高等学校经济类专业（专科）试用教材

高等数学

（下 册）

崔福荫 张自兰 张书国
洪含淳 陈中和 编

陕西科学技术出版社

高等学校经济类专业（专科）试用教材

高等数学

（下册）

崔福荫　张自兰　张书国
洪含淳　　　　　陈中和　编

高等学校经济类专业（专科）试用教材

高 等 数 学

（下册）

崔福荫 张自兰 张书国 洪含淳 陈中和 编

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行 空军电讯工程学院印刷

787×1092毫米 32开本 9印张 189千字

1986年12月第1版 1986年12月第1次印刷

印数：1—6000

统一书号：7202·132 定价：2.10元

下 册 说 明

本书分上、下两册出版，下册内容包括空间解析几何、多元函数微分法、重积分、无穷级数、微分方程、矩阵代数等，书末附有习题答案.

矩阵代数一章着重介绍"线性代数"的基本知识和基本计算方法，有些定理不作严密的数学推证，适合于对"线性代数"内容要求偏少的专业使用。

全书上、下册"微积分"、"矩阵代数"等主要内容，可在90—120个学时内完成.

目　录

第七章　空间解析几何

解析几何的基本思想是用代数的方法解决几何问题，也就是通过坐标系将数和点联系起来，这样，对于代数方程来讲，它有了几何意义，可以借助于几何图形的直观性去探索较深的代数和数学分析的问题；对于几何图形来讲，它有了代数的解析表达式，通过代数运算可以进一步揭示几何图形所具有的某些性质.

象在学习一元函数微积分时要用到许多平面解析几何的知识一样，我们在学习多元函数微积分时也要用到许多空间解析几何的知识.因此在学习多元函数微积分之前，需要先学习一些空间解析几何的有关知识.

§7—1　空间直角坐标系

在平面解析几何中讲过，为了确定平面上点的位置，要建立平面直角坐标系. 为了确定空间点的位置，我们现在来建立空间直角坐标系.

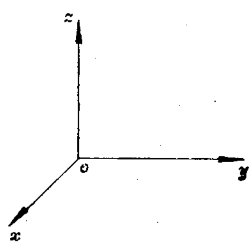

图7—1

空间直角坐标系是由空间一点o引出三条相互垂直的射线ox、oy、oz构成的，如图7—1所示，其中o称为坐标原点，ox、oy、oz称为坐标轴，

又分别称为横轴、纵轴和竖轴（立轴），ox轴和oy轴、oy轴和oz轴、ox轴和oz轴所决定的平面分别为xoy平面、yoz平面、xoz平面，统称为坐标平面，三个坐标平面把整个空间分为八个部分，每一部分称为一个卦限，如图7—2所示．

关于坐标轴的方向，通常都是把ox轴和oy轴配置在水平面上，而$0z$轴则是铅垂线，坐标轴的正方向要符合右手规则，即以右手握住z轴，当右手的四个手指从正向ox轴以$\frac{\pi}{2}$角度转向正向oy轴时，大拇指的指向就是oz轴的正向，如图7—3所示。

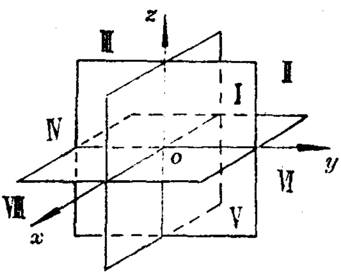

图7—2

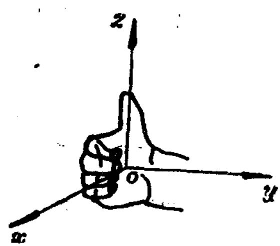

图7—3

在空间直角坐标系中，空间任意一点都与有序数组存在着一一对应关系．

设M为空间一已知点．我们过点M作三个平面分别垂直于ox轴、oy轴和oz轴，它们与ox轴、oy轴、oz轴的交点依次为P、Q、R（图7—4），这三点在ox轴、oy轴、oz轴上的坐标依次为x、y、z．于是空间的一点M就唯一地确定了一个有序数组x、y、z，数组x、y、z就叫做点M的坐标，并依次称x、y和

z为点M的横标、纵标和竖标，坐标为x、y、z的点M通常记为$M(x, y, z)$.

反过来，已知一有序数组x y、z，我们可以在ox轴上取坐标为x的点P，在oy轴上取坐标为y的点Q，在oz轴上取坐标为z的点R，然后通过P、Q与R分别作ox轴、oy轴与oz轴的垂直平面.这三个垂直平面的交点M便是以有序数组x、y、z为坐标的点（图7—4）.

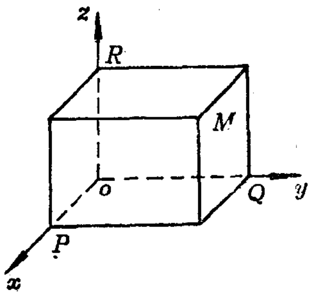

图7—4

这样，通过空间直角坐标系，我们就建立了空间的点M和有序数组x、y、z之间的一一对应关系.

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标有一定的特征.例如：如果点M在xoy面上，则$z=0$；同样，xoz面上的点，$y=0$；yoz面上的点，$x=0$.如果点M在ox轴上，则$y=z=0$；同样，oy轴上的点，$z=x=0$；oz轴上的点，$x=y=0$.如点M为原点，则$x=y=z=0$.

在空间八个卦限中点的坐标符号规定为：

$$\mathrm{I}(+, +, +),\ \mathrm{II}(-, +, +),$$
$$\mathrm{III}(-, -, +),\ \mathrm{IV}(+, -, +),$$
$$\mathrm{V}(+, +, -),\ \mathrm{VI}(-, +, -),$$
$$\mathrm{VII}(-, -, -),\ \mathrm{VIII}(+, -, -).$$

用坐标可以计算空间两个点之间的距离.

例如：设在空间直角坐标系中给定两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$

和$M_2(x_2, y_2, z_2)$，试求M_1与M_2之间的距离.

过M_1与M_2各作分别平行于坐标平面的平面.这六个平面围成如图7—5所示的长方体，这个长方体的三条棱长分别为$|x_2-x_1|$、$|y_2-y_1|$、$|z_2-z_1|$，且$\angle M_1BA$和$\angle M_1AM_2$都是直角，很容易得到

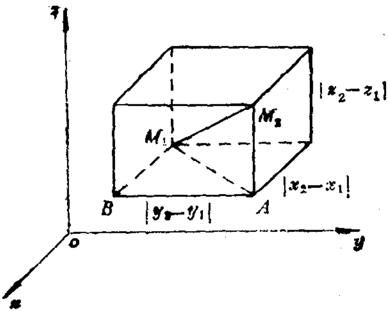

图7—5

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

这就是空间直角坐标系中两点间距离公式.

例1 在oz轴上求与两点$A(-4, 1, 7)$和$B(3, 5, -2)$等距离的点.

解 设在z轴上的点为$M(o, o, z)$，依题意有

$$|MA|=|MB|$$

即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$$

两边去根号得

$$z=\frac{14}{9}$$

故所求 z 轴上的点为$M(0,\ 0,\ \frac{14}{9})$.

习　题　§7—1

1. 在空间直角坐标系中，定出下列各点的位置：

$A(4,\ -4,\ -4)$，　$B(-2,\ 3,\ 4)$，　$C(4,\ 3,\ 5)$，

$D(0,\ -7,\ 0)$，　$E(3,\ 0,\ 0)$，　$F(5,\ 0,\ 3)$.

2. 求下列各对点间的距离：

(1) $(0,\ 0,\ 0)$、$(2,\ 3,\ 4)$，(2) $(4,\ -2,\ 3)$、$(-2,\ 1,\ 3)$.

3. 试证以三点$A(4,\ 1,\ 9)$、$B(10,\ -1,\ 6)$、$C(2,\ 4,\ 3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

4. 在yoz平面上，求与三个已知点$A(3,1,2)$、$B(4,-2,\ -2)$和$C(0,\ 5,\ 1)$等距离的点.

5. 设某点与给定的点$(2,\ -3,\ -1)$分别对称于 (a) x轴；(b) y轴；(c) z轴；求它的坐标.

§7—2　空间平面

由平面解析几何知道，平面上一条直线与一个二元一次方程相对应，那么类似地可以证明：空间任意一个平面的方程都是一个三元一次方程，反之任意一个三元一次方程在空间都表示一个平面，也就是说，空间平面与三元一次方程$Ax+By+Cz+D=0$存在着一一对应关系.我们把由三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0\ （其中A、B、C不全为零）$$

所确定的图形称为平面.

例如　$x=0$是yoz平面；$y=0$是xoz平面；$z=0$是xoy平面.又如$z=2$表示过点$(0,\ 0,2)$且平行于xoy面的平

面.

例1 求过不在一条直线上的三个点的平面方程.

解 设$M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$、$M_3(x_3,y_3,z_3)$为不在同一条直线上的三个点.若M_1、M_2、M_3是平面$Ax+By+Cz+D=0$上的点，则M_1、M_2、M_3的坐标应满足该平面方程，有

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 & ① \\ Ax_2+By_2+Cz_2+D=0 & ② \\ Ax_3+By_3+Cz_3+D=0 & ③ \end{cases}$$

由①－②，②－③有

$$\begin{cases} A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)+C(z_1-z_2)=0 \\ A(x_2-x_3)+B(y_2-y_3)+C(z_2-z_3)=0 \end{cases}$$

由平面解析几何知道，三点不共线的条件对应于

$$\frac{x_1-x_2}{x_2-x_3},\ \frac{y_1-y_2}{y_2-y_3},\ \frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}$$

不全相等，不妨设

$$\frac{y_1-y_2}{y_2-y_3}\neq\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}$$

则这时

$$\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

$A\neq 0$，因为若$A=0$，则可得出$B=C=0$，与A、B、C不全为零相矛盾.

$$\therefore B=\frac{-A\begin{vmatrix} x_1-x_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}}$$

$$C=\frac{-A\begin{vmatrix} y_1-y_2 & x_1-x_2 \\ y_2-y_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}}$$

$$D=-(Ax_1+By_1+Cz_1)$$

将B、C、D代入平面方程$Ax+By+Cz+D=0$，得

$$A(x-x_1)-A(y-y_1)\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}}$$

$$-A(z-z_1)\frac{\begin{vmatrix} y_1-y_2 & x_1-x_2 \\ y_2-y_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}}=0$$

方程两边同乘 $\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix} \Big/ A$ 有

$$(x-x_1)\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}-(y-y_1)$$

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}+(z-z_1)\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=0$$

即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}=0$$

此方程称为平面的三点式方程．

例2 求过$P(1，1，1)$、$Q(1，2，1)$、$R(1，1，2)$的平面方程．

解 由公式

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}=0$$

有

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$$

得
$$x-1=0$$

下面讨论平面方程$Ax+By+Cz+D=0$的几种特殊情形：

（1）$A\neq0$、$B\neq0$、$C\neq0$、$D\neq0$

这时平面不过原点，在ox、oy、oz轴上的截距分别为$-D/A$、$-D/B$、$-D/C$，在空间直角坐标系中，标出$(-D/A，0，0)$、$(0，-D/B，0)$、$(0，0，-D/C)$三点，连结三点即为所求的平面(如图7—6).

（2）$A\neq0$、$B\neq0$、$C\neq0$、$D=0$

此时，平面过原点．令$z=0$，得到该平面与xoy平面的交线，在xoy平面上画出这条直线$Ax+By=0$；再令$x=0$，得到该平面与yoz平面的交线，在yoz平面上画出这条直线$By+Cz=0$；画出四边与这两条直线平行的平行四边形即为所求的平面（如图7—7）．

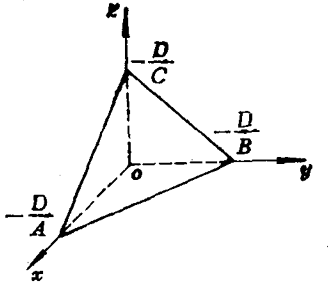

图7—6

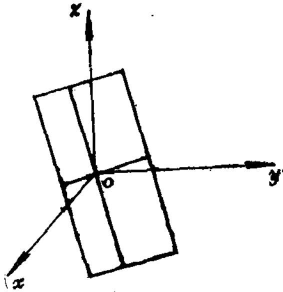

图7—7

（3）A、B、C中有一个为零，则平面平行于坐标轴．

如果$C=0$，方程为

$$Ax+By+D=0$$

由于方程缺z，故坐标z可以任意取值，只要x、y满足方程，则对应的点都在该平面上．因此在xoy平面上作直线

$$Ax+By+D=0$$

过这条直线作平行于z轴的平面，即为所求平面，这个平面平行于z轴（如图7—8）．

如果$D=0$，则$Ax+By=0$表示过z轴的平面．

若$A=0$，平面方程为$By+Cz+D=0$，缺少x项，平面与x轴平行．

若$B=0$，平面方程为$Ax+Cz+D=0$，缺少y项，平面与y轴平行．

（4）A、B、C中有两个为零，则平面垂直于坐标轴．

如果$A=B=0$，平面方程为$Cz+D=0$ 则 $z=-D/C$，说明平面上点的z坐标皆为$-D/C$，平面与z轴垂直（如图7—9）．

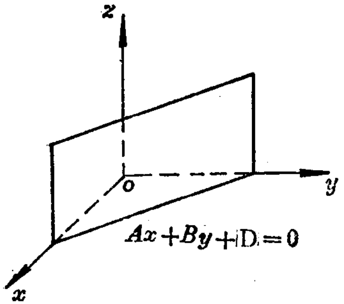

图7—8

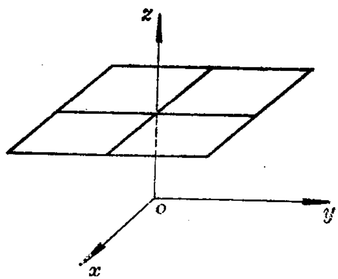

图7—9

同理，若$B=C=0$，平面方程为$Ax+D=0$，平面与x轴垂直．

若$A=C=0$，平面方程为$By+D=0$，平面与y轴垂直．

（5）$z=0$ 表示xoy平面；$x=0$ 表示yoz平面；$y=$ 表示xoz平面．

例3 设平面与ox、oy、oz轴分别交于P（2，0，0）、Q（0，3，0）、R（0，0，4）三点，求平面方程．

解 设所求方程为：$Ax+By+Cz+D=0$ ①

因$P(2,0,0)$、$Q(0,3,0)$、$R(0,0,4)$三点都在平面上，所以P、Q、R的坐标都满足方程，即

$$\begin{cases} 2A+D=0 \\ 3B+D=0 \\ 4C+D=0 \end{cases} \qquad ②$$