人」、「會死的」和「蘇格拉底」這些成分；這些字眼的更換，不會把這個敍說變成假。試看這個形式：

(2) 如果每一(個)——是——而且——是——則——是——。

祇要第一和第四兩個空格塡上相同的東西，第二和最後一個空格塡上相同的東西，以及第三和第五兩個空格也塡上相同的東西，任何具有上個形式的敍說，都爲眞。下面是一個更簡單的邏輯眞敍說：

(3) 蘇格拉底是會死的或者蘇格拉底是不會死的。

更換「蘇格拉底」和「會死的」，也不會把這個敍說變成假。

我們可把一個字叫做**實質地**(essentially)出現在一個敍說中，如果用另外一個字取代這個字，會把這個敍說變成假。[1] 當情況不這樣時，我們可把這個字叫做**虛空地**(vacuously)出現。這樣，「蘇格拉底」和「人」這些字眼，實質地出現在「蘇格拉底是人」這個敍說中，因爲「布西法拉(Bucephalus，亞力山大騎的戰馬)是人」和「蘇格拉底是馬」這些敍說爲假。反之，「蘇格拉底」和「會死的」

---

❶要更小心一點描塑，請看我的論文"Truth by Convention," pp. 93 ff.

虛空地出現在 (3) 裡，而「蘇格拉底」、「人」和「會死的」虛空地出現在 (1) 。這樣，我們可把邏輯地眞敍說說成是，祇有前面所提那些基本質詞實質地出現在裡面的眞敍說。

這些質詞可以說構成了**邏輯字彙**（logical vocabulary）。在一切討論中，這些字彙都是很基本的。譬如，如果我們要特定一種地質學的字彙，把實質地在地質學的眞敍說中出現的字眼包括進去，則我們應要不祇把像「石堆」和「斷層」等等的字包含進去，而且也要把全部的邏輯字彙包含進去；對任何其他學科，情形也一樣。因此，邏輯的眞敍說可無足輕重地算在地質學、經濟學等等學科的眞敍說中。這提供一些意義給這樣的格言：邏輯具有普遍的題材，以及邏輯是諸特殊科學的公分母。

構成邏輯字彙的字，可以重大的減少，因爲我們可以藉其中一些重敍其他一些。例如，「除非」的意思，可適當地用「或者」來表示。又如，以「既不不……也不不」的方式連用「既不……也不」和「不」，可以提供「而且」的一種適當的重敍。當這種減少做到極限時，邏輯字彙將僅僅由「是」、「既不……也不」以及大致相當於「每一」這個字的一種設計，及輔助這個設計的某種代名詞的格架。（cf. §§9,12,22-23）

通常歸在數理邏輯或傳統形式邏輯的，不但包含邏輯的眞敍說——祇實質地包含邏輯字彙的眞敍說——，而且也包含**關於**（about）這些眞敍說的敍說。通常，在邏輯中不但包含像 (1) 和 (3) 的敍說，而且也包含像這樣的敍說：

(4) 任何具有 (2) 這個形式的敍說都眞，祇要第一和第四空格，第二和最後空格，以及第三和第五空格，分別都塡上相同的東西。

本書尤其包含大量像 (4) 這樣的敍說。這樣，我們必須分別廣狹兩個意義的邏輯。狹義的邏輯由實質地僅僅包含所謂邏輯字彙的眞敍說所構成；而廣義的邏輯包含了狹義的邏輯以及關於它的討論。後者的討論，至少大部分，可歸在*形式語法*（formal syntax）這個標題之下（cf. Ch VII）。當然，年來「邏輯」一詞也應用到廣泛的其他論題，侵佔了修辭學、心理學、知識論和形上學。但是，我不想在邏輯一詞的這些廣泛的應用中，尋找一個統一的原理。

在前面對邏輯的眞敍說的初步述說中，我們認定了眞理的一般觀念。我們僅僅依特定什麼字實質地在邏輯的眞敍說中出現，來分別邏輯的眞敍說和其他的眞敍說。現在，由於眞理的一般觀念在難纏的哲學問題中，居於重要地位，因此似乎是一個太大的項目，不宜認定。拒絕“拿大寫字母‘T’代眞理”,的確是一個最令人喜歡的講實際的做法。但是實際上，我們不否認，正如同我們清楚地了解一個敍說本身，我們知道這個敍說是眞——絕對的眞——是什麼意思。例如,敍說：

(5)　　仲斯抽煙

會爲眞的情境，恰切就是仲斯本人會抽煙的情境。敍說 (5) 的眞理不比仲斯和抽煙的觀念更神秘。應用於任意敍說 S ，‘眞’一詞不比敍說 S 本身中最曖昧的一詞更曖昧；因爲說 S 爲眞是直簡說 S 。[1] 這似乎是寬恕現在這解說性的求助於眞理的一般觀念，然而這個觀念包含的精細問題，是可以經營的。

要決定敍說 (5) 的眞理，檢查這個敍說是不夠的；我們也必須觀察仲斯。其他大部分敍說情況也一樣。這樣，當我們說去找出那些敍

---

❶對這個主題的一個有益的精研成果，請看塔斯基（Tarski）的“Wahrheitsbegriff.”

說是地質學的眞理，是地質學家的工作時，我們並不把他拘束在坐着研究敍說；我們要求他要花他很大部分的時間去調查絕崖和火山口。但是邏輯，實際上是數學一般，卻不是這樣。例如，(1) 和 (3) 的眞理僅僅檢查敍說本身可以辨認。面對任何邏輯眞理，確實說任何數學的眞敍說，不論多複雜，如果僅檢查敍說並且思考或計算，我們就辨認它的眞理；火山口、試管或人類行爲的觀察，是沒有用的。那麼，就邏輯眞理的可辨來說，邏輯眞理的標準可僅僅用敍說的一些複雜記號的特色來描塑；同樣地，對數學一般也是這樣。這樣，邏輯家和數學家講述敍說的遠比地質學家爲多；因此，廣義的邏輯通常認爲要包括講述狹義邏輯的敍說，然而卻沒有這種支分加給地質學家。

如果邏輯眞理或數學眞理的標準是僅僅用敍說的可觀察的特色來描塑，則第一個重要的步驟是把語言修改和形式化，如此才能使敍說的有關特色形成最簡單的可能形式。自從在數學裡發生這種修正以來，在這方向的修正已有很長的時間；也許和日常語言最基本的偏離是使用括弧表示歸組，以及使用變元當交叉稱指之用，在日常語言中是使用代名詞來當這種變元的（cf. §12）。模倣數學，從布爾起類似的修正在邏輯發生；在舊邏輯和新邏輯之間，這一點差別對照的確那麼顯著，因此後者往往叫做“符號邏輯”。但是，如果要把這種描塑眞理標準的計劃充分加速，則需要更徹底的語言的修正。拿其他一些觀念定義某些觀念，來把邏輯和數學的觀念化致最少，是有幫助的，因爲這把眞理標準必須含蓋的各種敍說加以化約。結果，這種化約可以做得很長。我們已經提過足夠爲邏輯之用的貧乏的設計安排：‘是’、‘既非……也非’、‘每一’和代名詞等的類似。更令人驚奇的是，這些設計顯示不但適合於邏輯而且也適合於數學一般（cf. §§23,52）；數學化爲邏輯。

在給邏輯語言最經濟和制式的形式以後，我們其次也許希望設計

某種例行的檢試，這種檢試僅僅應用於敍說的記號模式，並且總會區分那些是邏輯地眞敍說和那些不是。但這是一個偌大的期望，尤其是從數學一般化致邏輯的觀念。每一個數學的問題會變成可用一種機械的程序去解決——甚至像著名的費麻（Fermat）問題，這個問題有三世紀之久不能解決。數學證明的發表會絕無必要；讀者方面做機械的檢試就可得到結果。

由於對這麼大膽的計劃缺乏自信，我們也許要嘗試描塑某種力量較少的邏輯和數學眞理的記號標準：一個敍說是否滿足這樣一個標準，僅僅可由機運而不是由絕對靈驗的例行檢試辨別出來。這樣的標準確實是數學證明的性格；一個數學證明一旦發現了，可以機械地檢核，但這個證明的實際發現是中不中的問題。（cf. §§16,55。）我們現在較適度的目標，這樣就可採取一種證明或定理觀念的明白描塑的形式，使得包含僅僅指及敍說的記號模式。但是新近的發展顯示，實際上即使根據這些更適度的原理，一個廣含無遺的邏輯或數學眞理的標準，也是不可能的。設使有任何實際上不會導致假理的規則，也有不能由這些規則證明的數學眞理（cf. §60）。我們總有某種在演證上爲不可演證的數學眞理。我們必須滿足一種講法的“定理”，即定理只含蓋某種重要部分的邏輯和數學眞理。

事實依然是，祇要邏輯或數學眞理是可以探獲的，則其標準可以明白描塑爲依據敍說的記號模式。這種不明顯的邏輯和數學眞理，是可由證明辨認的，如果有的話；而構作一個證明的考慮，是容許拿敍說的記號模式來明白描塑的。這種描塑不但可能，而且爲了增加它預示的洞見，也是很有需要的。必定總有不可演證的數學眞理這個發現，如果不明白地拿敍說的記號模式來分析“證明”或“定理”的觀念，是不能得到的發現。

上述發展絕不是邏輯裡現代精建的全部動機。例如，把數學和邏

輯觀念化致最少，是由比上述目的更多的目的激起的。它本身就是一個目的，因爲它顯現到底那少數觀念，終究是全部數學所預設的。再次，經由這個拿其他的觀念解說某些觀念，而最後拿少數選擇的觀念解說所有的觀念，若干數學和邏輯觀念當然就經過明澈的分析。

邏輯語言的制式化也在更實用的領域上有意義。在從不是邏輯眞理的前提到不是邏輯眞理的結論的推演中，邏輯有它的實用價値。當連結前提和結論的如言敍說'如果……則'本身爲邏輯地眞（像上面(1)）時，邏輯鼓勵這種推演；而就在這種方式中，邏輯眞理和邏輯以外的事務連繫起來。完全類似的說明對有關數學一般的應用也成立；在自然科學中數學技術的廣大用途，就不過在辨別其成分部分是自然科學敍說的'如果……則……'這種形式的數學眞理的重要性。然而不像數學的數字部門，邏輯本身在自然科學中傳統上祗是暗中參加的，並且是在相當初步的推演層次；如同算術在羅馬數字時代所扮演的地位那樣，邏輯完全扮演一個附屬的地位。但是當我們根據現代數學的線索（當然要保留最少限度邏輯字彙的縮寫），把邏輯形式化以後，我們有跟算術以及數學導出的分支一般有效的工具——而且它可應用的範圍遠超過後者。

在無關數的場合，到現在爲止還缺少有統一制定的數學技術。因此，自然科學的進步還大大依據某種可測量的量的辨識。測量是由題材和實數序列關連起來組成的；由於一旦這些關連建立起來時，所有建立好的數量數學理論，就在手邊當做我們其他推理的一種工具，因此這種關連是値得要的。但是沒有一種科學是完全依靠測量的，而且許多科學的研究是完全超乎測量範圍的。那麼，對寄望非量性技術的科學家，數理邏輯帶來希望。它給操作最基本的討論成分提供明確的技術。它對科學的增益也可期待在於貢獻嚴格和清楚——磨銳科學概念。這種磨銳概念應該可供做揭開既有科學假設迄今爲止的隱藏結果，