



高等院校
通信与信息专业规划教材

数字信号处理

张小虹 编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



高等院校通信与信息专业规划教材

数字信号处理

张小虹 编著



机械工业出版社

本书是通信、电子信息专业“数字信号处理”课程的基本教材。全书以数字信号处理基础知识、基本理论为主线,同时将具有强大计算功能的MATLAB软件引入本书。通过经典理论与现代技术的结合,将数字信号处理的知识点叙述得更加通俗易懂。

另外,本书从当前学生已初步具备计算机应用基础的实际出发,紧密联系实际,精选了丰富的练习题。通过课后习题和大量的模拟实验,帮助学生理解、领会教学内容。

本书概念清楚、系统性强、特色鲜明。可作为通信、电子信息、自动化控制、计算机科学等专业的教材。同时,书中给出的一些例题程序,稍作修改就可以在工程设计中加以应用,对于相关专业的工程技术人员来说也是一本很好的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理/张小虹编著. —北京:机械工业出版社, 2005.1
高等院校通信与信息专业规划教材
ISBN 7-111-15260-3

I. 数... II. 张... III. 数字信号—信号处理—高等学校—教材
IV. TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第094164号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
责任编辑:陈振虹 版式设计:张世琴 责任校对:樊钟英
封面设计:刘吉维 责任印制:石冉
三河市宏达印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2005年1月第1版·第1次印刷
787mm×1092mm 1/16·23.75印张·590千字
0 001—5 000册
定价:33.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
本社购书热线电话(010)68993821、88379646
68326294、68320718

封面无防伪标均为盗版

前 言

随着信息技术的高速发展,数字信号处理理论与技术日益成熟完善,已成为一门重要的学科与技术领域。并且随着数字信号处理的应用领域日益扩大,它已渗透到了许多重要学科和技术领域。在 21 世纪的教学改革中,加强素质教育,淡化专业界限,拓宽基础,促进不同专业领域知识的交叉渗透,已成为教育界的共识。“数字信号处理”基础知识已成为通信、电子信息、计算机科学等专业学生必须掌握的专业基础知识和必修内容。面向通信、电子信息、计算机科学等专业以及工程类专业的学生开设“数字信号处理”课程便是这种改革的大趋势之一。

本书以数字信号处理基础知识、基本理论为主线,同时将具有强大计算功能的 MATLAB 软件引入本书。通过经典理论与现代技术的结合,将“数字信号处理”的知识点叙述得更加通俗易懂。为了更加突出基础知识、基本概念,本书是通过例题求解的方式,引入 MATLAB 这一现代计算工具,以帮助读者结合实际应用,提高掌握 MATLAB 工具的兴趣和积极性。以计算机为平台,以优秀软件为工具,计算验证复杂结论,节省手工运算的时间,把主要精力用在对课程内容和基本概念的理解与巩固上,体现了时代特色,符合素质教育的要求,这也是编者的初衷。

本书编者考虑到现在的学生已初步具备计算机应用基础的实际,紧密联系实际,精选了丰富的练习题。通过课后习题和大量的模拟实验,帮助学生理解、领会教学内容,增强分析和解决问题能力,便于读者对概念的深入理解和对学习状况的自我检查。与本书配套发行的《数字信号处理学习指导与习题解答》一书,则为读者掌握本课程的知识提供了更多的参考信息。

本书概念清楚、系统性强、特色鲜明。尤其是现代教学思想与工具的引入,使本书的使用范围更宽。本书可作为通信、电子信息、自动化控制、计算机科学等不同专业的教材。具体实施可根据专业要求对内容进行取舍,并安排一定的上机时间,建议本课程的教学时数为 40~72 小时。书中给出的一些例题程序,稍作修改就可以在工程设计中加以应用,因此对相关专业的工程技术人员来说本书也是一本有益的参考书。

本书在编写过程中,得到了山东省科学院计算中心高级工程师张蔚伟、解放军理工大学理学院岳振军教授、陆士元、王丽娟、王友军副教授、孙镇、许胜华、李宁、贾永兴、余远德以及总参第六十三研究所张为民等同行们的大力支持和帮助,在此表示深深的谢意。

由于编者水平有限,书中不足与错误之处,恳请广大读者批评指正。

编 者

目 录

前言

第 1 章 时域离散信号与系统 1

1.1 概述.....	1
1.2 时域离散信号——序列.....	4
1.2.1 时域离散信号——序列的描述.....	4
1.2.2 常用典型序列.....	5
1.2.3 序列的运算.....	7
1.3 时域离散系统.....	9
1.3.1 线性离散系统及其响应.....	9
1.3.2 非时变离散系统及其响应	10
1.3.3 线性非时变离散系统及其响应	10
1.3.4 系统的稳定性	11
1.3.5 系统的因果性	12
1.3.6 因果稳定系统	12
1.4 卷积	12
1.4.1 图解法	12
1.4.2 表格阵法	13
1.4.3 相乘对位相加法	14
1.4.4 卷积的性质	15
1.5 常系数线性差分方程	16
1.5.1 线性非时变离散系统的数学模型 ..	16
1.5.2 递推法	16
1.5.3 经典法	17
1.6 数字化处理方法	18
1.6.1 时域采样	18
1.6.2 原信号的恢复(插值)	22
1.6.3 窄带信号采样率	23
1.6.4 数字化处理方法	26
1.7 习题	27

第 2 章 Z 变换与离散系统的频域

分析..... 33

2.1 Z 变换	33
2.2 Z 变换收敛区及典型序列 Z 变换	33
2.2.1 Z 变换的收敛区	34
2.2.2 典型序列的 Z 变换	37
2.3 Z 反变换	38

2.3.1 留数法	39
2.3.2 幂级数法	41
2.3.3 部分分式法	42
2.4 Z 变换的性质与定理	44
2.5 Z 变换与拉普拉斯变换、傅里叶变换的 关系	50
2.6 序列的傅里叶变换及其性质	52
2.6.1 序列的傅里叶变换	52
2.6.2 $X(e^{j\omega})$ 与 $X(j\Omega)$ 的关系	55
2.6.3 序列傅里叶变换的性质	57
2.6.4 序列傅里叶变换的对称性	59
2.7 系统函数与系统特性	62
2.7.1 系统函数	62
2.7.2 系统函数与差分方程	62
2.7.3 系统的因果稳定性	63
2.7.4 $H(z)$ 的零、极点与系统频响	65
2.8 习题	68

第 3 章 离散傅里叶变换 76

3.1 周期序列的傅里叶级数	76
3.1.1 离散傅里叶级数	76
3.1.2 离散傅里叶级数的性质	80
3.2 离散傅里叶变换	82
3.2.1 离散傅里叶变换定义	83
3.2.2 DFT 与 ZT、DTFT 的关系.....	84
3.3 离散傅里叶变换的性质	86
3.4 频域采样与恢复	93
3.4.1 频域采样	93
3.4.2 频域恢复——频域插值	94
3.5 用离散傅里叶变换计算线性卷积	96
3.5.1 用循环卷积计算线性卷积的条件 ..	96
3.5.2 用循环卷积计算线性卷积的方法 ..	97
3.5.3 重叠相加法	97
3.5.4 重叠保留法	98
3.6 用离散傅里叶变换作频谱分析.....	100
3.6.1 对连续信号进行频谱分析.....	100
3.6.2 频谱分析中的几个问题.....	101
3.6.3 离散傅里叶变换参数选择.....	104

3.7 习题	106	5.3.5 多项式内插结构的一般形式	175
第4章 离散傅里叶变换的算法	114	5.4 格型滤波器结构	177
4.1 DFT 运算特点	114	5.4.1 全零点 (FIR) 的格型滤波器	177
4.2 时间抽取基 2 FFT 算法	115	5.4.2 全极点 (IIR) 的格型滤波器	181
4.2.1 基 2 时选 FFT 运算	115	5.4.3 具有零、极点 (IIR) 的格型滤波器	183
4.2.2 基 2 时选 FFT 运算规律	120	5.5 状态变量分析法	185
4.3 基 2 频率抽取 FFT 算法	123	5.5.1 状态方程与输出方程的建立	185
4.3.1 基 2 频选 FFT 运算	123	5.5.2 离散系统状态方程的 Z 域分析	193
4.3.2 基 2 频选 FFT 运算规律	125	5.6 习题	195
4.4 IDFT 的快速计算方法 IFFT 及运算量进一步减少的方法	127	第6章 无限冲激响应 (IIR) 数字滤波器的设计	202
4.4.1 IDFT 的快速计算方法	127	6.1 数字滤波器的基本概念	202
4.4.2 运算量进一步减少的方法	129	6.1.1 选频数字滤波器	202
4.5 N 是组合数的 FFT 算法	130	6.1.2 数字滤波器的技术要求	202
4.5.1 N 是任意组合数的 FFT 算法	131	6.1.3 IIR 数字滤波器设计方法	203
4.5.2 组合数为 $N = p^M$ 的 FFT 算法	133	6.2 模拟滤波器设计方法简介	203
4.6 分裂基 FFT 算法	136	6.2.1 模拟滤波器的模平方函数	203
4.7 线性调频 Z 变换算法	142	6.2.2 模拟滤波器的技术要求	204
4.7.1 CZT 定义	142	6.2.3 滤波器的逼近方法	205
4.7.2 利用 FFT 的 CZT 算法	143	6.2.4 巴特沃思滤波器	206
4.8 离散余弦变换	146	6.2.5 切比雪夫滤波器	211
4.8.1 离散余弦变换的定义	147	6.3 脉冲响应不变法设计数字滤波器	217
4.8.2 用 DFT 处理 DCT	148	6.4 双线性变换法	227
4.8.3 快速余弦变换	149	6.5 原型变换法	237
4.9 习题	154	6.5.1 z 平面变换法——数字域的频率变换	238
第5章 数字滤波器的结构与状态变量分析法	157	6.5.2 s 平面变换法——模拟域的频率变换	242
5.1 离散系统的流程图表示与系统分类	158	6.5.3 模拟原型直接变换法的一般设计方法	243
5.1.1 用信号流程图表示系统结构	158	6.6 IIR DF 的频域最优设计	249
5.1.2 系统分类	159	6.6.1 频域最小均方误差	250
5.2 IIR 系统的基本结构	160	6.6.2 频域最小 p 误差准则	251
5.2.1 IIR 系统的直接形式	160	6.7 时域最小平方误差 (逆) 设计	254
5.2.2 IIR 系统的级联形式	161	6.7.1 混响	254
5.2.3 IIR 系统的并联形式	164	6.7.2 一般反滤波问题	255
5.2.4 全通系统	165	6.7.3 最小平方滤波	256
5.2.5 最小相位系统	166	6.7.4 最小平方反滤波	257
5.3 FIR 系统的基本结构	168	6.7.5 时域最小平方误差设计方法	258
5.3.1 FIR 系统的直接形式 (横截型、卷积型)	168	6.8 习题	264
5.3.2 FIR 系统的级联形式	169	第7章 有限冲激响应 (FIR) 数字	
5.3.3 线性相位 FIR 系统的结构形式	170		
5.3.4 FIR 系统的频率取样结构	172		

滤波器设计.....	268	第 8 章 有限字长效应	327
7.1 线性相位 FIR 数字滤波器的条件和特点.....	268	8.1 二进制表示法对量化的影响.....	327
7.1.1 FIR 系统的线性相位条件与线性相位特性.....	268	8.1.1 定点制表示及运算误差.....	327
7.1.2 幅度特性.....	270	8.1.2 浮点制表示及运算误差.....	328
7.1.3 线性相位 FIR 系统的零点特性	273	8.1.3 负数表示法.....	329
7.2 FIR 数字滤波器的窗函数设计.....	275	8.1.4 截尾与舍入产生的误差.....	330
7.2.1 FIR 数字滤波器的窗函数设计基本方法.....	275	8.2 模拟信号量化的误差分析.....	333
7.2.2 矩形窗.....	276	8.2.1 模数变换的量化误差.....	333
7.2.3 其他窗.....	279	8.2.2 量化误差的统计分析.....	333
7.3 FIR 滤波器的频率取样设计.....	284	8.2.3 随机信号通过线性系统的均值与方差.....	335
7.3.1 基本原理.....	284	8.3 滤波器系数量化效应.....	337
7.3.2 设计方法.....	285	8.3.1 基本二阶节系数量化效应.....	337
7.3.3 过渡带采样的计算机辅助设计.....	290	8.3.2 IIR 系统的极点位置敏感度	339
7.4 FIR 滤波器的等波纹设计.....	295	8.3.3 IIR 系统函数的敏感度	341
7.4.1 等波纹逼近基本原理.....	296	8.3.4 系数量化对 IIR 系统频响的影响.....	342
7.4.2 应用到 FIR DF 设计中的等波纹逼近.....	296	8.3.5 系数量化对 FIR 系统的影响	344
7.4.3 解非线性方程组.....	298	8.4 数字系统运算中的有限字长影响.....	345
7.4.4 迭代法.....	299	8.4.1 IIR 系统定点运算的零输入极限环.....	345
7.5 简单整系数线性相位 FIR DF	301	8.4.2 IIR 系统定点运算的溢出振荡	348
7.5.1 简单整系数线性相位 FIR DF 的设计原理.....	302	8.4.3 IIR 系统定点舍入运算的误差分析.....	351
7.5.2 简单整系数 FIR DF 的设计	307	8.4.4 IIR 系统定点运算中的动态范围及输入最大幅度限制.....	355
7.6 采样率转换滤波器——多采样率信号处理.....	312	8.4.5 定点 FIR 系统舍入运算误差分析.....	356
7.6.1 采样率降低——信号的抽取(减采样)	312	8.4.6 IIR 系统浮点运算的误差分析	357
7.6.2 采样率提高——信号的整数倍内插.....	316	8.5 DFT 与 FFT 的有限字长影响	358
7.6.3 抽取与插值结合——采样率按 L/M 变化	318	8.5.1 DFT 直接定点舍入计算误差分析.....	359
7.6.4 采样率转换技术的应用.....	318	8.5.2 FFT 定点舍入计算误差分析	361
7.7 IIR 滤波器与 FIR 滤波器比较	320	8.5.3 FFT 浮点舍入计算误差分析	363
7.8 习题.....	321	8.5.4 FFT 的系数量化效应	365
		8.6 习题.....	367
		参考文献	372

第 1 章 时域离散信号与系统

1.1 概述

现代社会，人们每时每刻都会与各种载有信息的信号密切接触，例如电话铃声，交通红绿灯，收音机、电视机、手机收到的电磁波等，以上信号可分别称为声信号、光信号、电信号。信号是各类消息的运载工具，是某种变化的物理量。本书中所说的信号指承载信息的函数。

各种信号可以从不同角度进行分类，常用的有以下几种。

(1) 模拟信号。是在规定的连续时间内，信号的幅值可以取连续范围内的任意值，如正弦、指数信号等，即时间连续、幅值连续的信号。

(2) 时域连续信号。是在连续时间范围内定义的信号，信号的幅值可以是连续的任意值，也可以是离散（量化）的。模拟信号是连续信号的特例，本书中这两种信号是通用的。

(3) 时域离散信号。是在离散的时间上定义的信号，其独立（自）变量仅取离散值。其幅值可以是连续的，也可以是离散（量化）的，例如理想抽取信号就是幅值连续的信号。

除了独立（自）变量取离散的值外，其幅度被量化且被编码的称为数字信号。

各类信号只有经过一定的处理，才能具有使用价值。信号处理就是对信号进行分析、变换、综合、识别等加工，以达到提取有用信息和便于利用的目的。如果处理的设备用模拟部件，则称为模拟处理，模拟信号处理的英文缩写为 ASP。若系统中的处理部件用数字电路，信号也是数字信号，则这样的处理方法为数字处理，数字信号处理的英文缩写为 DSP。图 1.1-1 是电话系统采用不同形式处理的示意图。

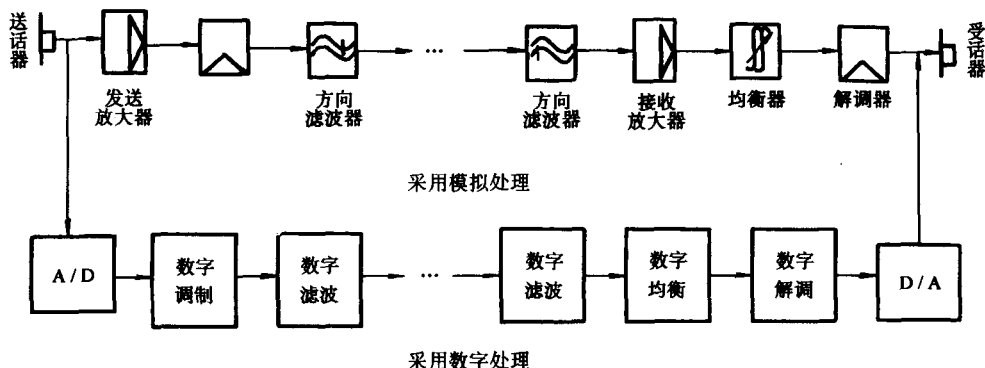


图 1.1-1

数字处理系统的常用功能有滤波、谱估计、数据压缩。

经典的滤波是频率选择滤波。例如滤波器的输入信号为 $x(t) = s(t) + n(t)$ ，其中 $s(t)$ 为有用信号， $n(t)$ 是不需要的信号（通常称为噪声），其对应的频谱为

$$X(j\omega) = S(j\omega) + N(j\omega)$$

假设信号与噪声的频谱不重叠,如图 1.1-2 所示,即 $\omega_1 \leq \omega_s \leq \omega_2$ 及 $\omega_N > \omega_2$, 则信号 $x(t)$ 经过频响函数为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ 0 & \omega_1 < \omega, \omega > \omega_2 \end{cases}$$

的系统,其输出信号的频谱及信号为 $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = S(j\omega) \leftrightarrow s(t)$, 于是经系统滤波后顺利地提取出了有用信号 $s(t)$ 。

谱估计是对各种信号进行频谱分析,特别是对随机信号进行谱估计。目前常用的有傅里叶分析法,相关分析法等。如果噪声与有用信号的频谱互相交叠在一起(如随机信号上叠加的噪声),则很难用经典的频率选择滤波器把有用信号提取出来。为此,必须建立在随机过程理论上,从统计观点出发,对有用信号和噪声作统计特性的分析,用更复杂的方法提取特定信息。这种过滤随机信号过程,实质也是一种估计,可以认为估计器也是一种滤波器。所以现在有广义(现代)滤波的概念,即只要是通过某个系统(网络),提取出所需要的信息,都可称为滤波。本书中滤波器、系统、网络这三个名词通用。

数据压缩是在一定条件下把原始信号所含信息进行压缩。例如,通常一幅黑白图像由 30 万个像素组成,每个像素灰度等级若以 8bit 计算,则一幅图像就会有 240 万 bit 数据信息。这样大的数据量显然要求处理系统具有很高的运算速度和庞大的存储单元。为了解决这一问题,在处理技术上要求在保证正确接收的前提下,对原数据进行压缩。

数字处理系统与模拟处理系统在功能上有许多相似的地方,但在处理技术和方法上却有很大区别。数字处理主要是利用数字技术对信号进行处理,一般有硬件处理、软件处理两种方法。硬件处理是指通过通用或专门的计算器件、芯片完成;软件处理是利用通用计算机编写的处理程序对信号进行处理。例如常见的一阶 RC 低通滤波器,其模拟电路如图 1.1-3 所示。由 KVL 列出电路方程为

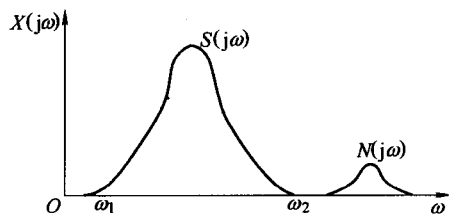


图 1.1-2 信号与噪声的频谱

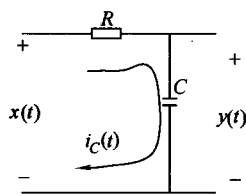


图 1.1-3 RC 一阶低通滤波器

$$Ri_C(t) + v_C(t) = x(t)$$

式中 $v_C(t) = y(t)$ 。

将 $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{dy(t)}{dt}$ 代入上式,得

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

这个一阶 RC 低通滤波器的数学模型是一阶微分方程。对这样的一阶低通滤波器要用数字技术处理,可由取样电路对时间量化,即作如下改变: $t \rightarrow n\Delta t$, 其中, Δt 为取样间隔(与时钟有关);输入信号 $x(t) \rightarrow x(n\Delta t) = x(n)$; 输出信号 $y(t) \rightarrow y(n\Delta t) = y(n)$; 此时

一阶线性微分方程改变为

$$RC \frac{\Delta y(n)}{\Delta t} + y(n) = x(n)$$

将 $\Delta y(n) = y(n) - y(n-1)$ 代入上式, 得

$$RC \frac{y(n) - y(n-1)}{\Delta t} + y(n) = x(n)$$

整理, 得

$$y(n) = \frac{1}{1 + RC/\Delta t} x(n) + \frac{RC/\Delta t}{1 + RC/\Delta t} y(n-1) = Ax(n) + By(n-1)$$

式中 $A = \frac{1}{1 + RC/\Delta t}$; $B = \frac{RC/\Delta t}{1 + RC/\Delta t}$ 。

当 R 、 C 、 Δt 给定时, A 、 B 为常数, 上式是一阶线性差分方程。这个差分方程可用硬件实现, 如图 1.1-4 所示。

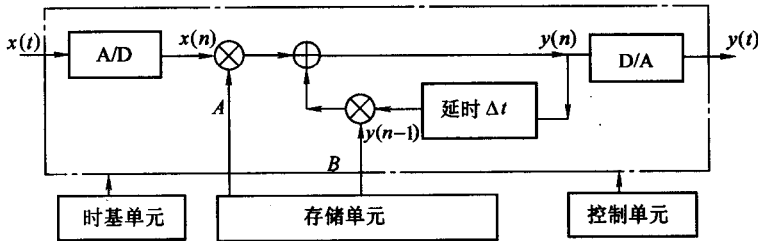


图 1.1-4 硬件实现一阶低通滤波器

其中各部件可用不同集成电路芯片完成, 例如常用的加法器有 74LS283, 它是 4bit 超前进位加法器, 用两片 74LS283 可以组成一个 8 bit 加法器。而减法器可以用一个倒相器和加法器完成。乘法运算一般是通过移位相加来实现的。当字长较短时 (如 8 位), 用查表法实现乘法功能是一种简便快速的方法。其原理是将所有可能出现的结果事先计算好, 然后存储到数据存储单元中 (如 EPROM 等)。延时器 z^{-n} 可用 D 触发器实现。它具有数据存储功能, 并且由时钟控制。当 $x(n)$ 加到 D 触发器输入端, 一个 CLK 时钟过后, $x(n)$ 便移到输出端, 从而实现延时一个时钟周期。同理, 若实现 z^{-n} , 则将 n 个 D 触发器级联即可。

上述实现加、减、乘和延时等运算, 其特点是硬件简单、速度快, 在小规模的简单数字信号处理中, 可以用它们构成系统的运算单元。但对较复杂的信号处理, 若用这种实现方法, 会使系统的体积增大, 调试复杂, 可靠性下降。因此在现代的数字信号处理技术中, 一般采用 DSP 芯片来实现复杂的信号处理。这样的数字处理系统其功能就是一台小型计算机, 如美国德州仪器公司推出的 TMS320 系列芯片。

上面的一阶差分方程也可以用软件来实现。假设 $y(-1) = 0$, 由给定 $x(n)$, 计算 1024 点的 $y(n)$ 。用一个简单的程序可以完成一阶低通滤波器的计算, 其程序流程图如图 1.1-5 所示。

数字处理与模拟处理相比有以下优点及要注意的问题:

(1) 灵活。数字处理系统的性能主要由乘法器的各系数决定。如上例, B 取正值为低通滤波器, B 取负值为高通滤波器。只要改变系统的参数 A 、 B , 就可改变系统的性能指标, 比模拟系统改变 R 、 L 、 C 参数方便得多, 因此对一些自适应系统尤为合适。

(2) 精度高。更确切地说是精度可控制。因为精度取决于 A 、 B 系数的字长(位数)。字长越长, 精度越高。根据需要适当改变字长, 可以获得所要求的精度。而模拟处理中元件 R 、 L 、 C 参数的误差很大, 且其精度很难提高和控制。

(3) 稳定性或可靠性高。由于 DSP 的基本运算是加、乘法, 采用的是二进制(非 1 即 0), 所以工作稳定, 受环境影响小, 抗干扰能力强, 且数据可以存储。而模拟元件 R 、 L 、 C 参数会随温度、湿度、应用频率等环境因素的变化而变化。

(4) 时分复用。当硬件设备的运算速度足够高, 可以实现多通道复用或多节复用。例如一个二阶节滤波器, 能在 $1/3$ 输入数据的时间间隔内运算一次, 若连续运算三次, 完成三个二阶节的运算功能, 则等效一个六阶滤波器; 而采用分时输出就可对三个信号进行滤波。

(5) 功能强。通过复杂的算法, 可以实现高难度的复杂处理, 完成由模拟系统无法实现的系统功能。例如求信号的相关函数, 要用到与其将来情况有关的参数, 这用模拟系统是无法实现的, 而用数字系统则可以用存储单元将有关数据存储起来。

(6) 集成化程度高, 体积小、功耗低、功能强、价格越来越便宜。

(7) 在处理模拟信号时, 由于精度(字长)有限, 必定存在量化或运算误差。

(8) 处理宽带信号时, 由于运算速度高, 若要实时处理, 则对芯片的要求很高。例如, 由 $x(0) \sim x(1023)$ 求 $y(0) \sim y(1023)$, 设每步要 $1\mu s$, 则系数的加、乘、延时等一系列的运算要在 $1\mu s$ 内完成, 否则就要很大的外存设备, 使成本、体积增加。

目前带有一定内存的专用 DSP 处理器芯片具有高的时钟速度和极快的运算能力, 例如美国德州仪器公司推出的 TMS320C64 系列芯片的时钟速度已达 600MHz, 运算能力可达 4800MIPS (MIPS 是每秒百万条指令)。

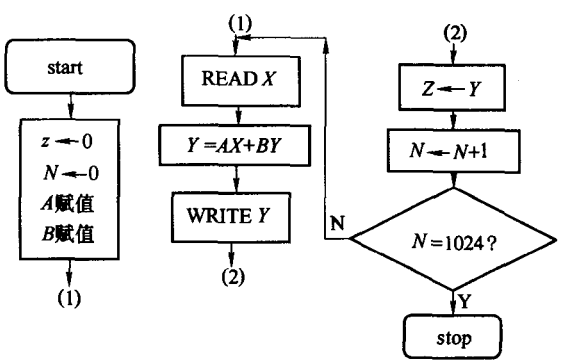


图 1.1-5 软件实现一阶低通滤波器的程序流程图

1.2 时域离散信号——序列

1.2.1 时域离散信号——序列的描述

离散信号可以从模拟信号采样得到, 样值用 $x(n)$ 表示(表示在离散时间点 nT 上的样值)。 $x(n)$ 为 x 的第 n 个样值(不一定是连续函数的取样, 仅是一个样本空间的第 n 个值)。 n 不是整数时, x 未必是零, 只是没有定义(是可以插值的)。 $x(n)$ 也可以本身是离散信号或由系统内部产生, 在处理过程中只要知道样值的先后顺序即可, 所以可以用序列来表示时域离散信号, 它们的一般项为 $x(n)$ 。

$$\begin{aligned}
 x &= \{x(n)\} \quad -\infty < n < \infty \\
 &= \{\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots\}
 \end{aligned}
 \tag{1.2-1}$$

为简便起见, 常用一般项 $x(n)$ 表示序列, 称为序列 $x(n)$ 。

例 1.2-1 $x_1(n) = \left[\underset{\uparrow}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \dots \right] = \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad n \geq 0$

$$x_2(n) = \begin{cases} 3 & n = -1 \\ 5 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 2 & n = 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad x_2(n) = [3 \quad \underset{\uparrow}{5} \quad 2 \quad 2]$$

式中，小箭头表示 $n=0$ 时所对应的样值，若无小箭头就默认序列是从 $n=0$ 开始。

还可以用谱线状图形表示离散时间信号。例 1.2-1 的 $x_1(n)$ 波形如图 1.2-1 所示。有时为了描述序列的一般规律（变化趋势），可将端点用虚线（包络线）连起来，以方便观察序列值之间的关系，如图 1.2-2 是一个包络线为指数衰减函数的序列示意图。

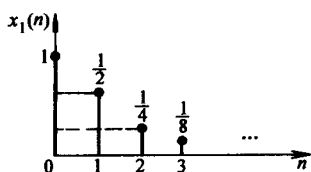


图 1.2-1 例 1.2-1 的波形

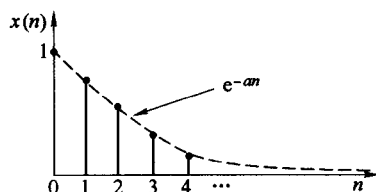


图 1.2-2 包络线为指数衰减函数的序列

1.2.2 常用典型序列

1. 单位脉冲序列

单位脉冲序列也称单位样值序列，用 $\delta(n)$ 表示，定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.2-2)$$

单位脉冲序列 $\delta(n)$ 如图 1.2-3 所示。

2. 单位阶跃序列

单位阶跃序列用 $u(n)$ 表示，定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.2-3)$$

单位阶跃序列 $u(n)$ 如图 1.2-4 所示。

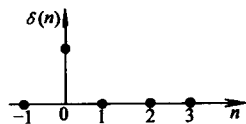


图 1.2-3 单位脉冲序列

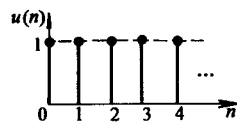


图 1.2-4 单位阶跃序列

还可用 $\delta(n)$ 表示 $u(n)$

$$u(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \dots \quad (1.2-4)$$

也可用 $u(n)$ 表示 $\delta(n)$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.2-5)$$

3. 单位矩形序列 $R_N(n)$

单位矩形序列用 $R_N(n)$ 表示, 定义为

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n < 0, n \geq N \end{cases}$$

$R_4(n)$ 如图 1.2-5 所示。

还可用 $\delta(n)$ 、 $u(n)$ 表示 $R_N(n)$

$$R_N(n) = u(n) - u(n - N) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n - m)$$

4. 斜变序列

斜变序列是包络为线性变化的序列, 表示式为

$$x(n) = nu(n)$$

斜变序列 $x(n)$ 如图 1.2-6 所示。

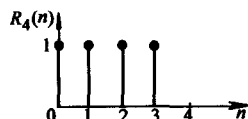


图 1.2-5 单位矩形序列

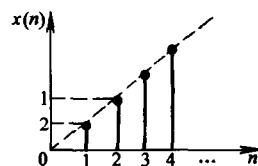


图 1.2-6 斜变序列

5. 实指数序列

实指数序列 a^n 是包络为指数函数的序列。 $|a| > 1$, 序列发散;
 $|a| < 1$, 序列收敛; $a < 0$, 序列正、负摆动。实指数序列的四种波形如图 1.2-7 所示。

6. 正弦型序列

正弦型序列是包络为正、余弦变化的序列。

例 $\sin(n\omega_0)$, $\cos(n\omega_0)$ 。若 $\omega_0 = \pi/5$, $N = 2\pi/(\pi/5) = 10$, 即每 10 点重复一次正、余弦变化, 如图 1.2-8 所示。

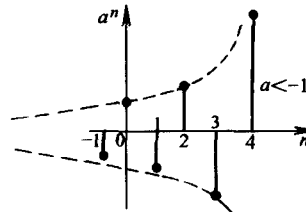
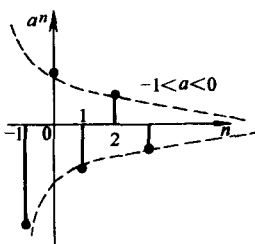
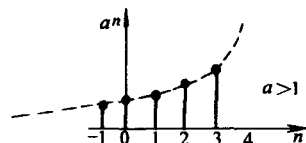
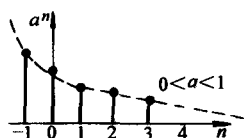


图 1.2-7 实指数序列的四种波形

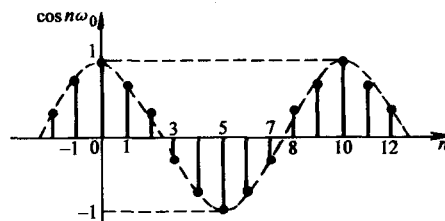
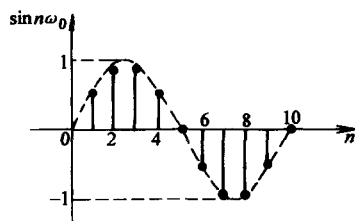


图 1.2-8 正弦型序列

正弦型序列的一般表示为

$$x(n) = A \cos(n\omega_0 + \varphi_n)$$

对模拟正弦型信号采样可以得到正弦型序列。

例 $x_a(t) = \sin \Omega_0 t$

$$x(n) = x_a(nT) = \sin n \Omega_0 T = \sin n \omega_0$$

$$\omega_0 = \Omega_0 T$$

式中, ω_0 是数字域频率; T 是采样周期。

数字域频率相当模拟域频率对采样频率取归一化值, 即

$$\omega = \Omega T = \Omega / f_s$$

7. 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} = e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n} = e^{\sigma n} (\cos n\omega_0 + j \sin n\omega_0) = |x(n)| \angle x(n)$$

其中, $|x(n)| = e^{\sigma n}$, $\arg \angle x(n) = n\omega_0$ 。

8. 周期序列

如果 $\tilde{x}(n) = x(n + N)$, $-\infty < n < \infty$

则 $\tilde{x}(n)$ 为周期序列, 周期为 N 点。

对模拟周期信号采样得到的序列, 未必是周期序列。例如模拟正弦型采样信号一般表示为

$$x(n) = A \cos(n\omega_0 + \varphi_n) = A \cos\left(2\pi \frac{n\omega_0}{2\pi} + \varphi_n\right)$$

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0 T} = \frac{2\pi f_s}{\Omega_0} = \frac{f_s}{f_0}$$

式中, f_s 是取样频率; f_0 是模拟周期信号频率。

可由以下条件判断 $x(n)$ 是否为周期序列:

- (1) $\frac{2\pi}{\omega_0} = N$, N 为整数, 则 $x(n)$ 是周期序列, 周期为 N 。
- (2) $\frac{2\pi}{\omega_0} = S = \frac{N}{L}$, L 、 N 为整数, 则 $x(n)$ 是周期序列, 周期为 $N = SL$ 。
- (3) $2\pi/\omega_0$ 为无理数, 则 $x(n) = A \cos(n\omega_0 + \varphi_n)$ 不是周期序列。

1.2.3 序列的运算

1. 相加

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad (1.2-6)$$

$y(n)$ 是两个序列 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 对应项相加形成的序列。

2. 相乘

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) \quad (1.2-7)$$

$y(n)$ 是两个序列 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 对应项相乘形成的序列。

标量相乘:

$$y(n) = ax(n) \quad (1.2-8)$$

$y(n)$ 是 $x(n)$ 每项乘以常数 a 形成的序列。

3. 延时或移序 $m > 0$

$$\{y(n)\} = \{x(n - m)\} \quad (1.2-9)$$

$y(n)$ 是原序列 $\{x(n)\}$ 每项右移 m 位形成的序列。

$$\{y(n)\} = \{x(n+m)\} \quad (1.2-10)$$

$y(n)$ 是原序列 $\{x(n)\}$ 每项左移 m 位形成的序列。如图 1.2-9 所示。

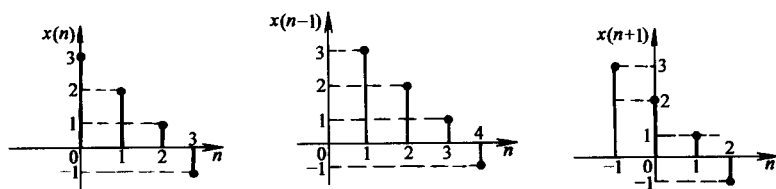


图 1.2-9 序列的移序

例 1.2-2 已知 $x(n] = [0.5 \quad 1.5 \quad 1 \quad -0.5]$, 求 $y(n) = x(n) + 2x(n)x(n-2)$ 。

解:

$$x(n-2) = [0 \quad 0.5 \quad 1.5 \quad 1 \quad -0.5]$$

$$2x(n)x(n-2) = \begin{cases} 0.5 \times 1 \times 2 & n=1 \\ 1.5 \times 2 \times (-0.5) & n=2 \end{cases}$$

$$y(n) = x(n) + 2x(n)x(n-2) = [0.5 \quad 1.5 \quad 2 \quad -2]$$

4. 折叠及其位移

$$\{y(n)\} = \{x(-n)\} \quad (1.2-11)$$

$y(n)$ 是将 $x(n)$ 以纵轴为对称轴翻转 180° 形成的序列。

折叠位移序列

$$\{y(n)\} = \{x(-n \pm m)\} \quad (1.2-12)$$

$y(n)$ 是由 $\{x(-n)\}$ 向右或向左移 m 位形成的序列。

折叠序列与折叠位移序列如图 1.2-10 所示。

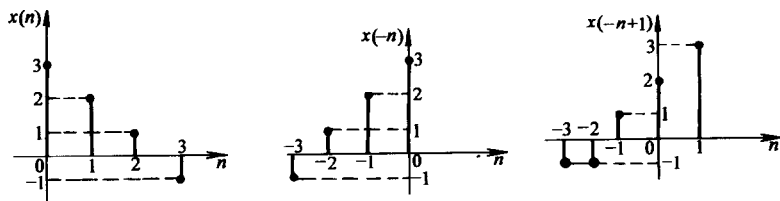


图 1.2-10 序列的折叠位移

5. 尺度变换

$y(n) = x(mn)$: 是只取 $x(n)$ 序列中 m 整数倍点 (每隔 m 点取一点) 序列值形成的新序列, 即时间轴 n 压缩了 m 倍。如图 1.2-11 所示的是 $m=2$ 时的 $x(n)$ 及 $y(n) = x(2n)$ 。

$y(n) = x(n/m)$: 是 $x(n)$ 序列每一点加 $m-1$ 个零值点形成的新序列, 即时间轴 n 扩展

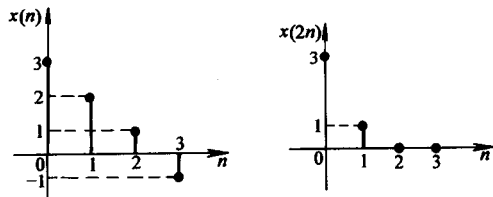


图 1.2-11 序列的压缩

了 m 倍。图 1.2-12 是 $m=2$ 时的 $x(n)$ 及 $y(n) = x(n/2)$ 。

6. 任意序列的单位取样脉冲表示

$$\begin{cases} x(k)\delta(n-k) & k=n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

任意序列可以用单位取样脉冲序列的加权和表示为

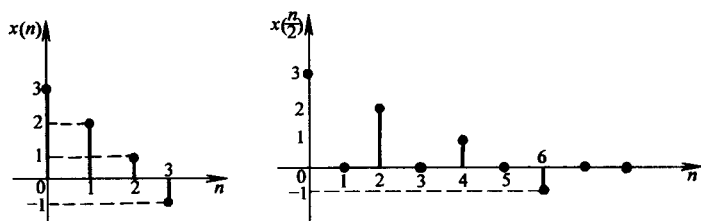


图 1.2-12 序列的扩展

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (1.2-13)$$

式中, $\dots x(-1)$ 、 $x(0)$ 、 $x(1) \dots$ 为加权系数。

7. 离散序列的能量

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.2-14)$$

1.3 时域离散系统

时域离散系统的作用是将输入序列转变为输出序列, 系统的功能是将输入 $x(n)$ 转变为所需输出 $y(n)$ 的运算, 记为

$$y(n) = T[x(n)] \quad (1.3-1)$$

时域离散系统的作用如图 1.3-1 所示。

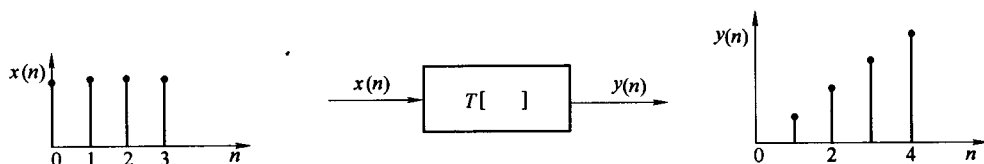


图 1.3-1 时域离散系统的作用示意图

时域离散系统与连续时间系统有相同的分类, 如线性、非线性; 时变、非时变等。运算关系 $T[]$ 满足不同条件, 具有不同的性质, 对应着不同的系统。

下面具体讨论几种常用系统的性质及其响应 (零状态)。

1.3.1 线性离散系统及其响应

线性离散系统应满足叠加、均匀 (齐次、比例) 性, 即有

$$\text{若 } x_1(n) \rightarrow y_1(n) = T[x_1(n)]$$

$$x_2(n) \rightarrow y_2(n) = T[x_2(n)]$$

$$\text{则 } T[ax_1(n) + bx_2(n)] = T[ax_1(n)] + T[bx_2(n)]$$

$$= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

满足线性的离散系统示意如图 1.3-2 所示。

利用任意序列的单位取样脉冲序列加权和表示可以导出线性离散系统的响应, 即将式

(1.2-13) 代入式 (1.3-1), 得

$$y(n) = T[x(n)]$$

$$\begin{aligned} &= T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x(k)\delta(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \end{aligned}$$

令 $T[\delta(n)] = h_0(n)$; $T[\delta(n-1)] = h_1(n)$, $\dots$, $T[\delta(n-k)] = h_k(n)$, 得到线性离散系统的响应为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) \quad (1.3-2)$$

1.3.2 非时变离散系统及其响应

离散系统的非时变性也称非移变性。

具有非时变性的离散系统, 在初始条件相同的情况下, 其系统的输出与输入激励加入时刻无关, 即若

$$T[x(n)] = y(n)$$

则

$$T[x(n-n_0)] = y(n-n_0) \quad (1.3-3)$$

令非时变系统的单位脉冲 $\delta(n)$ 的响应为 $h(n)$, 可记为 $\delta(n) \rightarrow h(n)$, 则由非时变性可得

$$\delta(n-k) \rightarrow h(n-k) = h_k(n) \quad (1.3-4)$$

离散系统的非时变性的示意图如图 1.3-3 所示。

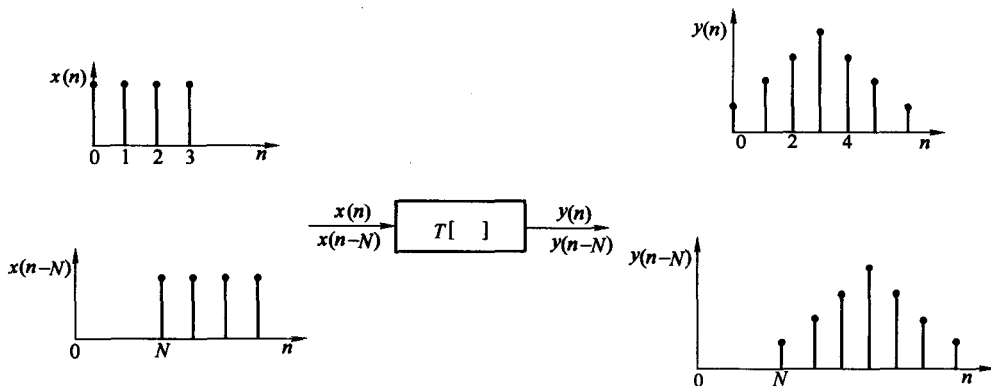


图 1.3-3 系统的非时变性

1.3.3 线性非时变离散系统及其响应

若离散系统同时满足线性（叠加、比例）以及非时变特性, 就是线性非时变离散系统, 简称为 LTI 离散系统。LTI 离散系统是信号处理中一类重要的系统, 本书涉及的主要是离散 LTI 系统。