

中国科学院考研指定参考书

中国科学技术大学数学教学丛书

微积分

(下)

谢盛刚 李 娟 陈秋桂 编

 科学出版社
www.sciencep.com

中国科学技术大学数学教学丛书

微 积 分

(下)

谢盛刚 李 娟 陈秋桂 编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书的前身是中国科学技术大学数学教研室编写的《高等数学导论》. 全书分上、下两册. 本书为下册, 主要内容包括: 空间解析几何, 多变量函数的微分学, 多变量函数的重积分, 曲线积分和曲面积分, 无穷级数, 广义积分和含参变量的积分, Fourier 分析. 本书基础理论完整严密, 论述简明扼要, 同时又避免了枝节问题的干扰, 使重点突出, 主线清楚.

本书适合于理工科大学本科一年级学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(下)/谢盛刚, 李娟, 陈秋桂编. —北京: 科学出版社, 2005
(中国科学技术大学数学教学丛书)

ISBN 7-03-014579-8

I. 微… II. ①谢… ②李… ③陈… III. 微积分-高等学校-教材
IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 132403 号

责任编辑: 杨 波 赵 靖 / 责任校对: 宋玲玲

责任印制: 安春生 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年1月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2005年1月第一次印刷 印张: 22 1/4

印数: 1—5 000 字数: 420 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈路通〉)

《中国科学技术大学数学教学丛书》编委会

主 编 程 艺

顾 问 (按汉语拼音排序)

陈希孺 方兆本 冯克勤 龚 昇 李翊神

石钟慈 史济怀

编 委 陈发来 陈 卿 陈祖墀 侯定丕 胡 森

蒋继发 李尚志 林 鹏 刘儒勋 刘太顺

缪柏其 苏 淳 吴耀华 徐俊明 叶向东

章 璞 赵林城

序 言

本书分为上、下两册,内容和大多数微积分教材差不多.它的前身是中国科学技术大学数学教研室编写的《高等数学导论》(以下简称《导论》).《导论》(包括出版前讲义形式的《导论》)作为非数学专业的微积分教科书,在中国科学技术大学的大部分专业使用已有 20 多年.长期的教学实践证明,《导论》是一套优秀的微积分教材.

本书继承了《导论》注重基础,论理严密,叙述简明的特点,对《导论》的内容进行了必要的增、删,经过重新编写,使所需授课(包括习题课)时间由原来的三学期共 230 学时,缩减为现在的两学期共 196 学时.

本书与《导论》相比,主要的改变有以下几点.

1. 将实数理论和可积性理论编在一起,作为上册的最后一章.我们这样处理的理由是:1) 实数理论和极限理论都是微积分的基础理论,对初学者而言又都是学习的难点.将实数理论放在学完微积分之后再讲,就分散了难点.2) 在讲极限理论时,对一些基于实数连续性的定理述而不证,可以使学生不致陷入实数连续性理论的漩涡,从而能集中精力学习一元微积分的基本理论和方法.3) 某些对数学需求相对少一些的专业,这一章可以部分选讲甚至完全不讲,这样本书就可能适应不同层次教学的需要.

2. 对基础理论有适当加强.例如对实数集的连续性、 $\mathbf{R}^2$ 的完备性和外微分形式等的讨论都比《导论》有所深入.

3. 对本不属于微积分的内容进行了一定程度的精减.1) 微分方程:将原来的两章并成一章,内容的选取仅以后续课程(如数理方程)和物理课程的教学需要为准,对微分方程的理论不进行深入讨论.那些想进一步学习微分方程理论的学生,应当选修相应的专门课程.2) 解析几何的内容也有相应删减,原则上以满足多元微积分的教学需要为准.

4. 与物理关系较密切的部分,主要是“场论”,着重介绍其中的数学理论,尽可能少牵涉物理问题.把物理的问题留给物理教师去讲,效果可能会好得多.

5. 对微积分理论延伸部分的内容(级数,含参变量积分,Fourier 分析)主要介绍其基本方法,在理论上不进行过多的讨论,一些重要但证明较长的定理(如 Fourier 级数的收敛定理)一律述而不证.

6. 某些定理的证明做了改进,使之更为简明易懂.

7. 更新了部分例题和习题.

我们认为,通过重新编写,本书保持了《导论》基础理论完整严密,论述简明扼要的特点,同时又避开了枝节问题的干扰,使重点突出,主线清楚.

本书内容比较丰富,适合于理工科大学本科一年级使用.讲完本书大约需要195~200学时(包括习题课),相当于两学期每周6学时的教学总时数(已考虑放假、考试等减少的课时).根据需要,删减一部分教学内容,则可以把总授课时数削减至170学时左右.

凡是我们认为可以不讲的内容,在相应条目的标号后面都注有“*”号.删去这些内容,不会在教学中出现前后衔接方面的问题,但由于它们在理论上或实用上的重要性,建议尽可能都列入教学内容,但建议不列入考试范围.

习题附在每一节的正文之后,大多数章节的习题都偏多,不必全部布置给学生.计算题的答案作为附录放在书后.所有答案均经过反复核对,但仍难免有个别错误,希望读者谅解指正.

第1章、第2章和第4章附有一些补充题,主要是供那些对数学有兴趣又学有余力的学生作为课外练习之用.教师也可以选一些作为习题课上的例题.

在本书每一册的附录中都附有教学参考进度,详细注明了每一部分所需的课时数,其中 $(x+y)$ 表示需 x 课时讲授课, y 课时习题课,这主要是为教学经验不足的青年教师提供一个较合理的教学时间表,至于有经验的教师,完全可以按照自己的习惯和风格安排教学.

作者衷心感谢龚昇教授的关怀和指导.作者还对程艺、叶向东、章璞、张韵华和戴小莉等同志的支持和帮助表示衷心的感谢.

本书的初稿曾印成讲义在校内多个专业使用,所有使用过讲义的教师在全身心投入教学的过程中,都对讲义提出了大量修改意见.可以说本书是众多教师集体劳动的成果.我们衷心感谢这些教师的无私帮助.

作者殷切期待来自读者对本书的批评和建议.

作 者

2003年12月

于合肥中国科学技术大学

目 录

第 7 章 空间解析几何	1
7.1 空间直角坐标系	1
习题 7.1	3
7.2 向量代数	3
7.2.1 向量的概念	3
7.2.2 向量的加法与数乘	4
7.2.3 向量的坐标	7
7.2.4 向量的数量积	11
7.2.5 向量的向量积	15
7.2.6 向量的混合积	19
习题 7.2	21
7.3 平面与直线	23
7.3.1 平面的方程	23
7.3.2 两平面的关系	25
7.3.3 点到平面的距离	27
7.3.4 直线的方程	28
7.3.5 两直线的位置关系	30
7.3.6 点到直线的距离	32
7.3.7 直线与平面的关系	32
习题 7.3	34
7.4 常见曲面	37
7.4.1 柱面	37
7.4.2 旋转曲面	38
7.4.3 椭球面	39
7.4.4 单叶双曲面	40
7.4.5 双叶双曲面	41
7.4.6 二次锥面	42
7.4.7 椭圆抛物面	43
7.4.8 双曲抛物面	44
习题 7.4	45
7.5 空间坐标变换	46
7.5.1 坐标系的平移	46

7.5.2 球坐标	47
习题 7.5	48
第 8 章 多变量函数的微分学	49
8.1 平面点集及 $\mathbf{R}^2$ 的完备性	49
8.1.1 平面点集的一些基本概念	49
8.1.2 开集与闭集	51
8.1.3 连通集	51
8.1.4 $\mathbf{R}^2$ 的完备性	53
习题 8.1	54
8.2 映射及其连续性	55
8.2.1 映射、多元函数、向量值函数的概念	55
8.2.2 多元函数的极限	57
8.2.3 多元函数的连续性	58
8.2.4 映射的极限和连续性	59
习题 8.2	59
8.3 多变量函数的微分和偏微商	61
8.3.1 多变量函数的微分	61
8.3.2 多元函数的偏导数	61
8.3.3 高阶偏微商	64
习题 8.3	66
8.4 复合函数的微分法	68
8.4.1 复合函数求导的链式法则	68
8.4.2* Jacobi 矩阵	71
8.4.3 方向导数、梯度	72
8.4.4 一阶微分的形式不变性	74
8.4.5 例题	74
习题 8.4	75
8.5 隐函数的微分法	77
8.5.1 多元方程所确定的隐函数的存在定理	77
8.5.2 由方程组所确定的隐函数组	80
习题 8.5	82
8.6 向量值函数的微分法	85
8.6.1 一元向量值函数的微分法	85
8.6.2 二元向量值函数的微分法	86
8.6.3 隐式曲面的法向量和两隐式曲面交线的切向量	89
习题 8.6	92

8.7 多元函数的 Taylor 公式与极值	93
8.7.1 二元函数的 Taylor 公式	93
8.7.2 多变量函数的极值	95
8.7.3 条件极值	98
习题 8.7	105
第 9 章 多变量函数的重积分	108
9.1 二重积分	108
9.1.1 二重积分的概念	108
9.1.2 二维闭区间上二重积分的定义	109
9.1.3 二维闭区间上二重积分的累次积分法	110
9.1.4 平面有界集上二重积分的定义和性质	112
9.1.5* 关于面积和二重积分的定义	114
9.1.6 有界集上二重积分的累次积分法	116
习题 9.1	120
9.2 二重积分的变量代换	121
9.2.1 曲线坐标和面积元素	121
9.2.2 二重积分的变量代换	123
9.2.3 例题	124
9.2.4 广义二重积分	128
习题 9.2	130
9.3 三重积分	132
9.3.1 三重积分的定义	132
9.3.2 三重积分的累次积分法	133
9.3.3 三重积分的变量代换	138
习题 9.3	140
9.4 重积分应用举例	142
9.4.1 重心与转动惯量	142
9.4.2 物体的引力	146
习题 9.4	148
第 10 章 曲线积分和曲面积分	149
10.1 第一型曲线积分	149
10.1.1 空间曲线的弧长	149
10.1.2 第一型曲线积分	152
习题 10.1	155
10.2* 空间曲线的曲率	156
10.2.1 主法向量和副法向量	156

10.2.2 空间曲线的曲率·····	157
10.2.3 平面曲线的曲率·····	158
10.2.4 平面曲线的曲率圆·····	159
习题 10.2·····	160
10.3 第一型曲面积分·····	160
10.3.1 曲面的面积·····	160
10.3.2 第一型曲面积分·····	164
习题 10.3·····	166
10.4 第二型曲线积分·····	167
10.4.1 定向曲线·····	167
10.4.2 第二型曲线积分的定义·····	168
10.4.3 第二型曲线积分的计算与性质·····	168
10.4.4 Green 定理·····	172
习题 10.4·····	174
10.5 第二型曲面积分·····	175
10.5.1 双侧曲面及其定向·····	175
10.5.2 第二型曲面积分的定义·····	177
10.5.3 第二型曲面积分的计算·····	177
10.5.4 第二型曲面积分的性质·····	178
10.5.5 有向面积元素·····	178
10.5.6 例子·····	179
习题 10.5·····	183
10.6 Gauss 定理和 Stokes 定理·····	184
10.6.1 向量场的散度·····	184
10.6.2 Gauss 定理·····	184
10.6.3 Stokes 定理·····	188
10.6.4 旋度·····	190
习题 10.6·····	192
10.7 保守场·····	194
10.7.1 恰当微分形式和有势场·····	194
10.7.2 全微分的积分·····	195
10.7.3 保守场·····	195
10.7.4 无旋场·····	197
10.7.5 全微分方程·····	199
习题 10.7·····	200

10.8* 外微分形式	202
10.8.1 积分中的定向	202
10.8.2 基本外微分形式及其不变性	205
10.8.3 外微分形式和外微分形式的外积	207
10.8.4 外微分形式的外微分	208
10.8.5 Stokes 公式	209
10.8.6 恰当微分形式	210
习题 10.8	212
10.9 Hamilton 算符	212
习题 10.9	215
第 11 章 无穷级数	216
11.1 数项级数	216
11.1.1 无穷级数的基本概念	216
11.1.2 正项级数	218
11.1.3 级数收敛的一般判别法	224
11.1.4 绝对收敛与条件收敛	225
11.1.5 分部求和法	227
习题 11.1	229
11.2 函数列和函数项级数	231
11.2.1 函数列和函数项级数的收敛性	231
11.2.2 函数列和函数项级数的一致收敛性	232
11.2.3 一致收敛的函数列和一致收敛级数的性质	236
习题 11.2	238
11.3 幂级数和 Taylor 展式	240
11.3.1 幂级数的收敛半径	240
11.3.2 幂级数的性质	243
11.3.3 函数的 Taylor 展开式	247
11.3.4 某些初等函数的 Taylor 展开式	249
习题 11.3	252
11.4 级数的应用	254
11.4.1 微分方程的幂级数解	254
11.4.2 Stirling 公式	257
习题 11.4	259
第 12 章 广义积分和含参变量的积分	260
12.1 广义积分	260
12.1.1 无穷积分的收敛性	260

12.1.2 收敛的精细判别法	262
12.1.3 无界函数积分的收敛判别法	264
习题 12.1	266
12.2 含参变量的常义积分	267
12.2.1 含参变量的常义积分的性质	267
12.2.2 积分限依赖于参变量的积分的性质	270
习题 12.2	272
12.3 含参变量的广义积分	273
12.3.1 含参变量的广义积分的一致收敛性	273
12.3.2 一致收敛积分的性质	276
12.3.3 几个重要的积分	280
习题 12.3	284
12.4 Euler 积分	286
12.4.1 Γ 函数的性质	286
12.4.2 B 函数的性质	288
习题 12.4	291
第 13 章 Fourier 分析	293
13.1 周期函数的 Fourier 级数	293
13.1.1 三角函数系的正交性和 Fourier 级数	293
13.1.2 偶函数与奇函数的 Fourier 级数	297
13.1.3 任意周期的情形	299
13.1.4 有限区间上的函数的 Fourier 级数	301
13.1.5 Fourier 级数的复数形式	306
13.1.6 Bessel 不等式	307
习题 13.1	310
13.2 广义 Fourier 级数	312
13.2.1 广义 Fourier 级数	312
13.2.2 Bessel 不等式和正交函数系的完备性	314
习题 13.2	316
13.3 Fourier 变换	316
13.3.1 Fourier 积分	316
13.3.2 Fourier 变换	318
13.3.3 Fourier 变换的性质	321
习题 13.3	324
附录	326
A1 参考答案	326
A2 参考教学进度	342

第7章 空间解析几何

7.1 空间直角坐标系

与平面解析几何类似,为了使空间的几何图形与代数方程联系起来,必须在空间中引进坐标系,以使空间中的点与有序数组对应起来.最常用的坐标系是空间直角坐标系.

过空间一定点 O 作三条互相垂直的直线,在这些直线上取定一个相同的长度单位,再各选定一个方向作为正向,这样就有了三条数轴,依次记为 x 轴, y 轴和 z 轴.它们构成了一个空间直角坐标系,记作 $Oxyz$.称定点 O 为坐标原点,称三条轴为坐标轴,也称 x 轴为横轴, y 轴为纵轴, z 轴为立轴.通常我们还规定三坐标轴构成右手系统,即用右手握住 z 轴,且大拇指指向 z 轴的正向,这时其余四指弯曲的方向恰是从 x 轴正向沿最小角度转到 y 轴正向的旋转方向(见图 7.1).三坐标轴两两确定一张平面,可得到互相垂直的三张平面 Oxy, Oyz 和 Ozx ,称为坐标平面.这些平面把空间分成八个区域,称为八个卦限(见图 7.2).

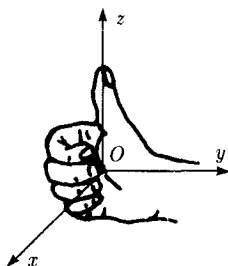


图 7.1

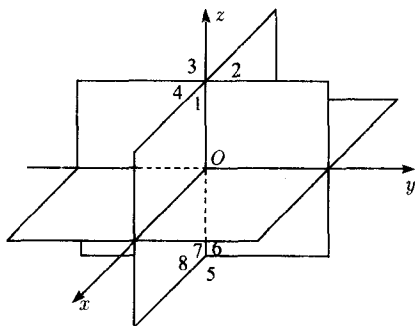


图 7.2

设 P 为空间中的任意一点,过点 P 分别作垂直于 x 轴、 y 轴与 z 轴的三张平面,它们与各坐标轴的交点依次为 A, B, C (见图 7.3).设这些交点在所在坐标轴上对应的实数分别是 a, b, c ,于是点 P 决定了一个有序实数组 (a, b, c) .反之,如果给出一个有序实数组 (a, b, c) ,并过 x 轴、 y 轴、 z 轴上坐标为 a, b, c 的点 A, B, C 作三张平面,分别垂直于其所在的坐标轴,则这些平面就相交于空间一点 P .这样一来,空间的点 P 与有序实数组 (a, b, c) 间就建立了一一对应关系.有序数组 (a, b, c)

称为点 P 的直角坐标, 记作 $P(a, b, c)$, 其中 a 称为横标, b 称为纵标, c 称为立标.

由定义可知, 原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$. 若点 P 在 x 轴上, 则其坐标为 $(a, 0, 0)$; 同样, y 轴上的点, 坐标是 $(0, b, 0)$; 而 z 轴上的点, 坐标是 $(0, 0, c)$. 若点 P 在平面 Oxy 上, 则其坐标为 $(a, b, 0)$; 同样, 平面 Ozx 上的点, 坐标是 $(a, 0, c)$; 平面 Oyz 上的点, 坐标是 $(0, b, c)$. 容易看出, 在八个卦限中, 有一个卦限内的每一点的横、纵、立标全为正, 称它为第一卦限, 而只有横标是负的卦限称为第二卦限, 其余卦限的称号如图 7.2 所示.

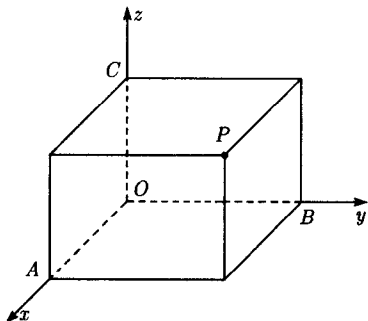


图 7.3

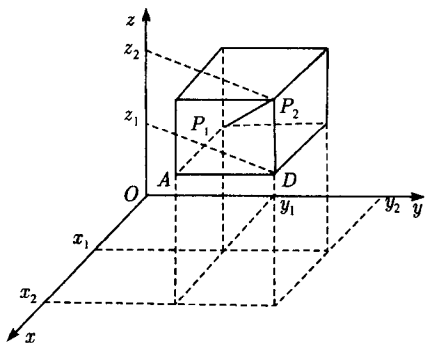


图 7.4

应用点的坐标概念, 可以导出空间两点间的距离公式.

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两点, 过点 P_1 与 P_2 分别作垂直于各坐标轴的平面, 相交而成一长方体 (见图 7.4), 它的三条棱长各是

$$P_1A = |x_2 - x_1|, \quad AD = |y_2 - y_1|, \quad DP_2 = |z_2 - z_1|.$$

由于 P_1 与 P_2 的距离等于该长方体对角线的长, 故得

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= P_1A^2 + AD^2 + DP_2^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \end{aligned}$$

或开方后给出

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

这就是空间两点 P_1 与 P_2 间的距离公式.

例 7.1.1 求 z 轴上一点, 使该点与点 $A(-4, 1, 7)$ 和点 $B(3, 5, -2)$ 的距离相等.

解 设所求的点为 $M(0, 0, z)$, 则由两点间的距离公式可得

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (z - 7)^2} = \sqrt{66 - 14z + z^2}, \\ BM &= \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (z + 2)^2} = \sqrt{38 + 4z + z^2}. \end{aligned}$$

由题设 $AM = BM$, 所以

$$66 - 14z + z^2 = 38 + 4z + z^2,$$

解得 $z = 14/9$, 故所求之点为 $(0, 0, 14/9)$.

习 题 7.1

1. 指出下列各点在哪条坐标轴上或哪个坐标平面上.

(1) $(-4, 0, 0)$; (2) $(0, -7, 0)$;

(3) $(0, 7, 2)$; (4) $(-5, 0, 3)$.

2. 指出下列各点位于第几卦限.

(1) $(2, -1, 3)$; (2) $(-1, -2, 4)$;

(3) $(1, 4, -3)$; (4) $(-1, -2, -3)$;

(5) $(1, -1, -1)$; (6) $(-2, 1, -3)$.

3. 设某三点与给定点 (a, b, c) 分别对称于下列坐标平面: (1) Oxy ; (2) Oyz ; (3) Ozx . 求它们的坐标.

4. 设某四点与给定点 (a, b, c) 分别对称于: (1) x 轴; (2) y 轴; (3) z 轴; (4) 原点 O . 求它们的坐标.

5. 求点 $P(4, -3, 5)$ 到坐标原点以及到各坐标轴的距离.

6. 在 Oyz 平面上求一点 P , 使它与三个已知点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$ 及 $C(0, 5, 1)$ 等距离.

7.2 向量代数

7.2.1 向量的概念

在研究力学与物理学时, 经常会遇到这样一些量, 仅知道它们数值的大小是不够的, 要完全表示它们, 还必须同时指出它们的方向, 例如速度, 加速度, 力等等. 这种既有大小又有方向的量称为向量. 我们可以用一个有向线段来表示它, 线段的长度表示它的大小, 线段的方向表示它的方向. 以 A 为起点, B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$ (见图 7.5). 还常用小写的粗体字母 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ 来记向量.

如果两个向量的大小相等、方向相同, 就称这两个向量是相等的. 如图 7.5 中, $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 是相等的向量, 记作

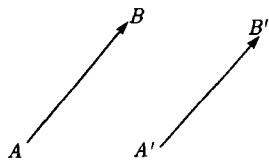


图 7.5

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

从两个向量相等的定义可知, 一个向量平行移动后, 成为与原来向量相等的向量, 所以向量的起点可以放置在空间的任意一点. 这种能任意平移的向量称为自由向量. 必须注意, 在实际问题中, 有些向量不能平移, 例如一个力, 它的作用点只能沿力的作用线移动, 而不能移向任意点, 这种只能沿一直线移动的向量称为滑动向量. 今后没有特别说明, 我们只讨论自由向量.

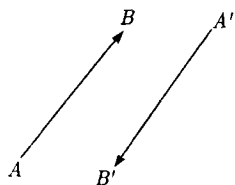


图 7.6

如果两个向量的大小相等而方向相反, 则称这两个向量为相反向量. 如图 7.6 所示, $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 就是相反向量, 记作 $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$. 因此又称 $\overrightarrow{A'B'}$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 的负向量.

向量的长度又称为向量的模. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模用 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示, 向量 a 的模用 $|a|$ 表示. 模为 1 的向量称为单位向量.

模为零的向量称为零向量, 记作 0 . 显然, 零向量的起点和它的终点是重合的, 所以它没有确定的方向. 我们规定, 一切零向量都相等.

7.2.2 向量的加法与数乘

将物理学中的速度、力等的合成法则加以抽象, 就得到向量之和的定义:

设给定具有共同起点 O 的两个向量 $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$, 则以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量 $c = \overrightarrow{OC}$ (见图 7.7) 就称为这两个向量的和, 记作

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB},$$

或简写成

$$c = a + b.$$

这种求和的方法称为平行四边形法则.

从图 7.7 可知 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$, 故得

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}.$$

由此可推出求两个向量的和的三角形法则.

在向量 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 引向量 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$, 则以 O 为起点, C 为终点的封口向量 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和.

特别, 如果两个向量在同一直线上, 则它们的和就是这样—一个向量: 当两向量同向时, 和向量的方向与原向量的方向相同, 其模等于两向量的模之和; 当两向量反向时, 和向量的方向与模较大的向量的方向相同, 而其模等于两向量的模之差.

如果两个向量是相反向量, 则其和显然为零向量, 就是

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

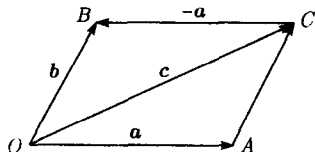


图 7.7

显然, 还有

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

从三角形法则容易证明向量的加法满足交换律, 即

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

从图 7.8 不难看出, 向量的加法满足结合律

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

因而可以略去括号而记

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

向量求和的三角形法则可推广到多个向量的情形, 例如在 $\mathbf{a}$ 的终点引向量 $\mathbf{b}$, 再在 $\mathbf{b}$ 的终点引向量 $\mathbf{c}$, 则由 $\mathbf{a}$ 的起点至 $\mathbf{c}$ 的终点所引的向量 $\mathbf{d}$ 就是 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的和 (见图 7.8).

向量的减法与数量的减法一样, 定义为加法的逆运算.

如果向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和是向量 $\mathbf{c}$, 则向量 $\mathbf{b}$ 就定义为向量 $\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{a}$ 之差, 记作

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a}.$$

从图 7.7 可见

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} + (-\mathbf{a}).$$

于是得到减法的法则: 若要从向量 $\mathbf{c}$ 减去向量 $\mathbf{a}$, 就只须把 $\mathbf{a}$ 的负向量 $-\mathbf{a}$ 加到 $\mathbf{c}$ 上去.

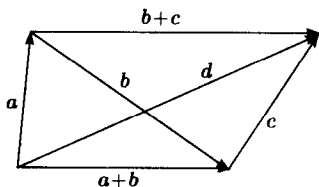


图 7.8

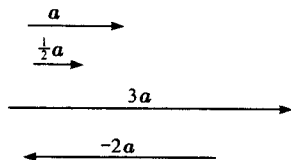


图 7.9

现在再来考虑向量与数的乘积.

设有向量 $\mathbf{a}$ 和数 λ , 则其乘积表示这样一个向量, 它的模等于向量 $\mathbf{a}$ 的模之 $|\lambda|$ 倍, 当 λ 大于零时它与 $\mathbf{a}$ 同向, 当 λ 小于零时与 $\mathbf{a}$ 反向 (见图 7.9).

由定义可知

$$0\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

显然又有

$$(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}.$$