中国科学院考研指定参考书

中国科学技术大学数学教学丛书

微积分

（下）

谢盛刚　李　娟　陈秋桂　编

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学技术大学数学教学丛书

微积分

(下)

谢盛刚　李　娟　陈秋桂　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书的前身是中国科学技术大学数学教研室编写的《高等数学导论》. 全书分上、下两册. 本书为下册, 主要内容包括: 空间解析几何, 多变量函数的微分学, 多变量函数的重积分, 曲线积分和曲面积分, 无穷级数, 广义积分和含参变量的积分, Fourier 分析. 本书基础理论完整严密, 论述简明扼要, 同时又避开了枝节问题的干扰, 使重点突出, 主线清楚.

本书适合于理工科大学本科一年级学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(下)/谢盛刚, 李娟, 陈秋桂编. —北京: 科学出版社, 2005
(中国科学技术大学数学教学丛书)
ISBN 7-03-014579-8

I. 微… II. ①谢… ②李… ③陈… III. 微积分-高等学校-教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 132403 号

责任编辑: 杨 波 赵 靖 / 责任校对: 宋玲玲
责任印制: 安春生 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 1 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2005 年 1 月第一次印刷 印张: 22 1/4
印数: 1—5 000 字数: 420 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈路通〉)

序　　言

本书分为上、下两册, 内容和大多数微积分教材差不多. 它的前身是中国科学技术大学数学教研室编写的《高等数学导论》(以下简称《导论》). 《导论》(包括出版前讲义形式的《导论》)作为非数学专业的微积分教科书, 在中国科学技术大学的大部分专业使用已有 20 多年. 长期的教学实践证明, 《导论》是一套优秀的微积分教材.

本书继承了《导论》注重基础, 论理严密, 叙述简明的特点, 对《导论》的内容进行了必要的增、删, 经过重新编写, 使所需授课(包括习题课)时间由原来的三学期共 230 学时, 缩减为现在的两学期共 196 学时.

本书与《导论》相比, 主要的改变有以下几点.

1. 将实数理论和可积性理论编在一起, 作为上册的最后一章. 我们这样处理的理由是: 1) 实数理论和极限理论都是微积分的基础理论, 对初学者而言又都是学习的难点. 将实数理论放在学完微积分之后再讲, 就分散了难点. 2) 在讲极限理论时, 对一些基于实数连续性的定理述而不证, 可以使学生不致陷入实数连续性理论的漩涡, 从而能集中精力学习一元微积分的基本理论和方法. 3) 某些对数学需求相对少一些的专业, 这一章可以部分选讲甚至完全不讲, 这样本书就可能适应不同层次教学的需要.

2. 对基础理论有适当加强. 例如对实数集的连续性、$\mathbf{R}^2$ 的完备性和外微分形式等的讨论都比《导论》有所深入.

3. 对本不属于微积分的内容进行了一定程度的精减. 1) 微分方程: 将原来的两章并成一章, 内容的选取仅以后续课程(如数理方程)和物理课程的教学需要为准, 对微分方程的理论不进行深入讨论. 那些想进一步学习微分方程理论的学生, 应当选修相应的专门课程. 2) 解析几何的内容也有相应删减, 原则上以满足多元微积分的教学需要为准.

4. 与物理关系较密切的部分, 主要是“场论”, 着重介绍其中的数学理论, 尽可能少牵涉物理问题. 把物理的问题留给物理教师去讲, 效果可能会好得多.

5. 对微积分理论延伸部分的内容(级数, 含参变量积分, Fourier 分析)主要介绍其基本方法, 在理论上不进行过多的讨论, 一些重要但证明较长的定理(如 Fourier 级数的收敛定理)一律述而不证.

6. 某些定理的证明做了改进, 使之更为简明易懂.

7. 更新了部分例题和习题.

我们认为，通过重新编写，本书保持了《导论》基础理论完整严密，论述简明扼要的特点，同时又避开了枝节问题的干扰，使重点突出，主线清楚.

本书内容比较丰富，适合于理工科大学本科一年级使用. 讲完本书大约需要 195~200 学时(包括习题课)，相当于两学期每周 6 学时的教学总时数(已考虑放假、考试等减少的课时). 根据需要，删减一部分教学内容，则可以把总授课时数削减至 170 学时左右.

凡是我们认为可以不讲的内容，在相应条目的标号后面都注有“*”号. 删去这些内容，不会在教学中出现前后衔接方面的问题，但由于它们在理论上或实用上的重要性，建议尽可能都列入教学内容，但建议不列入考试范围.

习题附在每一节的正文之后，大多数章节的习题都偏多，不必全部布置给学生. 计算题的答案作为附录放在书后. 所有答案均经过反复核对，但仍难免有个别错误，希望读者谅解指正.

第 1 章、第 2 章和第 4 章附有一些补充题，主要是供那些对数学有兴趣又学有余力的学生作为课外练习之用. 教师也可以选一些作为习题课上的例题.

在本书每一册的附录中都附有教学参考进度，详细注明了每一部分所需的课时数，其中$(x+y)$表示需 x 课时讲授课，y 课时习题课，这主要是为教学经验不足的青年教师提供一个较合理的教学时间表，至于有经验的教师，完全可以按照自己的习惯和风格安排教学.

作者衷心感谢龚昇教授的关怀和指导. 作者还对程艺、叶向东、章璞、张韵华和戴小莉等同志的支持和帮助表示衷心的感谢.

本书的初稿曾印成讲义在校内多个专业使用，所有使用过讲义的教师在全身心投入教学的过程中，都对讲义提出了大量修改意见. 可以说本书是众多教师集体劳动的成果. 我们衷心感谢这些教师的无私帮助.

作者殷切期待来自读者对本书的批评和建议.

作　者

2003 年 12 月

于合肥中国科学技术大学

目　　录

第 7 章　空间解析几何

7.1　空间直角坐标系

与平面解析几何类似，为了使空间的几何图形与代数方程联系起来，必须在空间中引进坐标系，以使空间中的点与有序数组对应起来．最常用的坐标系是空间直角坐标系．

过空间一定点 O 作三条互相垂直的直线，在这些直线上取定一个相同的长度单位，再各选定一个方向作为正向，这样就有了三条数轴，依次记为 x 轴，y 轴和 z 轴．它们构成了一个空间直角坐标系，记作 $Oxyz$．称定点 O 为坐标原点，称三条轴为坐标轴，也称 x 轴为横轴，y 轴为纵轴，z 轴为立轴．通常我们还规定三坐标轴构成右手系统，即用右手握住 z 轴，且大姆指指向 z 轴的正向，这时其余四指弯曲的方向恰是从 x 轴正向沿最小角度转到 y 轴正向的旋转方向 (见图 7.1)．三坐标轴两两确定一张平面，可得到互相垂直的三张平面 Oxy, Oyz 和 Ozx, 称为坐标平面．这些平面把空间分成八个区域，称为八个卦限 (见图 7.2)．

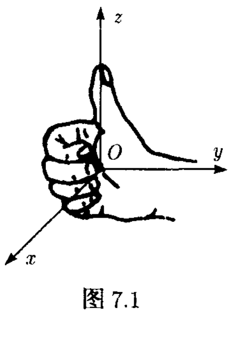

图 7.1

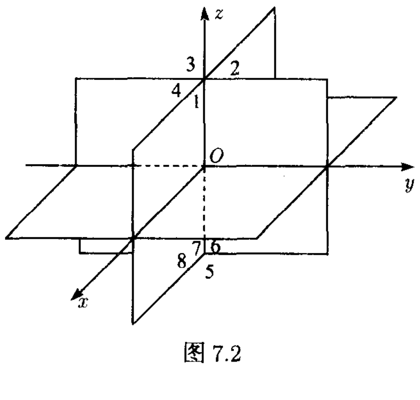

图 7.2

设 P 为空间中的任意一点，过点 P 分别作垂直于 x 轴、y 轴与 z 轴的三张平面，它们与各坐标轴的交点依次为 A, B, C(见图 7.3)．设这些交点在所在坐标轴上对应的实数分别是 a, b, c, 于是点 P 决定了一个有序实数组 (a, b, c)．反之，如果给出一个有序实数组 (a, b, c), 并过 x 轴、y 轴、z 轴上坐标为 a, b, c 的点 A, B, C 作三张平面，分别垂直于其所在的坐标轴，则这些平面就相交于空间一点 P．这样一来，空间的点 P 与有序实数组 (a, b, c) 间就建立了一一对应关系．有序数组 (a, b, c)

称为点 P 的直角坐标，记作 $P(a,b,c)$, 其中 a 称为横标，b 称为纵标，c 称为立标.

由定义可知，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$. 若点 P 在 x 轴上，则其坐标为 $(a,0,0)$; 同样，y 轴上的点，坐标是 $(0,b,0)$; 而 z 轴上的点，坐标是 $(0,0,c)$. 若点 P 在平面 Oxy 上，则其坐标为 $(a,b,0)$; 同样，平面 Ozx 上的点，坐标是 $(a,0,c)$; 平面 Oyz 上的点，坐标是 $(0,b,c)$. 容易看出，在八个卦限中，有一个卦限内的每一点的横、纵、立标全为正，称它为第一卦限，而只有横标是负的卦限称为第二卦限，其余卦限的称号如图 7.2 所示.

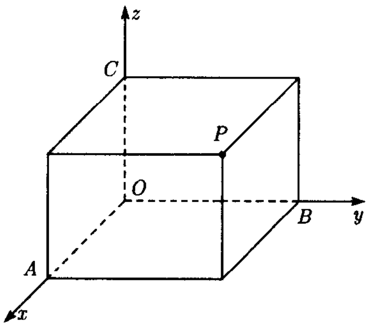

图 7.3

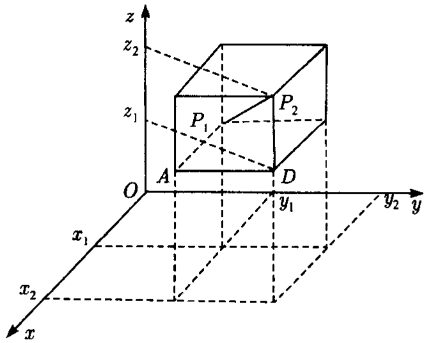

图 7.4

应用点的坐标概念，可以导出空间两点间的距离公式.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点，过点 P_1 与 P_2 分别作垂直于各坐标轴的平面，相交而成一长方体 (见图 7.4), 它的三条棱长各是

$$P_1A=|x_2-x_1|,\quad AD=|y_2-y_1|,\quad DP_2=|z_2-z_1|.$$

由于 P_1 与 P_2 的距离等于该长方体对角线的长，故得

$$\begin{aligned}P_1P_2^2&=P_1A^2+AD^2+DP_2^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\end{aligned}$$

或开方后给出

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

这就是空间两点 P_1 与 P_2 间的距离公式.

例 7.1.1　求 z 轴上一点，使该点与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 的距离相等.

解　设所求的点为 $M(0,0,z)$, 则由两点间的距离公式可得

$$AM=\sqrt{4^2+(-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{66-14z+z^2},$$
$$BM=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(z+2)^2}=\sqrt{38+4z+z^2}.$$

由题设 $AM = BM$, 所以

$$66 - 14z + z^2 = 38 + 4z + z^2,$$

解得 $z = 14/9$, 故所求之点为 $(0, 0, 14/9)$.

习 题 7.1

1. 指出下列各点在哪条坐标轴上或哪个坐标平面上.

(1) $(-4, 0, 0)$; (2) $(0, -7, 0)$;

(3) $(0, 7, 2)$; (4) $(-5, 0, 3)$.

2. 指出下列各点位于第几卦限.

(1) $(2, -1, 3)$; (2) $(-1, -2, 4)$;

(3) $(1, 4, -3)$; (4) $(-1, -2, -3)$;

(5) $(1, -1, -1)$; (6) $(-2, 1, -3)$.

3. 设某三点与给定点 (a, b, c) 分别对称于下列坐标平面: (1) Oxy; (2) Oyz; (3) Ozx. 求它们的坐标.

4. 设某四点与给定点 (a, b, c) 分别对称于: (1) x 轴; (2)y 轴; (3) z 轴; (4) 原点 O. 求它们的坐标.

5. 求点 $P(4, -3, 5)$ 到坐标原点以及到各坐标轴的距离.

6. 在 Oyz 平面上求一点 P, 使它与三个已知点 $A(3, 1, 2), B(4, -2, -2)$ 及 $C(0, 5, 1)$ 等距离.

7.2 向 量 代 数

7.2.1 向量的概念

在研究力学与物理学时, 经常会遇到这样一些量, 仅知道它们数值的大小是不够的, 要完全表示它们, 还必须同时指出它们的方向, 例如速度, 加速度, 力等等. 这种既有大小又有方向的量称为向量. 我们可以用一个有向线段来表示它, 线段的长度表示它的大小, 线段的方向表示它的方向. 以 A 为起点, B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$(见图 7.5). 还常用小写的粗体字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots$ 来记向量.

如果两个向量的大小相等、方向相同, 就称这两个向量是相等的. 如图 7.5 中, $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 是相等的向量, 记作

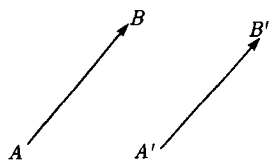

图 7.5

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

从两个向量相等的定义可知，一个向量平行移动后，成为与原来向量相等的向量，所以向量的起点可以放置在空间的任意一点. 这种能任意平移的向量称为自由向量. 必须注意，在实际问题中，有些向量不能平移，例如一个力，它的作用点只能沿力的作用线移动，而不能移向任意点，这种只能沿一直线移动的向量称为滑动向量. 今后没有特别说明，我们只讨论自由向量.

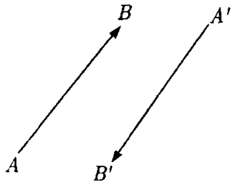

图 7.6

如果两个向量的大小相等而方向相反，则称这两个向量为相反向量. 如图 7.6 所示，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 就是相反向量，记作 $\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$. 因此又称 $\overrightarrow{A'B'}$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 的负向量.

向量的长度又称为向量的模. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模用 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示. 模为 1 的向量称为单位向量. 模为零的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$. 显然，零向量的起点和它的终点是重合的，所以它没有确定的方向. 我们规定，一切零向量都相等.

7.2.2　向量的加法与数乘

将物理学中的速度、力等的合成法则加以抽象，就得到向量之和的定义.

设给定具有共同起点 O 的两个向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，则以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$ (见图 7.7) 就称为这两个向量的和，记作

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},$$

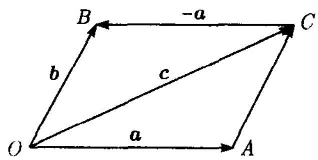

图 7.7

或简写成

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种求和的方法称为平行四边形法则.

从图 7.7 可知 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，故得

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}.$$

由此可推出求两个向量的和的三角形法则.

在向量 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 引向量 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，则以 O 为起点，C 为终点的封口向量 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和.

特别，如果两个向量在同一直线上，则它们的和就是这样一个向量：当两向量同向时，和向量的方向与原向量的方向相同，其模等于两向量的模之和；当两向量反向时，和向量的方向与模较大的向量的方向相同，而其模等于两向量的模之差.

如果两个向量是相反向量，则其和显然为零向量，就是

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\mathbf{0}.$$

显然，还有

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

从三角形法则容易证明向量的加法满足交换律，即

$$a + b = b + a.$$

从图 7.8 不难看出，向量的加法满足结合律

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

因而可以略去括号而记

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$

向量求和的三角形法则可推广到多个向量的情形，例如在 a 的终点引向量 b，再在 b 的终点引向量 c，则由 a 的起点至 c 的终点所引的向量 d 就是 a, b, c 的和 (见图 7.8).

向量的减法与数量的减法一样，定义为加法的逆运算.

如果向量 a 与 b 的和是向量 c，则向量 b 就定义为向量 c 与 a 之差，记作

$$b = c - a.$$

从图 7.7 可见

$$b = c + (-a).$$

于是得到减法的法则：若要从向量 c 减去向量 a，就只须把 a 的负向量 $-a$ 加到 c 上去.

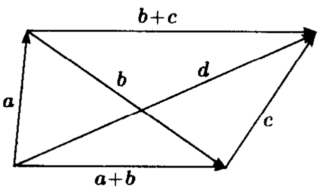

图 7.8

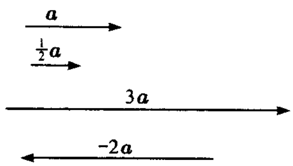

图 7.9

现在再来考虑向量与数的乘积.

设有向量 a 和数 λ，则其乘积表示这样一个向量，它的模等于向量 a 的模之 $|\lambda|$ 倍，当 λ 大于零时它与 a 同向，当 λ 小于零时与 a 反向 (见图 7.9).

由定义可知

$$0a = 0.$$

显然又有

$$(-1)a = -a.$$