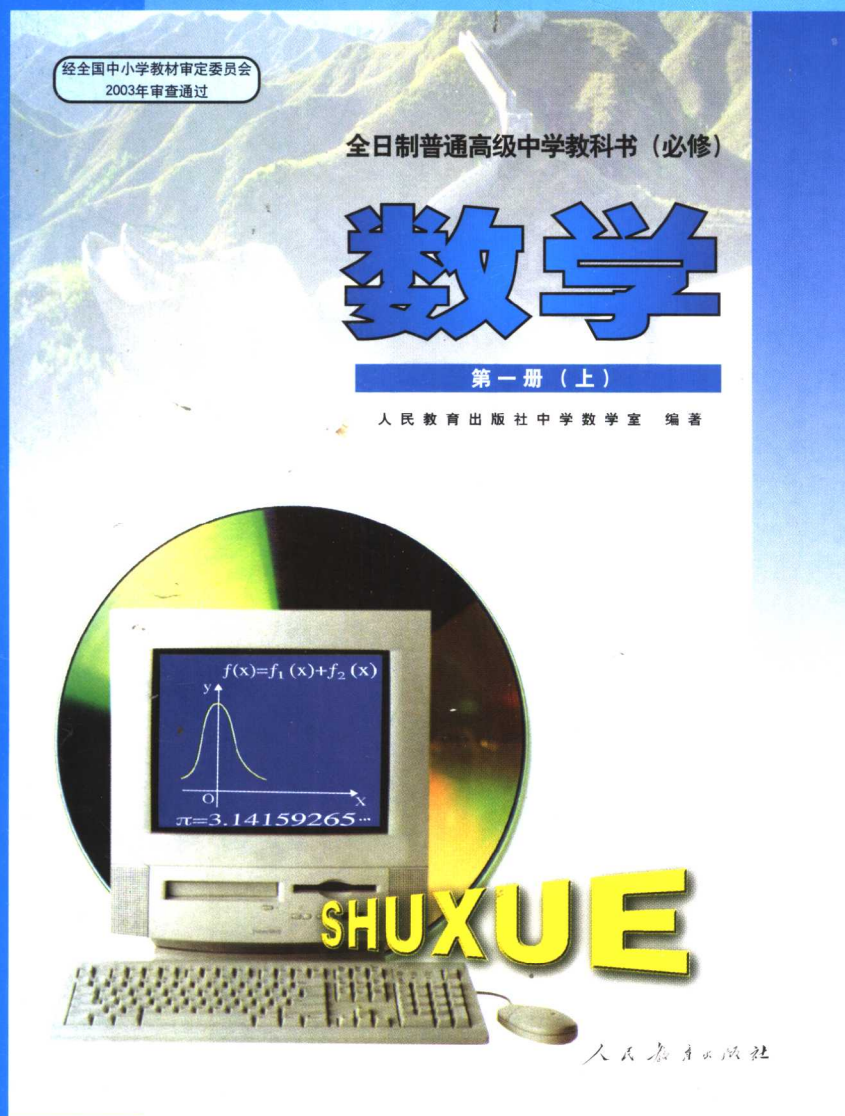


全日制普通高级中学（必修）

数学第一册（上）

教师教学用书

人民教育出版社中学数学室 编著



人民教育出版社

全日制普通高级中学(必修)

数学第一册(上)

教师教学用书

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社

全日制普通高级中学(必修)

数学 第一册(上)

教师教学用书

人民教育出版社中学数学室 编著

*

人民教育出版社出版

(北京沙滩后街 55 号 邮编:100009)

网址:<http://www.pep.com.cn>

山西人民出版社重印

山西新华书店集团有限公司发行

山西新华印业有限公司印装

*

开本:890 毫米×1194 毫米 1/16 印张:6.25 字数:140 000

2003 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 3 次印刷

印数:1—14 450 册(2005 秋)

*

ISBN 7-107-16773-1 定价:5.84 元
G·9863(课)

著作权所有·请勿擅用本书制作各类出版物·违者必究
如发现印、装质量问题,影响阅读,请与印厂联系调换。

联系电话:0351-4956034 4120948

说 明

本书是人民教育出版社中学数学室编著的《全日制普通高级中学教科书(必修)·数学第一册(上)》的教师教学用书.编写时按教科书分章安排,每章包括概述、内容分析、习题参考解答三部分.参加编写本书的有张劲松、章建跃、方明一、薛彬,责任编辑是田载今、张劲松.

目 录

第 一 章 集合与简易逻辑 (1)

- I 概述 (1)
- II 内容分析 (3)
- III 习题参考解答 (12)

第 二 章 函数 (27)

- I 概述 (27)
- II 内容分析 (29)
- III 习题参考解答 (46)

第 三 章 数列 (68)

- I 概述 (68)
- II 内容分析 (69)
- III 习题参考解答 (79)

第一章 集合与简易逻辑

I 概 述

一、教学要求

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义；掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合。
2. 掌握简单的绝对值不等式和一元二次不等式的解法。
3. 理解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义；理解四种命题及其相互关系；掌握充要条件的意义。

二、内容编排

1. 本章主要讲述集合的初步知识与简易逻辑知识两部分内容。集合的初步知识包括集合的有关概念、集合的表示、集合与集合之间的关系，简单的绝对值不等式和一元二次不等式的解法以及用集合表示它们的解集。简易逻辑主要介绍逻辑联结词“或”“且”“非”的意义，四种命题及其相互关系和充要条件的有关知识。

集合概念及其基本理论，称为集合论。它是近现代数学的基础。一方面，许多重要的数学分支，如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑等，都建立在集合论的基础上。另一方面，集合论及其反映的数学思想，在越来越广泛的领域中得到应用。

逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科。学习数学，需要全面理解概念，正确进行表述、判断和推理，这就离不开对逻辑知识的掌握和运用。更广泛地说，在日常生活、学习、工作中，基本的逻辑知识也是认识问题、研究问题不可缺少的工具。

在高中数学中，集合的初步知识与简易逻辑知识，与其他内容密切联系。它们是学习、掌握和使用数学语言的基础，高中数学学习的出发点。

2. 本章共分两部分。

第一部分是“集合”。学生在小学和初中数学中，已经接触过集合，对于诸如数集（整数的集合、有理数的集合）、点集（直线、圆）等，都有了一定的感性认识。在此基础上，这一部分首先结合实例，引出集合与集合的元素的集合，介绍了集合的表示方法。然后，从讨论集合与集合之间的包含与相等的关系入手，给出子集的概念。此外，还给出了与子集相联系的全集与补集的概念。接着，又讲述了交集、并集的初步知识。鉴于不等式的内容目前初中数学只讲述一元一次不等式与一元一次不等式组，考虑到集合知识的运用与巩固，又考虑到下一章讨论函数的定义域与值域的需要，第一部分最后安排的是绝对值不等式与一元二次不等式的解法。

第二部分是“简易逻辑”。学生在初中数学中，学习过简单的命题（包括原命题与逆命题）知识，掌

握了简单的推理方法（包括对反证法的了解）。由此，这一部分首先给出逻辑联结词“或”“且”“非”的含义，介绍了判断含有“或”“且”“非”的复合命题的真假的方法。接下来，讲述四种命题及其相互关系，并且在初中数学的基础上，结合四种命题的知识，进一步讲解反证法。然后，通过若干实例，讲述了充分条件、必要条件和充要条件的有关知识。

此外，本章在第一部分后面，还附了一篇阅读材料“集合中元素的个数”。

3. 本章第一部分的重点是有关集合的基本概念。学习集合的初步知识，可以使学生更好地理解数学中出现的集合语言，可以使学生更好地使用集合语言表述数学问题，并且可以使学生运用集合的观点，研究、处理数学问题。这里，起重要作用的是有关集合的基本概念。

本章第二部分的重点是逻辑联结词“或”“且”“非”与充要条件。学习简易逻辑知识，主要是培养学生进行简单推理的技能，发展学生的思维能力。因此，逻辑联结词“或”“且”“非”与充要条件的有关内容是十分必要的。

本章第一部分的难点是有关集合的各个概念的涵义以及这些概念相互之间的区别与联系。学生从本章正式开始学习集合知识，集合包含了比较多的新概念，还有相应的新符号，有些概念、符号还容易混淆，这些因素都可能给学生学习带来困难。

本章第二部分的难点是对一些代数命题真假的判断。初中阶段，学生只是对简单的推理方法有一定程度的熟悉。相关的技能和能力，主要是通过几何的学习获得的，初中代数侧重的是运算的技能和能力。因此，对代数命题的证明，学生需要有一个逐步熟悉的过程。

4. 本章是高中数学的起始章，适当地把握本章的教学要求是教学中应该重视的问题。

本章安排的是集合与逻辑的初步知识，这些知识的讲述，是以初中数学的内容为基础的。从引出有关知识的实例，到具体应用的问题，基本都属于初中数学的范围。本章的内容是高中数学的基础知识，学习这些内容，主要是为今后进一步学习其他知识作准备，随着后续章节的学习，对集合与逻辑知识的应用将越来越广泛和深入，相应地，对集合与逻辑知识理解和掌握的水平也就越来越高。因此，在本章的教学中，一定要从学生的实际和教科书的具体内容出发，提出恰如其分的教学要求。

三、课时分配

本章教学时间约需 20 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1 集合	约 2 课时
1.2 子集、全集、补集	约 2 课时
1.3 交集、并集	约 2 课时
1.4 绝对值不等式的解法	约 2 课时
1.5 一元二次不等式的解法	约 2 课时
1.6 逻辑联结词	约 2 课时
1.7 四种命题	约 3 课时
1.8 充分条件与必要条件	约 2 课时
小结与复习	约 3 课时

II 内容分析

引言

引言给出了一个实际问题，目的是引出本章的内容。首先，分析这个问题，要用数学语言描述它，也就是把它数学化，这就需要集合与逻辑的知识；其次，要解决问题，也需要集合与逻辑的知识。

在教学时，主要是把这个问题本身讲清楚，点出为什么“回答有 20 名同学参赛”不一定对。运用本章有关集合与逻辑的知识，可以进一步认识、讨论这个问题。

1.1 集合

1. 本节首先从初中代数与几何涉及的集合实例入手，引出集合与集合的元素的概念，并且结合实例对集合的概念作了说明。然后，介绍了集合的常用表示方法，包括列举法、描述法，还给出了画图表示集合的例子。

2. 通过本节的学习，使学生达到以下要求：

- (1) 初步理解集合的概念，知道常用数集及其记法；
- (2) 初步了解“属于”关系的意义；
- (3) 初步了解有限集、无限集、空集的意义。

3. 本节的重点是集合的基本概念与表示方法，难点是运用集合的两种常用表示方法——列举法与描述法，正确表示一些简单的集合。

4. 点、直线、平面等概念都是原始概念。集合是集合论中的概念。开始接触集合概念时，主要是通过实例，对概念有一个初步认识。教科书给出的“一般地，某些指定的对象集在一起就成为一个集合，也简称集。”这句话，只是对集合概念的描述性说明。

5. 对教科书中给出常用数集的记法，应该注意以下两点：

- (1) 自然数集与非负整数集是相同的，也就是说，自然数集包括数 0；
- (2) 非负整数集内排除 0 的集，表示成 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 。 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{R}$ 等其他数集内排除 0 的集，也可以这样表示，例如，整数集内排除 0 的集，表示成 $\mathbf{Z}^*$ 。

国家标准定义自然数集 $\mathbf{N}$ 含元素 0。从数学本身的角度看，有其积极意义：一方面， $0 \in \mathbf{N}$ 后，可以建立集合的元素数组成的集合与自然数集 $\mathbf{N}$ 的一一对应关系。过去由于 0 不属于自然数集，空集的元素个数为 0，集合的元素数组成的集合与原自然数集之间无法建立自然的一一对应的关系。另一方面，0 是十进位数 $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ 中最小的数，有了 0，减法运算 $a - a$ 仍属于 $\mathbf{N}$ ，其中 $a \in \mathbf{N}$ 。

6. 教科书指出，集合中的元素是确定的，又是互异的。我们称之为集合中的元素具有确定性和互异性。在理解集合的概念时，要考虑集合中元素的这两个性质。

7. 本小节列举法与描述法所使用的集合的记法，依据的是国家标准如下的规定。

符 号	应 用	意义或读法	备注及示例
$\{, \dots, \}$	$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	诸元素 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 构成的集	也可用 $\{x_i, i \in I\}$, 这里的 I 表示指标集
$\{ \}$	$\{x \in A p(x)\}$	使命题 $p(x)$ 为真的 A 中诸元素之集	例如, $\{x \in \mathbf{R} x \leq 5\}$, 若从前后关系来看, 集 A 已很明确, 则可使用 $\{x p(x)\}$ 来表示, 例如 $\{x x \leq 5\}$

此外, $\{x \in A | p(x)\}$ 有时也可写成 $\{x \in A : p(x)\}$ 或 $\{x \in A; p(x)\}$.

8. 列举法与描述法各有优点, 应该根据具体问题确定采用哪种表示法. 要注意, 无限集一般不宜采用列举法, 因为不能将无限集中的元素一一列举出来, 而没有列举出来的元素往往难以确定.

1.2 子集、全集、补集

1. 本节分为两部分: 第一部分讲子集, 第二部分讲全集与补集.

第一部分先介绍集合与集合之间的“包含”与“相等”关系, 并引出子集的概念. 然后, 对比集合的“包含”与“相等”关系, 给出真子集的概念以及子集与真子集的有关性质.

第二部分是在子集概念的基础上讲述补集的概念, 并介绍了全集的概念.

2. 通过本节的学习, 使学生达到以下要求:

- (1) 了解集合的包含、相等关系的意义;
- (2) 理解子集、真子集的概念;
- (3) 理解补集的概念;
- (4) 了解全集的意义.

3. 本节的重点是子集、补集的概念, 难点是元素与子集、属于与包含之间的区别.

4. 要正确理解子集的概念. 一般地, 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 我们就说集合 A 是集合 B 的子集. 也就是说, 如果由任意 $x \in A$, 可以推出 $x \in B$, 那么集合 A 就是集合 B 的子集.

5. 在开始接触子集与真子集的符号时, 要提醒学生注意这些符号的方向不要搞错. 例如, $A \subseteq B$ 与 $B \supseteq A$ 是同义的, $A \subseteq B$ 与 $A \supseteq B$ 是不同的.

6. 要注意区分一些容易混淆的符号.

(1) $\in$ 与 $\subseteq$ 的区别: $\in$ 表示元素与集合之间的关系, 例如, $1 \in \mathbf{N}$, $-1 \notin \mathbf{N}$ 等; $\subseteq$ 表示集合与集合之间的关系, 例如, $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$, $\emptyset \subseteq \mathbf{R}$ 等.

(2) a 与 $\{a\}$ 的区别: 一般地, a 表示一个元素, 而 $\{a\}$ 表示只有一个元素 a 的集合. 例如, $1 \in \{1, 2, 3\}$, $0 \in \{0\}$, $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ 等, 不能写成 $0 = \{0\}$, $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$, $1 \subseteq \{1, 2, 3\}$.

(3) $\{0\}$ 与 $\emptyset$ 的区别: $\{0\}$ 是含有一个元素 0 的集合, $\emptyset$ 是不含任何元素的集合, 因此, $\emptyset \subseteq \{0\}$, 不能写成 $\emptyset = \{0\}$, $\emptyset \in \{0\}$.

7. 关于补集. 国家标准规定, 集合 A 中子集 B 的补集或余集记为 $\complement_A B$, 这里的“ $\complement$ ”是一个专门的符号, 补集的英文是 complementary set. 如果行文中集合 A 已经很明确, 则常常可以省去符号 A , 而记为 $\complement B$.

8. 与补集相关的概念是集合的差, 教科书中没有这个概念. 集合 A 与集合 B 之差或集合 A 减集合 B 记为 $A \setminus B$, 即 $A \setminus B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}$.

要注意, 上式等号右边与补集定义中的式子类似, 但意义不同. 在 $\complement_A B$ 中, 要求 B 是 A 的子集; 在 $A \setminus B$ 中, B 不一定是 A 的子集. 当 B 是 A 的子集的时候, 也可以写成 $\complement_A B = A \setminus B$.

1.3 交集、并集

1. 本节首先结合表示两个集合的图, 引出交集与并集的概念, 然后在完成一些练习的基础上, 介绍了交集与并集的简单性质.

2. 通过本节的学习, 使学生达到以下要求:

(1) 理解交集与并集的概念;

(2) 掌握有关集合的术语和符号, 并会用它们正确表示一些简单的集合.

3. 本节的重点是交集与并集的概念, 难点是理解交集与并集的概念、符号之间的区别与联系. 学习本节, 关键是要能达到会正确表示一些简单集合的目标.

4. 本节开始的图只是引出交集与并集概念的一个示意图, 要画如下 5 个图, 才能比较全面地表示两个集合 A 与 B 之间的关系 (图 1-1).

在教学时, 可以利用图 1-1 中的 5 个图做一些练习, 以巩固学生对交集与并集概念的理解. 例如, 可以让学生用集合的语言描述这几个图, 像图 1-1 (3) 是 $B \subseteq A$; 也可以让学生根据图求 $A \cap B$ 与 $A \cup B$, 像图 1-1 (4) 是 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$.

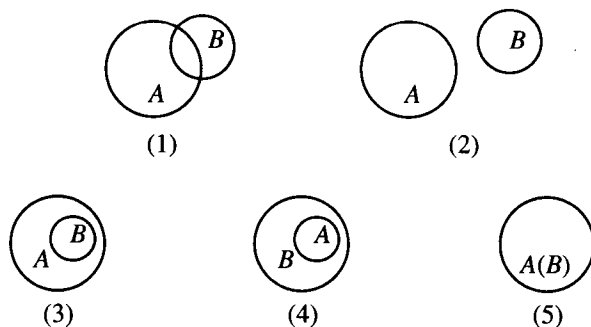


图 1-1

5. 教科书中指出, 由交集定义容易知道, 对于任何集合 A, B 有

$$A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A.$$

还指出, 由并集定义容易知道, 对于任何集合 A, B 有

$$A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A.$$

不必向学生讲述以上这些性质的证明, 学生通过示意图, 直观认识即可.

6. 学习有关集合的初步知识, 目的主要在于应用. 具体地说, 就是在学习其他知识时, 能理解其中的简单的集合概念和符号; 在处理简单的实际问题时, 能根据需要, 运用集合语言进行表述. 在安排训练时, 要把握一定的分寸, 不要搞偏题、怪题. 例如, 集合有关性质的证明, 一般不要求学生掌握. 又如, 有些可能混淆但在实际问题中并不多见的关系, 就不必故意编排在一起, 让学生进行辨析, 像 $\{\emptyset\}$ 与 $\emptyset$, $\{0\}$ 与 $\emptyset$, 等等.

1.4 含绝对值的不等式解法

1. 本节首先由实际问题引出含绝对值的不等式, 然后由易到难, 顺次介绍了 $|x| < a$ 与 $|x| > a (a > 0)$ 型、 $|ax + b| < c$ 与 $|ax + b| > c (c > 0)$ 型的不等式的解法.

2. 通过本节的学习, 使学生达到以下要求:

掌握 $|ax + b| < c$ 与 $|ax + b| > c (c > 0)$ 型的不等式的解法.

3. 本节的重点是 $|x| < a$ 与 $|x| > a (a > 0)$ 型的不等式的解法, 关键是对绝对值意义的理解.

4. 本节开始讲了一个有关商品质量的例子, 这是为了说明含绝对值的不等式是解决实际问题所需要的. 教学时, 还可以适当补充学生熟悉的实例.

5. 在学习含绝对值的不等式的解法时, 可以先复习初中数学学过的不等式的三条基本性质:

(1) 如果 $a > b$, 那么 $a + c > b + c$;

(2) 如果 $a > b$, $c > 0$, 那么 $ac > bc$;

(3) 如果 $a > b$, $c < 0$, 那么 $ac < bc$.

教学时可提醒学生, 性质 (3) 是不等式两边都乘以同一个负数, 不等号的方向要改变.

不等式的基本性质是解不等式的基础.

6. 关于 $|x| < a$ 与 $|x| > a (a > 0)$ 型不等式的解法, 教科书从具体例子入手讲述. 先考虑含绝对值的方程 $|x| = 2$ 的解, 由此出发, 根据绝对值的意义, 结合数轴表示, 得到了含绝对值的不等式 $|x| < 2$ 与 $|x| > 2$ 的解.

讲上面的例子时, 要注意向学生说明符号 “ $\cup$ ” 与逻辑联结词 “或” 的关系和意义.

7. 由具体的例子, 教科书归纳出一般的结论:

不等式 $|x| < a (a > 0)$ 的解集是

$$\{x | -a < x < a\};$$

不等式 $|x| > a (a > 0)$ 的解集是

$$\{x | x > a, \text{ 或 } x < -a\}.$$

对这个结论, 应根据绝对值的意义, 结合数轴表示进行讲解. 从数轴上看, $|x| < a (a > 0)$ 的解集是 $-a$ 与 a 之间的部分, $|x| > a (a > 0)$ 的解集是 $-a$ 左侧与 a 右侧的两部分.

8. 把不等式 $|x| < a$ 与 $|x| > a (a > 0)$ 中的 x 替换成 $ax + b$, 就可以得到 $|ax + b| < c$ 与 $|ax + b| > c (c > 0)$ 型的不等式的解法.

教科书中的例 1 与例 2, 就是 $|ax + b| < c$ 与 $|ax + b| > c (c > 0)$ 型的不等式. 在具体求解时, 可以先直接在 $|x| < a$ 与 $|x| > a (a > 0)$ 型不等式的解集中进行替换. 这时, 原不等式化成了一元一次不等式, 然后就可以根据不等式的基本性质求解了.

教学时, 要注意对

$$-c < ax + b < c \quad (c > 0)$$

型不等式的化简做必要的说明. 初学解这类不等式时, 为了方便, 如果所解 $|ax + b| < c$ 与 $|ax + b| > c (c > 0)$ 型的不等式中的 a 是负数, 可以先把 a 化成正数, 例如要解不等式 $|2 - x| < 5$, 可以先把它变形成 $|x - 2| < 5$, 再求解.

9. 教学时, 要注意控制教学要求. 本节的练习、习题中的不等式, 只限于绝对值号内为一元一次的代数式, 并且是数字系数. 只在习题 1.4 的最后, 编排了 $|x - a| < b (b > 0)$ 这样的简单的带有字母常数的题目.

1.5 一元二次不等式的解法

1. 本节首先对照学生已经了解的一元一次方程、一元一次不等式与一次函数的关系, 利用二次函数的图象, 说明一元二次方程、一元二次不等式与二次函数的关系, 得到利用二次函数图象求解一元二次不等式的方法. 然后, 说明一元二次不等式可以转化为一元一次不等式组, 由此引出简单的分式不等式的解法.

2. 通过本节的学习, 使学生达到以下要求:

(1) 掌握一元二次不等式的解法;

(2) 知道一元二次不等式可以转化为一元一次不等式组;

(3) 了解简单的分式不等式的解法.

3. 本节的重点是一元二次不等式的解法, 关键是理解一元二次方程、一元二次不等式与二次函数的关系.

4. 教科书首先利用一次函数的图象, 讨论一元一次方程、一元一次不等式与一次函数之间的关系, 进而导出一元一次不等式的解集. 这些基本内容学生都比较熟悉, 但是, 初中数学并没有专门讲述这种解法, 安排这些内容, 既可以复习、巩固初中的知识, 也为接下来讨论二次的问题做铺垫.

教学时, 要向学生讲清楚, 直线与 x 轴交点的横坐标, 就是对应的一元一次方程的根. 进一步, 结合直线的位置, 就可以确定对应的一元一次不等式的解集了.

5. 我们通过一个具体实例, 对一元二次方程、一元二次不等式与二次函数之间关系进行讨论.

教科书先给出二次函数 $y = x^2 - x - 6$ 的对应值表与图象, 然后, 由对应值表与图象得出:

当 $x = -2$, 或 $x = 3$ 时, $y = 0$, 即 $x^2 - x - 6 = 0$;

当 $x < -2$, 或 $x > 3$ 时, $y > 0$, 即 $x^2 - x - 6 > 0$;

当 $-2 < x < 3$ 时, $y < 0$, 即 $x^2 - x - 6 < 0$.

教科书中不但给出了函数的图象, 还给出了函数的对应值表, 这是因为结合函数的对应值表, 才能确定函数的图象与 x 轴交点的坐标, 进而确定对应的一元二次方程 $x^2 - x - 6 = 0$ 的根.

要确定一元二次不等式 $x^2 - x - 6 > 0$ 与 $x^2 - x - 6 < 0$ 的解集, 既要考虑一元二次方程 $x^2 - x - 6 = 0$ 的根, 还要考虑抛物线的开口方向. 在讲本例时, 可以只就本例的具体情形考虑, 暂不讨论抛物线的开口向下类型的问题.

6. 接下来, 教科书结合图象指出, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 与 x 轴的相关位置, 分为三种情况. 这可以由一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的三种取值情况 ($\Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0$) 来确定. 因此, 要分三种情况讨论, 寻求对应的一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 与 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集.

在讨论了 $a > 0$ 的情况以后, 再提出 $a < 0$ 的情况, 就不难处理了.

7. 可以结合教科书中的例 1 ~ 例 4, 指出解一元二次不等式的步骤. 先把二次项系数化成正数, 再解对应的一元二次方程, 最后, 根据一元二次方程的根, 结合不等号的方向, 写出不等式的解集.

8. 关于 $(x+4)(x-1) < 0$ 型的不等式, 有简便的解法, 由 $(x+4)(x-1) = 0$ 的根是 -4 与 1 , 不等号是 “ $<$ ”, 即可写出解集.

这里讲述 $(x+4)(x-1) < 0$ 型的不等式, 是为了介绍一种更一般的解法, 即把二次或二次以上的不等式化成一次不等式组的方法. 一方面, 这种解法可以为以后解比较复杂的不等式打基础; 另一方面, 这种方法也涉及了集合知识的应用.

9. 本章对分式不等式的基本要求, 仅限于可以化成一元二次不等式的类型. 在全章最后的复习参考题一的 B 组题中, 有两个简单的、相当于三次不等式的小题, 它们不属于基本要求, 但可以用简便的方法求解.

阅读材料 集合中元素的个数

1. 本阅读材料介绍了有关集合的元素个数的初步概念及简单的性质. 编排这个阅读材料是为了扩展学生的知识, 提高学生的兴趣. 在关于学生数学课外活动的材料中, 常常遇到与之有关的问题.

2. 通过这篇阅读材料,可以解决本章引言中的问题.顺便指出,由于章引言中的问题比较简单,不用有关集合元素个数的公式也可以处理.但是,用集合的语言描述这个问题,用集合的思想方法解决这个问题是数学中常用的方法.特别是涉及三个以上集合的并、交问题,这种思想方法显得更加重要.

3. 教师和学生可以通过具体的例子,利用图解法,得出三个有限集合 A 、 B 、 C 的并集中元素个数的公式:

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) = & \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) \\ & - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

4. 有限集中元素的个数,我们可以一一数出来.而对于无限集合,由于集合中元素的个数是无限的,我们不能一一数出来.但是,对于一些无限集,我们可以采用“一一对应”的方法,比较两个无限集中元素的个数,例如

$$\begin{array}{ccccccc} A = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ B = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\} \end{array}$$

其中 1 与 2, 2 与 4, $\dots$, n 与 $2n$ 对应. $B \subseteq A$, 这就是说,对于无限集 A ,其无限子集 B 中元素的个数可与集合 A 中元素的个数一样多.

无限集中元素个数的比较与有限集中元素个数的比较不同.有条件的话,教师可向学生多举一些实例进行说明.但此内容,不宜拓展,更不应作为学生的必学内容.

5. 复习参考题一 B 组的第 1 题,可用 3 中的公式解决.

1.6 逻辑联结词

1. 初中数学中已经有了一些关于命题的初步知识.在此基础上,本节首先由简单命题出发,给出含有“或”“且”“非”的复合命题的概念,然后借助真值表,给出判断复合命题真假的方法.

2. 通过本节的学习,使学生达到以下要求:

- (1) 了解含有“或”“且”“非”的复合命题的构成;
- (2) 理解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义.

3. 本节的重点是判断复合命题真假的方法,难点是对“或”的含义的理解.

4. 为了便于学生接受,初中数学给命题下的定义是:判断一件事情的句子,叫做命题.高中教科书的定义是:可以判断真假的语句叫做命题.说法不同,实质是一样的.语句是不是命题,关键在于能不能判断其真假,也就是判断其是否成立.不能判断真假的语句,就不能叫命题.例如,

“这是一棵大树”,
“ $x < 2$ ”.

都不能叫命题.由于“大树”没有界定,就不能判断“这是一棵大树”的真假.由于 x 是未知数,也不能判断“ $x < 2$ ”是否成立.

在教学时,不要在判断一个语句是不是命题上下功夫,因为这个工作过于复杂,要求学生能够从正面的例子了解命题的概念就可以了.

5. 与命题相关的概念是开语句.例如,

$$\begin{aligned} x &< 2, \\ x - 5 &= 3, \\ (x + y)(x - y) &= 0. \end{aligned}$$

上述语句中含有变量 x 或 y ，在没有给定这些变量的值之前，是无法确定语句真假的。这种含有变量的语句叫做开语句（有的逻辑书也称之为条件命题）。

我们可以把简单的开语句用逻辑联结词“或”“且”“非”连结起来，构成复合的开语句（有的逻辑书也称之为复合条件命题），这里的“或”“且”“非”与复合命题中的“或”“且”“非”符号与意义相同。

本章不对开语句进行专门讲述。在进行命题教学时，要注意命题与开语句的区别，特别在举有关逻辑联结词“或”“且”“非”的例子时，容易把两者混淆。

6. 如教学要求中所说，了解含有“或”“且”“非”复合命题的构成，指的是：给一个含有“或”“且”“非”的复合命题，能说出构成它的简单命题与逻辑联结词“或”“且”“非”；给出两个简单命题，能由它们构成含有逻辑联结词“或”“且”“非”的复合命题。

7. 在讲述逻辑联结词“或”“且”“非”时，可以适当联系集合与不等式的有关知识。集合中的“并”“交”“补”，与逻辑联结词“或”“且”“非”密切相关，例如，并集、交集的定义分别是：

$$A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}.$$

8. 对逻辑联结词“或”“且”“非”的理解，与判断复合命题真假分不开。逻辑中的“或”“且”“非”与日常用语中的“或”“且”“非”的意义不尽相同。要直接讲清楚它们的意义，比较困难，例如，像 $3 \geq 3$ 与 $3 \geq 2$ 这样的关系式，初接触时，学生可能不容易接受。因此，开始时，不必深讲，可以在学习了有关复合命题的真值表之后，再要求学生根据复合命题的真值表，对“或”“且”“非”加以理解。

9. 教科书中，三个真值表是按先易后难的顺序编排的。先讲“非 p ”形式复合命题的真假，再讲“ p 且 q ”形式复合命题的真假，“ p 或 q ”形式复合命题的真假理解起来最困难，放后面讲。

真值表中，根据简单命题的真假，判断由这些简单命题构成的复合命题的真假，不涉及简单命题的具体内容。

对于三个真值表，可做如下说明：

- (1) “非 p ”形式复合命题的真假与 p 的真假相反；
- (2) “ p 且 q ”形式复合命题当 p 与 q 同为真时为真，其他情况时为假；
- (3) “ p 或 q ”形式复合命题当 p 与 q 同为假时为假，其他情况时为真。

10. 在给出真值表之后，教科书又通过实例说明逻辑中的“或”与日常用语中的“或”的区别。“苹果是长在树上或长在地里”这句话按真值表判断，其为真，但在日常生活中，我们认为这句话是不妥的。在教学中，学生可能举出类似的例子，应告诉学生逻辑中的“或”与日常用语中的“或”是不同的，可以结合教科书中给出的两个日常生活中与“或”“且”有关的例子，进一步体会学习逻辑联结词“或”“且”的意义。

11. 为什么要学习逻辑呢？一方面数学基础需要用逻辑来阐明，另一方面计算机离不开数学逻辑，教科书中介绍的“或门电路”“与门电路”就是在这方面应用的实例。可以说计算机的“智能”装置是以数学逻辑为基础进行设计的。

让学生找出这样的例子，可以结合日常生活中电器的自动控制功能考虑，更可以充分发挥他们的想象力。由此，也就明确学习逻辑联结词“或”“且”的意义了。

12. 关于逻辑符号。“或”的符号是“ $\vee$ ”，例如，“ p 或 q ”可以记作“ $p \vee q$ ”；“且”的符号是“ $\wedge$ ”，例如，“ p 且 q ”可以记作“ $p \wedge q$ ”；“非”的符号是“ $\neg$ ”，例如，“非 p ”可以记作“ $\neg p$ ”。为了不增加学生负担，这部分没有使用这些符号，只是在后面讲否命题时，使用了符号“ $\neg$ ”。

1.7 四种命题

1. 本节首先从初中数学的命题知识出发, 给出四种命题的概念, 接着, 讲述四种命题的关系, 最后, 介绍反证法.

2. 通过本节的学习, 使学生达到以下要求:

(1) 初步理解四种命题及其关系;

(2) 初步掌握反证法.

3. 本节的重点是四种命题的关系.

4. 在初中数学中, 只学习了原命题与逆命题的初步知识, 否命题与逆否命题已经从初中数学中删除了. 符号“ $\neg$ ”叫做否定符号. “ $\neg p$ ”表示 p 的否定.

5. 关于逆命题、否命题与逆否命题, 也可以如下表述:

(1) 交换原命题的条件和结论, 所得的命题是逆命题;

(2) 同时否定原命题的条件和结论, 所得的命题是否命题;

(3) 交换原命题的条件和结论, 并且同时否定, 所得的命题是逆否命题.

6. 互为逆否的两个命题是等价的. 即对一个命题而言, 原命题与逆否命题、逆命题与否命题是等价的.

7. 关于例1中的第(1)小题, 有两种解答, 另一种解答如下.

原命题可以写成: 若一个数是负数的平方, 则这个数是正数.

逆命题: 若一个数是正数, 则它是负数的平方.

否命题: 若一个数不是负数的平方, 则这个数不是正数.

逆否命题: 若一个数不是正数, 则它不是负数的平方.

告诉学生两种解答都对就可以了, 不要在这里纠缠, 实际上, 例1中的第(2)小题也存在同样问题.

8. 教学时, 要注意控制教学要求. 本节的内容, 只涉及比较简单的命题, 而且命题的条件和结论比较明显. 不研究含有逻辑联结词“或”“且”“非”的命题的逆命题、否命题和逆否命题.

像习题1.7第2题的(1)小题: 写出命题“若 $x^2 + y^2 = 0$, 则 x, y 全为0”的逆命题、否命题与逆否命题. 这个命题常表示成“若 $x^2 + y^2 = 0$, 则 x 为0, 且 y 为0”, 这样, 问题就复杂了. 因此, 教科书的习题采用了变通的形式.

9. 需要指出, “若 p 则 q ”形式的命题, 也是一种复合命题. 其中的 p 与 q , 可以是命题, 也可以是开语句. 例如, 命题“若 $x^2 + y^2 = 0$, 则 x, y 全为0”, 其中的 p 与 q , 就是开语句. 对学生, 只要求能分清命题“若 p 则 q ”中的条件与结论就可以了, 不必考虑 p 与 q 是命题, 还是开语句.

10. 初中数学中有关反证法的内容, 要求比较低, 并且基本没有涉及代数命题. 考虑到高中数学学习的需要, 结合四种命题及其关系的讲授, 在本节加入了介绍反证法的内容.

学习反证法, 一是要注意加强对有关代数命题的训练, 二是教学要求要适当, 对反证法的掌握, 还有待于随着学习的深入, 逐步提高.

11. 教科书中反证法涉及代数命题的例、习题, 属于初中范围的, 比较简单. 实际上, 这些题目都可以用直接的方法进行证明, 不一定用反证法, 选取这些题, 主要是为了让学生熟悉反证法.

12. 在初中教科书中指出: 从命题结论的反面出发, 引出矛盾, 从而证明命题成立, 这样的证明方法叫做反证法. 对于反证法的概念, 本节未再给出, 沿用初中的说法就可以了.

13. 从逻辑角度看, 命题“若 p 则 q ”的否定, 是“ p 且非 q ”, 由此进行推理, 如果发生矛盾, 那么“ p 且非 q ”为假, 因此可知“若 p 则 q ”为真. 像这种证明“若 p 则 q ”为真的证明方法, 叫做反证法.

用反证法证明命题“若 p 则 q ”时, 可能出现以下三种情况:

- (1) 导出非 p 为真, 即与原命题的条件矛盾;
- (2) 导出 q 为真, 即与假设“非 q 为真”矛盾;
- (3) 导出一个恒假命题.

考虑到教科书只安排了初步的逻辑知识, 以上内容不必都向学生讲述.

1.8 充分条件与必要条件

1. 本节首先给出推断符号“ $\Rightarrow$ ”, 并引出充分条件与必要条件的意义, 在此基础上讲述了充要条件的初步知识.

2. 通过本节的学习, 使学生初步掌握充要条件.

3. 本节的重点与难点是关于充要条件的判断.

4. 学习本节, 要注意与前面有关逻辑初步知识内容的联系. 本节所讲的充分条件、必要条件与充要条件的知识, 主要是与判断“若 p 则 q ”形式命题的真假相关的. 本小节“若 p 则 q ”形式命题中的 p 与 q , 基本都是简单的, 而不是复合的. 即一般不含有逻辑联结词“或”“且”“非”, 并且, p 与 q 本身也不是“若 r 则 s ”的形式.

5. 关于“必要条件”的定义. 教科书在边空同时给出“内涵性定义”, 即若 $\neg q \Rightarrow \neg p$, 则称 q 是 p 的必要条件. 这样定义对理解“必要”的意义有帮助. 而由“ $p \Rightarrow q$ ”与“ $\neg q \Rightarrow \neg p$ ”等价, 可知 $p \Rightarrow q$, q 是 p 的必要条件.

6. 国家标准规定:

(1) 符号“ $\Rightarrow$ ”叫做推断符号. “ $p \Rightarrow q$ ”表示“若 p 则 q ”;也表示“ p 蕴含 q ”. “ $p \Rightarrow q$ ”也可写为“ $q \Leftarrow p$ ”, 有时也用“ $p \rightarrow q$ ”.

(2) 符号“ $\Leftrightarrow$ ”叫做等价符号. “ $p \Leftrightarrow q$ ”表示“ $p \Rightarrow q$ 且 $p \Leftarrow q$ ”;也表示“ p 等价于 q ”. “ $p \Leftrightarrow q$ ”有时也用“ $p \leftrightarrow q$ ”.

7. 数学上充分条件、必要条件的“充分”“必要”两词, 与日常用语中的“充分”“必要”意义相近. 要准确理解它们, 应该以数学定义为依据.

8. 教科书结合实例给出充分条件、必要条件与充要条件的概念. 要掌握它们, 主要还得通过对实例的考察和研究. 因此, 对学生的要求, 要有一个随着学习的深入, 逐步提高的过程.

9. 在进行有关充分条件、必要条件与充要条件的判定时, 既可能用到直接证法, 也可能用到间接证法. 反证法就是一种间接证法, 学习本节, 可以巩固反证法的内容.

小结与复习

1. 小结与复习分作三部分. 第一部分概括了本章所学的集合与简易逻辑的主要内容. 其中, 集合的知识包括集合的基本概念、集合与集合的关系、不等式解法等; 简易逻辑的知识包括逻辑联结词、四种命题、充要条件等. 第二部分分别提出了关于集合的五条学习要求和关于简易逻辑的三条学习要求, 并指出了学习中需要注意的几个问题. 第三部分给出了两道参考例题.

2. 复习集合的初步知识, 可以从两方面入手, 一方面是集合的有关概念之间的联系与区别; 另一方面, 也是更为主要的方面, 是集合知识的应用.

关于集合的概念, 主要是把握集合与元素、集合与集合这两个关系, 理解有关的术语和符号.

关于集合知识的应用, 可以考虑下面的内容:

(1) 本章引言中的例子, 可以利用集合语言表述, 用集合的思想方法解决问题;

(2) 有关不等式的解法, 既涉及交集、并集的概念, 又涉及集合的表示;

(3) 逻辑联结词“或”“且”“非”, 与集合中的“并”“交”“补”有密切联系, 两者可以相互对照、相互说明, 加深认识和理解.

(4) 中学数学的其他内容及日常生活中的应用, 像方程与方程组的解集、几何中的点集等等.

3. 本章只介绍了些简易逻辑的初步知识. 复习时, 主要抓住所学的知识, 通过对以前学过的数学知识的说明, 以及解决一些简单的问题, 达到理解、掌握简易逻辑知识的目的.

例如, 可以利用几何中的主要定理、复习四种命题及其关系; 可以利用一元二次方程根的判别式的有关内容, 复习充要条件的知识等等.

4. 本章的参考例题仅供教师选用. 复习时, 可以根据学生学习的实际进行调整.

参考例题中, 例2的第(2)小题的另一种说法.

因为

$$x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \text{ 或 } x = -y,$$

即“ $x^2 = y^2$ ”和“ $x = y$ 或 $x = -y$ ”是等价的, 所以, 它们的否定也是等价的. “ $x^2 = y^2$ ”的否定是“ $x^2 \neq y^2$ ”, “ $x = y$ 或 $x = -y$ ”的否定是“ $x \neq y$ 且 $x \neq -y$ ”. 因此

$$x^2 \neq y^2 \Leftrightarrow x \neq y \text{ 且 } x \neq -y.$$

III 习题参考解答

练习 (第5页)

1. (略)

2. $1 \in \mathbf{N}$, $0 \in \mathbf{N}$, $-3 \notin \mathbf{N}$, $0.5 \notin \mathbf{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$;

$1 \in \mathbf{Z}$, $0 \in \mathbf{Z}$, $-3 \in \mathbf{Z}$, $0.5 \notin \mathbf{Z}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Z}$;

$1 \in \mathbf{Q}$, $0 \in \mathbf{Q}$, $-3 \in \mathbf{Q}$, $0.5 \in \mathbf{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$;

$1 \in \mathbf{R}$, $0 \in \mathbf{R}$, $-3 \in \mathbf{R}$, $0.5 \in \mathbf{R}$, $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$.

练习 (第6页)

1. (1) $\{x \in \mathbf{N} \mid x > 10\}$, 无限集;

(2) $\{1, 2, 3, 6\}$, 有限集;

(3) $\{-2, 2\}$, 有限集;

(4) $\{2, 3, 5, 7\}$, 有限集.

2. (1) $\{x \mid x \text{ 是 } 4 \text{ 与 } 6 \text{ 的公倍数}\}$, 无限集;

(2) $\{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}^*\}$, 无限集;