# 半群的模糊理论

谢祥云　吴明芬　著

科学出版社
www.sciencep.com

# 半群的模糊理论

[illegible] [illegible] 著

# 半群的模糊理论

谢祥云　吴明芬 著

国家自然科学基金项目
广东省自然科学基金项目
广东省教育厅自然科学基金项目
五邑大学专著出版基金资助

科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书较详细地介绍了半群的 Fuzzy 理论和粗糙集理论的基础知识及最新研究成果. 为使读者能全面了解该领域的研究动态, 在必要的地方均加了评述. 全书共分 7 章. 第 1 章介绍 Fuzzy 集理论的基本概念、Fuzzy 集的分解定理和扩张原理; 第 2 章介绍 Fuzzy 子半群定义、性质及基本运算; 第 3 章讨论 Fuzzy 理想及 Fuzzy 理想的生成; 第 4 章讨论各类 Fuzzy 素理想、它们之间的相互关系及其扩张; 第 5 章讨论正则半群的 Fuzzy 同余理论; 第 6 章讨论用 Fuzzy 理想、Fuzzy 左理想、Fuzzy 右理想、Fuzzy 双理想和 Fuzzy 拟理想等刻画正则半群; 第 7 章初步介绍了 Pawlak 粗糙代数理论, 关注了粗糙代数和半群代数理论的结合.

本书可作为数学专业本科高年级学生的选修教材和研究生教材, 也可作为应用数学研究工作者和从事信息科学之软计算、人工智能研究的科研工作者的参考用书.

**图书在版编目(CIP)数据**

半群的模糊理论/谢祥云, 吴明芬著. —北京: 科学出版社, 2005

ISBN 7-03-014847-9

Ⅰ. 半… Ⅱ. ①谢… ②吴… Ⅲ. 半群-模糊集理论 Ⅳ. O152.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 008442 号

责任编辑: 林 鹏 范庆奎/责任校对: 钟 洋

责任印制: 钱玉芬/封面设计: 王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 6 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2005 年 6 月第一次印刷 印张: 13

印数: 1—2 500 字数: 241 000

**定价: 32.00 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

# 前言

半群的代数理论，从它的基本对象、核心概念、主要课题的提出到它的行之有效的方法的建立，都是在数学内部 (如它与算子理论、拓扑学、概率论等学科结合相互渗透) 和外部 (特别是计算机科学) 的强烈推动下进行的，至今已开展系统研究近 60 年. 特别是近几十年新兴学科如形式语言与自动机理论、码论等交叉发展的需要，使得半群理论的发展非常迅速. 研究有序代数结构的关键问题之一是序结构，在有序代数结构中，序结构有两类，一类是外在的，另一类是内在的，即在代数结构中引入内部序结构使之成为序代数，利用序的方法和工具研究代数系统的特征. 因此序半群的研究也就成为半群理论的一个重要方面. Clifford 和 Preston (1961~1967) 所撰的两卷《半群的代数理论》 (The Algebraic Theory of Semigroups) 和 L Fuchs 1961 年用俄文撰写的《偏序代数系》 (后在 1963 年被译成德文和英文再次出版) 均被国际数学界公认为数学经典著作之一. Springer 出版的《半群论坛》 (Semigroup Forum) 自 20 世纪 70 年代创刊至今已成为国际上著名的学术刊物之一. 我国学者自 70 年代末在郭聿琦教授等的带领下由组合半群及序群入手开展系统研究，至今每年在国内外发表学术论文近 200 篇并有 20 多所高校在培养该领域的博士生和硕士生. 已经由科学出版社出版了三本专著：刘仲奎教授的《半群的 $S$- 系理论》、喻秉钧教授的《半群的双序集理论》和本书作者的《序半群引论》.

模糊数学是一门崭新的数学分支， Lotfi Zadeh 在他的论文《 Fuzzy Sets 》中提出了一个非常基本的概念 "Fuzzy set"(将 "Fuzzy" 译为 "模糊" 在中文中产生了很多歧义，在本书的正文中我们将保留 Fuzzy 一词不译) 之后，在当时一些很有影响的科学家与数学家中产生了较强的负面影响. 与此同时，它也吸引了一大批科学家的注意力. 他们主要来自两个方面：一方面来自工程技术人员，他们想挖掘 Fuzzy 集理论在实践中的应用；另一方面来自理论家，他们认识到利用 Fuzzy 集的思想在数学领域可以开辟一些新的研究方向. 事实上， Fuzzy 集理论正是沿着这两条线在发展. 就理论研究而言， Fuzzy 集最基本的研究是建立各种经典数学结构的有意思 Fuzzy 副本，希望得到和创造一个羽翼丰满的模糊数学世界，我们当然是假设这些数学理论研究将来在实践中能被利用，但是这不是理论研究者起初最关心的问题. 早在 1960 至 1980 年间， Fuzzy 理论研究主要集中在 Fuzzy 拓扑空间、 Fuzzy 自动机和各种动力系统、 Fuzzy 群和 Fuzzy 形式语言. Fuzzy 数学理论一个较大的发展是在 1980 年之后，这主要得益于模糊数学在应用领域的作为，特别是在日本的成功. 对模糊数学理论的研究，中国和印度在国际上是领先的. 即

使在 20 世纪 80 年代，西方也均是落后的．但 1990 年以后，在 John Mordeson 的带领下，他和他的 Creighton 大学模糊数学与计算机科学研究中心在模糊代数理论方面做出了令人瞩目的工作，也许最能说服人的恐怕就是他的两本书，《$L$- 子空间与 $L$- 子域》($L$-Subspaces and $L$-Subfields) 和 1994 年出版的《$L$- 代数引论》(Elements of $L$-Algebra). 1971 年，在 Rosenfeld 引入 Fuzzy 子群之后，标志着 Fuzzy 代数研究的开始．1982 年， Liu 进一步引入群 $G$ 的 Fuzzy 不变子群，环的 Fuzzy 理想等概念促使 Fuzzy 代数研究进一步深入到各代数分支的方方面面．例如 Fuzzy 子群、 Fuzzy 子环、 Fuzzy 子域、 Fuzzy 子格、 Fuzzy 模、 Fuzzy 代数等等． 1980 年， Kuroki 正式开始 Fuzzy 子半群的研究，它是自 Fuzzy 代数研究开始以来，模糊数学领域最活跃的研究领域之一 (包括 Fuzzy 子群，因为半群分类为 20M).

作为处理不确定信息的另一个有力工具，粗糙集 (Rough Set) 是波兰数学家 Z. Pawlak 于 1982 年提出的 (为开发自动规则生成系统及研究软计算问题而引入)，研究地域也局限在东欧一些国家，直到 80 年代末才引起各国学者的注意. 90 年代初，人们才逐渐认识到它的意义. RS 理论主要兴趣在于它恰好反映了人们用 Rough 集方法处理不分明问题的常规性，即以不完全信息或知识去处理一些不分明现象的能力，或依据观察、度量到的某些不确定的结果而进行分类数据的能力．由于计算机与网络信息技术的飞速发展使得各个领域的数据和信息急剧增加 (信息爆炸)，并且由于人类的参与使数据与信息系统中的不确定性更加显著 (复杂系统)，如何从大量的、杂乱无章的、强干扰的数据 (海量数据) 中挖掘潜在的、有利用价值的信息 (有用知识)，这给人类的智能信息处理能力提出了前所未有的挑战．由此产生了人工智能研究的一个崭新领域 —— 数据挖掘 (DM) 和数据库知识发现 (KDD). 在 DM 和 KDD 的诸多方法中，粗糙集理论与方法对于处理复杂系统不失为一种较为有效的方法，因为它与概率方法、模糊集方法和证据理论方法等其他处理不确定性问题理论的最显著的区别是它无需提供问题所需处理的数据集合之外的任何先验信息．由于在机器学习与知识发现、数据挖掘、决策支持与分析、专家系统、归纳推理和模式识别等方面的广泛应用，它现已成为一个热门的研究领域．有关粗糙集的理论及应用的文章在主要的计算机类、信息类、系统科学类和有关工程类杂志均可见到．粗糙集理论在中国成为热点的时间只有短短的八九年．粗糙集理论的核心是粗糙代数、粗糙逻辑以及粗糙集的公理化表示等.

半群的代数理论和不确定数学、信息科学及人工智能的软计算领域的交叉和融合，给代数学的研究提供了新的广阔的舞台，同时也给代数学理论提供了深刻的应用背景．在这样的背景下，本书的完成是非常自然的．本书试图全面地综述一下半群的模糊理论在近二十几年的发展历程，同时对今后该领域的发展提出了作者的看法，几乎在每章的结尾均加了一个评注以便读者开阔视野．从发展的轨迹来看，同时也是为了使初学者能走一条基本的、成熟的道路，我们主要从半群的模糊

同余理论与半群的模糊子系统理论 (包括模糊子半群、模糊理想、模糊正则子半群等) 这两条主线以及半群的粗糙集理论来观察分析. 尽管在 20 世纪六七十年代以来在半群代数理论研究的某些方向有一些专著出版, 但迅速发展起来的半群代数理论与其他学科的交叉有必要较为系统地介绍给广大科研工作者.

本书是在作者开设的研究生课程 "半群的 Fuzzy 理论" 的讲义的基础上改编而成的. 全书共分 7 章. 第 1 章介绍 Fuzzy 集理论的基本概念、Fuzzy 集的分解定理和扩张原理; 第 2 章介绍 Fuzzy 子半群定义、性质及基本运算; 第 3 章讨论 Fuzzy 理想及 Fuzzy 理想的生成; 第 4 章讨论各类 Fuzzy 素理想, 它们之间的相互关系及其扩张; 第 5 章讨论了正则半群的 Fuzzy 同余理论; 第 6 章讨论用 Fuzzy 理想、Fuzzy 左理想、Fuzzy 右理想、Fuzzy 双理想和 Fuzzy 拟理想等刻画正则半群; 第 7 章初步介绍了 Pawlak 粗糙代数理论, 关注了粗糙代数和半群代数理论的结合.

作者衷心感谢导师戴执中教授、郭聿琦教授和滦芝南教授多年来的指导、帮助和鼓励. 在南昌大学 (原江西大学) 打下的较宽厚的代数基础对培养我广泛的代数学术兴趣无疑是非常有益的. 感谢导师郭聿琦教授对我的关心和爱护, 是他给了我一个更宽的学术视野, 更高的学术境界. 感谢我的师兄弟们, 他们给了我在学术成长过程中很多美好的时光.

由于作者的知识和水平所限, 书中难免有错误或取材不当之处, 敬请读者批评指正.

谢祥云

2004 年 9 月 20 日于广东江门

# 目　录

前言
**第 1 章　Fuzzy 集理论的基本概念** …… 1
1.1　Fuzzy 子集 …… 1
1.2　格值子集与范算子 …… 6
1.3　Fuzzy 等价关系 …… 10
1.4　Fuzzy 等价类 …… 17
1.5　评述 …… 21
**第 2 章　Fuzzy 子半群** …… 22
2.1　Fuzzy 子半群 …… 22
2.2　Fuzzy 子半群的积 …… 24
2.3　幂等 Fuzzy 子集格 …… 28
2.4　Fuzzy 同态 …… 33
2.5　嵌入定理 …… 38
2.6　序半群与 Fuzzy 子集 …… 41
2.7　评述 …… 43
**第 3 章　Fuzzy 理想** …… 44
3.1　Fuzzy 理想 …… 44
3.2　Fuzzy 理想的另一表示 …… 48
3.3　Fuzzy 理想的生成 …… 55
3.4　正规 Fuzzy 理想 …… 61
**第 4 章　Fuzzy 素理想及其扩张** …… 66
4.1　Fuzzy 素理想 …… 66
4.2　Fuzzy 弱素理想 …… 70
4.3　Fuzzy 半素性 …… 73
4.4　Fuzzy 拟素和弱拟素左理想 …… 76
4.5　半单半群 …… 83
4.6　Fuzzy 理想扩张 …… 90

4.7 Fuzzy 理想扩张性质 …… 96
4.8 评述 …… 100
**第 5 章 正则半群** …… 102
5.1 正则半群 …… 102
5.2 内禀正则半群 …… 106
5.3 完全正则半群与左单群半格 …… 109
5.4 群半格 …… 114
5.5 拟正则半群 …… 117
5.6 Fuzzy 正则半群 …… 118
5.7 Fuzzy 弱正则和完全正则半群 …… 122
5.8 评述 …… 126
**第 6 章 Fuzzy 同余理论** …… 127
6.1 半群的 Fuzzy 同余 …… 127
6.2 Fuzzy 群同余格 …… 130
6.3 Fuzzy 同态基本定理 …… 133
6.4 Fuzzy Rees 同余 …… 136
6.5 Fuzzy 同余扩张 …… 141
6.6 逆半群的 Fuzzy 同余 …… 152
6.7 $T^*$-纯半群上的 Fuzzy 同余 …… 159
6.8 评述 …… 164
**第 7 章 粗糙集代数初步与半群** …… 166
7.1 Pawlak 粗糙代数 …… 166
7.2 Pawlak 粗糙代数的公理化 …… 171
7.3 Fuzzy 粗糙集与粗糙 Fuzzy 集 …… 176
7.4 粗糙半群 …… 183
7.5 评述 …… 189
**参考文献** …… 191
**后记** …… 197

# 第 1 章　Fuzzy 集理论的基本概念

在本章中我们仅仅提供一些本书其他章节讨论半群的 Fuzzy 理论所需要的关于 Fuzzy 集的基本知识，介绍 Fuzzy 集研究两个最基本的结论：分解定理与扩张原理. 介绍基于普通集 $X$ 的 Fuzzy 等价关系与 Fuzzy 等价类.

## 1.1　Fuzzy 子集

除非特别说明，$L$ 总是表示至少有两个元的完备的完全分配格. $L$ 的最大元与最小元分别用 1 和 0 表示， $L$ 上的交、并与偏序关系分别记为 $\vee$、 $\wedge$ 和 $\leqslant$. 如果 $L=[0,1]$, 则 $L$ 关于通常的序关系及 min, max 运算 (也即 $\wedge$ 与 $\vee$ 运算) 是一个完备的完全分配格. 我们知道，经典集合 $X$ 的任意子集 $A$ 可以定义一个函数 $f_A: X\to\{0,1\}$ , 即

$$(\forall x\in X)\ \ f_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\in X\setminus A.\end{cases}$$

该函数称为 $A$ 的 **特征函数**. Fuzzy 集合论的创始人 L A Zadeh 在 1965 年将 $A$ 的特征函数加以推广，以 $[0,1]$ 区间代替 $\{0,1\}$, 给出了隶属函数的概念，引入了 Fuzzy 子集的概念 (中文现译为模糊子集).

**1.1.1 定义**　设 $X$ 为非空集. 任意一个从 $X$ 到区间 $[0,1]$ 的映射 $\mu$ 称为 $X$ 的 **Fuzzy 子集**.

记从 $X$ 到 $[0,1]$ 的所有映射集为 $[0,1]^X$, $[0,1]^X$ 即为 $X$ 上的所有 Fuzzy 子集集 (有时也记为 $F(X)$). 特别地，如果将 $[0,1]$ 换为 $\{0,1\}$, 则 $\{0,1\}^X$ 与 $X$ 的幂集一一对应. 显然， $\{0,1\}^X\subset[0,1]^X$. 如果一个 $F$ 子集 $\mu\notin\{0,1\}^X$, 称 $\mu$ 为 $X$ 的 **真 Fuzzy 子集**. 从定义我们看出，设 $\mu\in F(X)$, 如果我们称 $\{x\mid\mu(x)>0,x\in X\}$ 为 $\mu$ 的 **承载集**(记为 supp$X$), 则 $\forall x\in X$, $\mu(x)$ 反映了 $x$ 从属于 supp$X$ 的隶属程度. 如果 $\mu(x)=0$ , 说明 $x\notin$ supp$X$; $\mu(x)$ 的值越大，说明 $x$ 隶属于 supp$X$ 的程度越大，这不像 $X$ 的经典子集 $X_1$, 对 $X$ 的任意元素，要么属于 $X_1$, 隶属 $X_1$ 的值为 1; 要么不属于 $X_1$, 隶属 $X_1$ 的为 0. 所以 Fuzzy 子集我们也可能用一个元素偶来表示，即 $(x,\mu(x)),\forall x\in X$.

**1.1.2 例**　设 $X=[0,120]$, $\mu$ 表示 “年轻”， $\nu$ 表示 “年老”，则 $\mu$ 和 $\nu$ 可分别定义为：

$$\mu(x)=\begin{cases}\left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<x\leqslant 120;\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 25.\end{cases}$$

$$\nu(x)=\begin{cases}\left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\leqslant 120;\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 50.\end{cases}$$

**1.1.3 定义**　设 $Y\subseteq X$, $\lambda\in[0,1]$. 我们定义 $Y_\lambda\in F(X)$ 如下:

$$Y_\lambda(x)=\begin{cases}\lambda, & x\in Y;\\ 0, & x\in X\setminus Y.\end{cases}$$

特别地，如果 $Y$ 是孤立点$\{y\}$, 则 $\{y\}_\lambda$ (我们记为 $y_\lambda$ ) 就是通常所说的 Fuzzy 点.

**1.1.4 定义**　设 $\mu,\nu\in F(X)$. 如果 $\mu(x)\leqslant\nu(x), \forall x\in X$, 称 $\nu$ 包含 $\mu$, 记 $\mu\leqslant\nu$; 如果 $\mu\leqslant\nu$, $\mu\neq\nu$, 称 $\nu$ 真包含 $\mu$, 记 $\mu<\nu$.

显然， $F(X)$ 关于上定义的包含关系 $\leqslant$ 构成一个偏序集 $(F(X),\leqslant)$.

**1.1.5 定义**　设 $\mu,\nu\in F(X)$. 定义 $\mu\cup\nu, \mu\cap\nu$ 如下:

$$\begin{aligned}(\forall x\in X)\quad &(\mu\cup\nu)(x)=\mu(x)\vee\nu(x),\\ &(\mu\cap\nu)(x)=\mu(x)\wedge\nu(x),\end{aligned}$$

则 $\mu\cup\nu$ 与 $\mu\cap\nu$ 分别称为 $\mu$ 与 $\nu$ 的并与交.

**1.1.6 定理**　设 $X$ 为非空集，则 $(F(X),\leqslant)$ 关于以上定义的并与交运算构成完备的完全分配格且 $X_1$ 为最大元， $X_0$ 为最小元. 进一步地， $[0,1]$ 可以同构地嵌入 $(F(X),\leqslant)$.

证明留给读者练习.

一般地，设 $I$ 为指标集， $\{\mu_i|i\in I\}$ 为 $X$ 的 Fuzzy 子集簇，则它们的最小上界 $\bigcup\limits_{i\in I}\mu_i$ 和最大下界 $\bigcap\limits_{i\in I}\mu_i$ 关于以下定义仍为 $F(X)$ 的元素.

$$(\forall x\in X)\quad\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)(x)=\bigvee_{i\in I}\mu_i(x),\quad\left(\bigcap_{i\in I}\mu_i\right)(x)=\bigwedge_{i\in I}\mu_i(x)$$

当 $|I|<\infty$ 时，例如 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ , 我们记

$$\bigcup_{i\in I}\mu_i=\mu_1\cup\mu_2\cup\cdots\cup\mu_n,\quad\bigcap_{i\in I}\mu_i=\mu_1\cap\mu_2\cap\cdots\cap\mu_n.$$

我们需要说明的是，在定理 1.1.6 中，$[0,1]$ 可同构嵌入 $(F(X),\leqslant)$ 的方式不是唯一的，例如

$$f_\lambda : \lambda \to y_\lambda,\ \forall \lambda \in [0,1],\ y \in X$$

是 $[0,1]$ 到 $(F(X),\leqslant)$ 的嵌入映射，$y$ 不同可得到不同的嵌入映射.

**1.1.7 定义**　设 $\mu \in F(X)$, $\lambda \in [0,1]$ .

$$\mu_\lambda = \{x \in X \mid \mu(x) \geqslant \lambda\}$$

称为 $\mu$ 的 $\lambda$-截集($\lambda$-cut, 也称 $\lambda$- 水平集 ($\lambda$-level)). 如果将 $\mu_\lambda$ 中的 $\geqslant$ 换成 $>$, 在不空的前提下，称 $\mu_\lambda{}^> = \{x \in X \mid \mu(x) > \lambda\}$ 为 $\mu$ 的 $\lambda$-强截集.

设 $\mu, \nu \in F(X)$, $\forall \lambda \in [0,1]$. 不难验证下列各款成立：

(1) $\mu \leqslant \nu \Rightarrow \mu_\lambda \subseteq \nu_\lambda$;

(2) $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \Rightarrow \mu_{\lambda_1} \subseteq \nu_{\lambda_2}$;

(3) $\mu = \nu \Leftrightarrow \mu_\lambda = \nu_\lambda, \forall \lambda \in [0,1]$.

下面两个定理给出了截集的基本性质，读者可以自行证明.

**1.1.8 定理**　设 $\{\mu_i \mid i \in I\} \subseteq F(X)$, 则

(1) $(\forall \lambda \in [0,1])\ \ \bigcup\limits_{i\in I}(\mu_i)_\lambda \subseteq (\bigcup\limits_{i\in I}\mu_i)_\lambda$;

(2) $\bigcap\limits_{i\in I}(\mu_i)_\lambda \subseteq (\bigcap\limits_{i\in I}\mu_i)_\lambda$.

当 $|I| < \infty$ 时，则 (1) 式等式成立.

**1.1.9 定理**　设 $\mu \in F(X)$, $\{\lambda_i \mid i \in I\} \subseteq [0,1]$, 设 $b = \bigwedge\limits_{i\in I}\lambda_i$ , $c = \bigvee\limits_{i\in I}\lambda_i$, 则

(1) $\bigcup\limits_{i\in I}\mu_{\lambda_i} \subseteq \mu_b$;

(2) $\bigcap\limits_{i\in I}\mu_{\lambda_i} = \mu_c$.

**1.1.10 定理** (分解定理)　设 $\mu \in F(X)$, 则

$$\mu = \bigcup_{\lambda\in[0,1]}(\mu_\lambda)_\lambda = \bigcup_{\lambda\in Im\mu}(\mu_\lambda)_\lambda.$$

**证**　设 $x \in X$, 则

$$\left(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}(\mu_\lambda)_\lambda\right)(x) = \bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\mu_\lambda)_\lambda(x) = \bigvee_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda \in L|\lambda \leqslant \mu(x)\} = \mu(x).$$

因此，

$$\mu = \bigcup_{\lambda\in[0,1]}(\mu_\lambda)_\lambda.$$

同理，可以得出 $\mu = \bigcup\limits_{\lambda\in Im\mu}(\mu_\lambda)_\lambda$. 证毕.　□

**1.1.11 定义**　设 $\{X_i \mid i \in I\}$ 为非空集簇，$X$ 为 $X_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 的卡氏积，即

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i, i \in I\}.$$

设 $\mu_i \in F(X_i), i \in I$, 则定义 $F(X)$ 的一个元素 $\mu$ 如下：

$$(\forall x \in X) \ \ \mu(x) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(x_i),$$

$\mu$ 称为 $\{\mu_i \mid i \in I\}$ 的 完全直积(complete direct product). 记 $\mu = \widetilde{\prod_{i \in I}} \mu_i$. 如果 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$, 则

$$X = X_1 \otimes X_2 \cdots X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

$\mu$ 可写成

$$\mu = \widetilde{\prod_{i \in I}} \mu_i = \mu_1 \widetilde{\otimes} \mu_2 \cdots \mu_n.$$

从定义 1.1.11 中我们看出，如果 $\mu_i, \nu_i \in F(X)$,$i \in I$ 且 $\mu_i \leqslant \nu_i$, 则

$$\widetilde{\prod_{i \in I}} \mu_i \leqslant \widetilde{\prod_{i \in I}} \nu_i.$$

**1.1.12 定义** (扩张原理)　设 $X$ 与 $Y$ 为两个非空集合，Fuzzy 是 $X$ 到 $Y$ 的映射且 $\mu \in F(X)$ , $\nu \in F(Y)$. 定义两个 Fuzzy 子集 $f(\mu) \in F(Y)$ , $f^{-1}(\nu) \in F(X)$ 如下：

$$(\forall y \in Y) \ \ f(\mu)(y) = \bigvee \{\mu(x) | x \in X, f(x) = y\},$$

$$(\forall x \in X) \ \ f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x)).$$

$f(\mu)$, $f^{-1}(\nu)$ 分别称为 $\mu$ 在 $f$ 下的象和 $\nu$ 在 $f$ 下的原象或逆象. 在 $f(\mu)$ 的定义中，如果 $f^{-1}(y) = \emptyset$ , 规定空集的最小上确界为 0.

**1.1.13 定理**　设 $f$ 为 $X$ 到 $Y$, $g$ 为 $Y$ 到 $Z$ 的映射，则下列各款成立：

(1) 设 $\{\mu_i \mid i \in I\} \subseteq F(X)$, 则 $f(\bigcup_{i \in I} \mu_i) = \bigcup_{i \in I} f(\mu_i)$. 因此,

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \Rightarrow f(\mu_1) \leqslant f(\mu_2), \forall \mu_1, \mu_2 \in F(X).$$

(2) 设 $\{\nu_j \mid j \in J\} \subseteq F(Y)$, 则

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j \in J} \nu_j\Big) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(\nu_j), \ \ f^{-1}\Big(\bigcap_{j \in J} \nu_j\Big) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(\nu_j).$$

因此,

$$\nu_1 \leqslant \nu_2 \Rightarrow f^{-1}(\nu_1) \leqslant f^{-1}(\nu_2), \forall \nu_1, \nu_2 \in F(Y).$$

(3) $f^{-1}(f(\mu)) \geqslant \mu, \forall \mu \in F(X)$. 特别地, $f$ 为单射时, $f^{-1}(f(\mu)) = \mu, \forall \mu \in F(X)$. 这时, $\mu \to f(\mu)$ 是 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 的单射, $\nu \to f^{-1}(\nu)$ 是 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 的满射.

(4) $f(f^{-1}(\nu)) \leqslant \nu, \forall \nu \in F(Y)$. 特别地, $f$ 为满射时, $f(f^{-1}(\nu)) = \nu, \forall \nu \in F(Y)$. 这时, $\mu \to f(\mu)$ 是 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 的满射, $\nu \to f^{-1}(\nu)$ 是 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 的单射.

(5) $f(\mu) \leqslant \nu \Leftrightarrow \mu \leqslant f^{-1}(\nu), \forall \mu \in F(X), \forall \nu \in F(Y)$.

(6) $g(f(\mu)) = (g \circ f)(\mu), \forall \mu \in F(X)$ 且 $f^{-1}(g^{-1}(\xi)) = (g \circ f)^{-1}(\xi), \forall \xi \in F(Z)$.

**证**　(1) 和 (2) 容易证得. 设 $\mu \in F(X)$, 则

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(\mu))(x) &= f(\mu)(f(x)) \\ &= \bigvee\{\mu(x') | x' \in X, f(x') = f(x)\} \\ &\geqslant \mu(x), \forall x \in X. \end{aligned}$$

特别地, 如果 $f$ 是单射, 则

$$\bigvee\{\mu(x') | x' \in X, f(x') = f(x)\} = \mu(x), \forall x \in X.$$

因此, $f^{-1}(f(\mu)) = \mu$. 又如果 $f(\mu) = f(\mu_1)$, 则 $f^{-1}(f(\mu)) = f^{-1}(f(\mu_1))$, 即 $\mu = \mu_1$. 因此 $\mu \to f(\mu)$ 是 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 的单射. 又任取 $\mu \in F(X)$ , 则存在 $f(\mu) \in F(Y)$ 使得 $f^{-1}(f(\mu)) = \mu$ . 因此 $\nu \to f^{-1}(\nu)$ 是 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 的满射. 这就完成了 (3) 的证明.

(4) 设 $\nu \in F(Y)$, 则

$$\begin{aligned} (\forall y \in Y) \;\; f(f^{-1}(\nu))(y) &= \bigvee\{f^{-1}(\nu)(x) | x \in X, f(x) = y\} \\ &= \bigvee\{\nu(f(x)) | x \in X, f(x) = y\} \\ &= \begin{cases} \nu(y), & y \in f(X) \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \\ &\leqslant \nu(y). \end{aligned}$$

如果 $f$ 是满射, 则 $(\forall y \in Y)\ f(f^{-1}(\nu))(y) = \nu(y)$ , 即 $f(f^{-1}(\nu)) = \nu$ . 进一步地, 任意取 $\nu \in F(Y)$ , 则从 $f(f^{-1}(\nu)) = \nu$ 得 $\mu \to f(\mu)$ 是 $F(X)$ 到 $F(Y)$ 的满射; 又如果 $f^{-1}(\nu_1) = f^{-1}(\nu)$ , 则 $\nu_1 = f(f^{-1}(\nu_1)) = f(f^{-1}(\nu)) = \nu$. 因此 $\nu \to f^{-1}(\nu)$ 是 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 的单射.

由 (1) 至 (4), 很容易得出 (5) 成立.

(6) 因为对任意的 $z \in Z$ 和 $x \in X$,

$$
\begin{aligned}
(\forall \mu \in F(X))\ g(f(\mu))(z) &= \bigvee\{f(\mu)(y)|y \in Y, g(y)=z\} \\
&= \bigvee\{\bigvee\{\mu(x)|x \in X, f(x)=y\}|y \in Y, g(y)=z\} \\
&= \bigvee\{\mu(x)|x \in X, (g\circ f)(x)=z\} \\
&= (g\circ f)(\mu)(z), \forall z \in Z. \\
(\forall \xi \in F(Z))\ (g\circ f)^{-1}(\xi)(x) &= \xi((g\circ f)(x)) = \xi(g(f(x))) \\
&= g^{-1}(\xi)(f(x)) = f^{-1}(g^{-1}(\xi)(x), \forall x \in X.
\end{aligned}
$$

因此 (6) 成立. 证毕. □

## 1.2　格值子集与范算子

在 Fuzzy 子集的定义中, 我们选取 $[0,1]$ 区间作为 Fuzzy 子集集的取值范围是有它们的实际背景的, 因为一个变量从 0 渐变到 1 正好反映一个实际背景下量的从无到完美的过程. 如果我们进一步抽象, 将 $[0,1]$ 换成格或其他代数系统, 就可以得出和 Fuzzy 子集类似的性质.

**1.2.1 定义**　设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集, $A \subset X, a \in X$. $a$ 称为 $A$ 的 *上界*, 若 $\forall x \in A, x \leqslant a$. 如果 $A$ 有一最小上界 $a$, 即 $a$ 为 $A$ 的上界且对 $A$ 的任一上界 $b$, 总有 $a \leqslant b$. 这时 $a$ 称为 $A$ 在 $X$ 中的 *上确界*, 记作 $a = \sup_X A$ , 不致引起混淆时, 简记 $a = \sup A$ 或 $\bigvee A$.

对偶地, 可以定义 $A$ 的 *下界* 和 *下确界* $\inf A$ 或 $\bigwedge A$.

在定义 1.2.1 中, 如果 $A = \emptyset$ , 则 $X$ 中任何元均为 $A$ 的上界和下界. 如果 $X$ 有最大元 1 和最小元 0, 则 0 为 $\emptyset$ 的上确界, 1 为 $\emptyset$ 的下确界, 即 $\sup\emptyset = 0$ , $\inf\emptyset = 1$.

**1.2.2 定义**　设 $(X,\leqslant)$ 是偏序集, 若对 $X$ 中任意两个元 $a,b$ 均有 $\sup\{a,b\}$ 和 $\inf\{a,b\}$ 存在, 称 $(X,\leqslant)$ 为 *格*, 这时 $\sup\{a,b\}$ 和 $\inf\{a,b\}$ 可分别简记为 $a\vee b, a\wedge b$. 一个格称为 *完备格*, 如果 $\forall A \subseteq X$ , $\sup A$ 和 $\inf A$ 均存在.

显然一个完备格一定存在最大元 (记为 1) 和最小元 (记为 0).

**1.2.3 定义**　设 $L$ 是完备格. 如果以下两个等式成立, 称 $L$ 为 *完全分配格* (completely distribute lattice) :

$$\bigwedge_{i\in I}\left(\bigvee_{j\in J} a_{ij}\right) = \bigvee_{f\in J^I}\left(\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)}\right),\quad \bigvee_{i\in I}\left(\bigwedge_{j\in J} a_{ij}\right) = \bigwedge_{f\in J^I}\left(\bigvee_{i\in I} a_{if(i)}\right).$$

**1.2.4 注**　格的完全分配性在表述上还有一个形式, 即上式中 $I$ 和 $J$ 似乎没有关系. 但一般情况下, 不同的 $i_0 \in I$ , $\bigvee\limits_{j\in J} a_{i_0 j}$ 中 $J$ 的基数不一定相同. 例如

$I=\{0,1\}$, 下列两式:

$$(a_{11}\wedge a_{12})\vee(a_{21}\wedge a_{22})=\bigvee_{i\in\{1,2\}}\Big(\bigwedge_{j\in\{1,2\}}a_{ij}\Big).$$

但 $(a_{11}\wedge a_{12})\vee(a_{21}\wedge a_{22}\wedge a_{23})$ 在表述时只有写成

$$\bigvee_{i\in\{1,2\}}\Big(\bigwedge_{j\in J_i}a_{ij}\Big),\quad 其中\ J_1=\{1,2\},J_2=\{1,2,3\}.$$

所以在完全分配性的定义时，我们给出另外一种表述:

$$\bigwedge_{i\in I}\Big(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij}\Big)=\bigvee_{f\in\prod\limits_{i\in I}J_i}\Big(\bigwedge_{i\in I}a_{if(i)}\Big)$$

及其对偶. 这里 $a_{ij}\in L$, $I\neq\emptyset$, $J\neq\emptyset$ . 当然这种陈述和定义 1.2.3 是等价的且定义 1.2.3 中两等式仅一条成立即可.

**1.2.5 例**　(1) 设 $L=[0,1]$, 则 $L$ 关于通常的序关系是一个完备格且是完全分配的. 设 $X\neq\emptyset$, 则 $X$ 的幂集 $2^X$ 关于通常集合包含关系是完全分配格.

(2) $L$ 为数轴 R 上的一切开集之集关系集合的包含关系构成的完备格. 取 $A=(0,1)$, $B_n=\left(1-\dfrac{1}{n},2\right)$, $n=1,2,\cdots$, 则

$$\begin{aligned}A\bigvee\Big(\bigwedge_{n=1}^{\infty}B_n\Big)&=A\bigcup\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\Big)^{\circ}\\&=(0,1)\cup[1,2)^{\circ}\\&=(0,1)\cup(1,2).\end{aligned}$$

这里 $K^{\circ}$ 表示集合 $K$ 的内部, $\forall K\subseteq R$ . 但

$$\begin{aligned}\bigwedge_{n=1}^{\infty}(A\bigvee B_n)&=\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Big((0,1)\bigcup(1-\frac{1}{n},2)\Big)\Big)^{\circ}\\&=\Big(\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{n},2\Big)\Big)\bigcup(0,1)\Big)^{\circ}\\&=(0,2)^{\circ}=(0,2),\end{aligned}$$

因此 $L$ 不是完全分配格.

**1.2.6 定义**　设 $X$ 为非空集合, $L$ 为完全分配格. $L^X$ 中的任意元素 $\mu$ 称为 $X$ 的 LF 子集 (lattice fuzzy subset).

**1.2.7 注**　$X$ 的 Fuzzy 子集是特殊的 LF 子集，可以将第一节所讨论的一切性质及分解定理与扩张原理推广到 LF 子集上.

为了使 Fuzzy 集合适合于不同的 Fuzzy 现象， Zadeh 提出的 $\vee, \wedge$ 算子不一定和某些 Fuzzy 现象吻合，对此人们相继提出了不少新算子，统称为 Fuzzy 算子，它们各有优缺点，下面对常见的几种 Fuzzy 算子作简单介绍.

设 $I=[0,1]$ , $I$ 上的任意二元运算均为 $I\times I$ 到 $I$ 的映射.　$\forall a,b\in[0,1]$.

(1) Zadeh 算子：　$\vee:(a,b)\to a\vee b$, $\wedge:(a,b)\to a\wedge b$;

(2) 最大与乘积算子：　$\vee$ 同 (1), 乘积为普通实数乘法 (以此来取代 Zadeh 算子中的 $\wedge$);

(3) 代数和与乘积算子：将 (1) 中第一个算子换为 $\oplus:(a,b)\to a+b-ab=1-(1-a)(1-b)$, 第二个算子换为普通实数乘法;

(4) 有界和与积算子：

$$\vee_+:(a,b)\to(a+b)\wedge 1,\ \wedge_\bullet:(a,b)\to 0\vee(a+b-1);$$

(5) Einstein 算子：

$$E_+:(a,b)\to\frac{a+b}{1+ab},\quad E_\bullet:(a,b)\to\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)};$$

(6) Yager 算子：

$$Y_+:(a,b)\to 1\wedge(a^\alpha+b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},\alpha\in[1,\infty),$$

$$Y_\bullet:(a,b)\to 1-1\wedge[(1-a)^\alpha+(1-b)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}};$$

(7) Hamacher 算子：

$$H_+:(a,b)\to\frac{(a\oplus b)-(1-\gamma)ab}{\gamma+(1-\gamma)(1-ab)},\gamma\in[0,\infty),$$

$$H_\bullet:(a,b)\to\frac{ab}{\gamma+(1-\gamma)(a\oplus b)}.$$

一般地，概括它们的共性，可总结出更一般的形式.

**1.2.8 定义**　设 $T:[a,b]^2\to[0,1]$. 如果映射 $T$ 满足：　$\forall a,b\in[0,1]$,

(1) $T(a,b)=T(b,a)$;

(2) $T(T(a,b),c)=T(a,T(b,c))$;

(3) 如果 $a\leqslant a_1$ ,$b\leqslant b_1$ , 则 $T(a,b)\leqslant T(a_1,b_1)$;

(4) $T(1,a)=a$;

则 $T$ 称为 *三角模*, 也称 *T范数* (triangular norm 或 $t$-norm).