非数学类专业数学学习指导丛书

Gailulun yu Shuli Tongji Xuexi Zhidao

概率论与数理统计

学习指导

四川大学数学学院　刘晓石　陈鸿建　编著

Sichuan University Press
四川大学出版社

四川大学出版社

概率论与数理统计

学习指导

概率论与数理统计
学 习 指 导

刘晓石　陈鸿建　编著

四 川 大 学 出 版 社
2004 年·成都

责任编辑：石大明
责任校对：张俊峰
封面设计：罗　光
责任印制：李　平

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导 / 刘晓石，陈鸿建编著．成都：四川大学出版社，2004.8
ISBN 7-5614-2885-5

Ⅰ．概…　Ⅱ．①刘…　②陈…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 087945 号

内容提要

本书是根据教育部非数学类数学课程指导委员会制定的教学基本要求，兼顾研究生人学考试要求编著的，是作者多年来从事数学教学、辅导工作的结晶．

本书紧密配合概率论与数理统计现行教材内容，按章介绍了内容提要、重点与难点、学习要求、例题分析、自我检测题及解答等内容，以帮助读者深入理解基本概念与基本理论，掌握基本运算技巧，避免易犯的错误，拓宽解题思路和提高分析、解决问题的能力．

本书可供理、工、经、管、医、农等非数学类专业大学生学习概率论与数理统计同步使用，也可供参加硕士研究生人学考试的考生复习使用．另外亦可作为从事概率论与数理统计教学的教师与非数学类专业研究生的参考书．

书名　概率论与数理统计学习指导

作　者　刘晓石　陈鸿建　编著
出　版　四川大学出版社
地　址　成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行　四川大学出版社
印　刷　郫县犀浦印刷厂
开　本　787mm×1 092mm　1/16
印　张　12.5
字　数　280 千字
版　次　2004 年 8 月第 1 版
印　次　2004 年 8 月第 1 次印刷
印　数　0 001～6 000 册
定　价　15.00 元

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。电话：85408408/85401670/85408023　邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回出版社调换。
◆网址：www. scupress. com. cn

前　　言

《概率论与数理统计》课程是高等学校理工及管理、经济等专业学生在大学二年级的一门重要的必修公共课，也是硕士研究生数学入学考试的重要组成内容之一．该课程一方面强调训练学生应用数学知识解决实际问题的能力，特别是处理随机现象的能力；另一方面，又为学生进入专业学习提供必要的数学知识与工具．所以，学好此课程的重要性是不言而喻的．但是，由于授课的学时数有限，并且还受到教材内容、教师水平、学生素质等因素影响，以及这门学科的思维方式与其他数学有所不同，初学者对掌握这门功课往往感到有些困难．而且，由于考研热的影响，近年来对学生掌握及应用概率统计知识的程度要求有不断深化的趋势．有鉴于此，我们编著了这本学习指导书，希望它能帮助读者全面、系统地学习概率论及数理统计的基本内容，学习并掌握解题的基本方法与技巧，从而提高读者对这门功课的理解与认识水平，克服学习中的困难．

本书的章节与四川大学现行的理工类概率统计教材的章节是一致的，由于教学大纲只要求前八章，本书也只编到第八章．本书密切配合教材各章的内容，力求阐明解题方法的思路及应用技巧．对于例题的选择，力求具有典型性，难易适度，有基础题也有综合题，个别例题在大纲范围内适当加深．同学们可根据自己的情况选读．

本书的基本内容按每章展开，主要有以下几个部分：

1．内容提要　列举出本章的主要概念、知识点，主要定理，以利于学生复习．

2．重点与难点　列出本章内容中哪些是重点，哪些是难点．

3．学习要求　根据课程大纲与该章的内容，对学生提出学习要求．

4．例题解析　分为选择题及解答题两部分．从大量习题中精选出具有代表性、解法典型的习题作解答，并有简要分析，重点在于解题的思路与技巧．其难易程度有低有高．

5．检测题　每章后都附有（A）、（B）两类检测题，以检验学生对本章内容的掌握程度．内容有填空、选择及解答题．一般而言，（A）类题稍浅，（B）类题较深．

6．检测题答案与提示　每章检测题后均有答案，有些有提示及解答．但应注意有些题解法并不唯一，我们在答案上一般只介绍其中一种．

7．自测题　本书最后，设了几套自测题，以供同学们在复习完成后使用．

本书由刘晓石主笔，负责统稿、协调，刘晓石、陈鸿建编著，其中，刘晓石编写第一、二、三、八章，陈鸿建编写第四、五、六、七章．

限于编著者的水平，书中难免有不足及错误之处，希望读者批评指正，以利于以后的进一步修改．

编著者

2004 年 6 月

目　　录

第一章　随机事件及概率

内容提要

1. 加法与乘法原理

全部组合与分析公式基于以下两条原理：

设进行 A_1 过程有 m_1 种方法，进行 A_2 过程有 m_2 种方法，则有：

(1) 加法原理　进行 A_1 过程或者 A_2 过程共有 m_1+m_2 种方法；

(2) 乘法原理　进行 A_1 过程后接着进行 A_2 过程共有 $m_1\times m_2$ 种方法．

2. 排列组合公式

(1) 排列

(i) 从几个不同元素中不放回地取出 r 个元素($0<r\leqslant n$)，按顺序排成一列，共有 $P_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$种排法；

(ii) 从 n 个不同元素中有放回地取出 r 个元素做排列，则共有 $n^r=\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r个}$ 种排法（这里 r 可以大于或等于 n）.

(2) 组合

从 n 个不同元素中任意取出 r 个不同元素($0<r\leqslant n$)，不计顺序并成一组，它叫做一个组合，其总数为

$$C_n^r=\frac{P_n^r}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}.$$

3. 事件与样本空间

一个随机试验的全部可能的结果组成一个集合 Ω，它叫样本空间．Ω 中的元素，即随机试验的每个结果叫样本点，随机事件 A 是Ω 的子集．

设 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$是同一样本空间中的随机事件，它们之间的关系及运算有：

(1) 包含关系　$A\subset B$: $\forall x\in A$　则 $x\in B$；

(2) 相等关系　$A\subset B$　$B\subset A$　则 $A=B$；

(3) 和事件　$A\cup B$(或记为 $A+B$)$=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$；

$\bigcup\limits_{k\in I}A_k=\{x\mid$存在 $k\in I$ 使 $x\in A_k\}$；

(4) 积事件　$A\cap B$ (或记为 AB)$=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$；

$\bigcap\limits_{k\in I}A_k=\{x\mid\forall k\in I, x\in A_k\}$；

(5) 差事件　$A-B=\{x\in A$ 且 $x\notin B\}$；

(6) 互斥(或不相容)事件　$AB=\Phi$;

(7) 互逆(或对立)事件　$AB=\Phi$, $A\cup B=\Omega$, 记为 $\overline{A}=B, A=\overline{B}$;

(8) De Morgen 律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}$, $\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$.

4. 概率的定义及性质

概率的定义是公理化的，即 P 是从 Ω 的子集族到 $[0,1]$ 上的一个映射，若满足以下三个条件:

(1) $P(A)\geqslant 0$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 若 $A_iA_j=\Phi(i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots)$,有 $P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)$,则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率．

由此可以推出概率有以下性质:

(i) $P(\Phi)=0$;

(ii) (有限可加性)　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互斥事件，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$;

(iii) 若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，一般地，若 $A\not\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB);$$

(iv) $P(A)+P(\overline{A})=1$;

(v) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，且

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n).$$

5. 等可能概型

特点：每个样本点被取到的机会均等．

(1) 古典概型

特点:样本空间是有限集，每个基本事件发生的可能性相同．其计算公式为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}.$$

计算古典概率的基本工具是排列组合公式．

(2) 几何概型

特点:样本空间为 n 维欧氏空间的子集，且每个样本点的取得仍具有等可能性．它的计算公式是:

设 A 是 $\Omega\subset R^n$ 中的子集，则

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

其中，$m(A)$，$m(\Omega)$表示 A 及 Ω 在 R^n 中的度量，如长度、面积、体积等．

6. 条件概率及乘法公式

(1) 设 A,B 是两事件，且 $P(B)>0$. 称 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$为在事件 B 发生条件下事件 A 发生的概率，即条件概率．

(2) 乘法公式　若 $P(A)>0$, $P(B)>0$, 有

$$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A),$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\ P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

7. 全概率及 Bayes 公式

若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 n 个事件，且 $B_iB_j=\Phi(i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，称 $\{B_i\}(i=1,2,\cdots,n)$是 Ω 的一个划分，或完备事件组．这时：

(1) $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$；　　（全概率公式）

(2) $P(B_i\mid A)=\dfrac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}$.　　(Bayes 公式)

8. 事件的独立性

若 $P(AB)=P(A)P(B)$,称事件 A 与 B 独立．这时以下三对事件：

$$\{A,\overline{B}\},\qquad \{\overline{A},B\},\qquad \{\overline{A},\overline{B}\}$$

也两两独立．

当 $P(B)>0$ 时，

$$A\text{ 与 }B\text{ 独立}\Longleftrightarrow P(A)=P(A|B).$$

若对任意的 $k(1<k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\ P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 A_1，$A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立事件，这里共有(2^n-n-1)个等式．此时，

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i).$$

9. 可靠性问题

设每个元件独立，第 i 个元件正常工作的概率为 p_i，若一个系统由 n 个元件组成，则有：

(1) 串联系统　可靠度为$\prod\limits_{i=1}^{n}p_i$；

(2) 并联系统　可靠度为 $1-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-p_i)$.

特别地，若元件构造相同，每个 $p_i=p$ 是相等的，则串联系统可靠度为 p^n，并联系统可靠度为 $1-(1-p)^n$.

由此出发，可以计算一个混联系统的可靠度．

重点与难点

1. 重点　概率的定义、性质,古典概率及全概率公式，事件的独立性．

2. 难点　判断事件的类型，古典概率的计算，全概率及 Bayes 公式的应用．

学 习 要 求

1. 了解样本空间及随机事件的概念，掌握事件的关系与运算．

2. 理解条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典概率和几何型概率．掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率及 Bayes 公式．

3. 理解事件的独立性概念，掌握用事件的独立性进行概率计算的方法，会解决一些简单的可靠性计算问题．

例 题 分 析

一、单项选择题

1. 对掷一枚骰子的试验，设 $A=$“出现偶数点”，则称 A 为________________．

(A) 不可能事件；　(B) 基本事件；　(C) 必然事件；　(D) 随机事件.

分析： $A=\{2,4,6\}$既不是单点集，也不是全集，A 可能发生也可能不发生，故为随机事件，但不是基本事件．故应选(D)．

2. 下列各组事件中，互为对立事件的是________________．

(A) $A=\{$抽到的三个产品全合格$\}$，　$B=\{$抽到的三个产品全不合格$\}$；

(B) $A=\{$抽到的三个产品中合格品不少于 1 个$\}$，

$B=\{$抽到的三个产品中合格品不多于 1 个$\}$；

(C) $A=\{$抽到的三个产品全不合格$\}$，　$B=\{$三个产品至少 1 个合格$\}$；

(D) $A=\{$三个产品中有 2 个不合格$\}$，　$B=\{$三个产品中有 2 个合格$\}$.

分析： 主要看以上四对事件是否有非空交集，且满足“非此即彼”的条件. 故选(C).

3. 设 A，B 为两个事件，则$(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$ 表示________________．

(A) 必然事件；　(B) 不可能事件；

(C) A 与 B 恰有一个发生；　(D) A 与 B 不同时发生.

分析：由集合的运算性质，易知$(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=(A\cup B)\overline{AB}$，它表示事件 A 或 B 发生但 AB 不能同时发生，即 A 与 B 恰有一个发生. 故应选(C).

4. 设 A,B 为随机事件，且 $P(AB)=0$，则下列命题中正确的是________________．

(A) A 与 B 互斥；　(B) AB 是不可能事件；

(C) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$；　(D) AB 不一定是不可能事件.

分析： 请同学们注意，零概率事件未必是不可能事件．例如，在单位圆内部任取一点 $M(x,y)$，设 $A=B=\{(0,0)\}$，即正好取到原点，则 $AB\neq\Phi$，由几何概率知 $P(AB)=0$. 故(A)、(B) 均不对. 至于(C)，可另举一例：掷一枚硬币，A 表示出现“正面”，B 表示出现“反面”，则 $AB=\Phi,P(AB)=0$，但 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，故(C)也不正确. 故只能选(D). 另外，类似可得，1 概率事件也不一定是必然事件．

5. 设 $B\subset A$，则____________________成立．

(A) $P((\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A)$; (B) $P(\overline{A}-\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{B})$;

(C) $P(B|A)=P(B)$; (D) $P(A|\overline{B})=P(A)$.

分析：由 $B\subset A$ 知，$A=A\cup B$，故 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)$,故(A)正确．又由于 $\overline{B}\supset\overline{A}$,故(B)不正确．至于(C)、(D)，可从 $AB=B$ 及条件概率公式推知其不正确．

6. 设 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则下列各式正确的是________.

(A) A 与 B 互不相容； (B) A 与 B 互相对立；

(C) A 与 B 互相独立； (D) A 与 B 至少一个必然发生.

分析： 由题设知 $P(A|B)=1-P(\overline{A}|\overline{B})=P(A|\overline{B})$,又

$$\begin{aligned}P(A)&=P(AB\cup A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})\\&=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|B)\\&=(P(B)+P(\overline{B}))P(A|B)=P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\end{aligned}$$

从而得 $P(AB)=P(A)P(B)$，即 A 与 B 是独立的. 故应选(C)．

又从第 4 题的讨论中知，从概率的取值中是得不到两事件对立、不相容或必然发生的结论的，故(A)、(B)、(D) 均不正确．

7. 设 A，B 是两事件，$B\subset A$ 且$P(A)\neq P(B)$，$P(B)>0$，则下列________正确．

(A) $P(B|A)=1$; (B) $P(B|\overline{A})=1$;

(C) $P(A|B)=1$; (D) $P(A|\overline{B})=0$.

分析： 由 $B\subset A$ 知，$AB=B$，$P(AB)=P(B)$，从而 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$.
故应选(C).

8. 设 A,B 是两事件，且有 $P(C|AB)=1$，则以下结论正确的是________.

(A) $P(C)=P(AB)$; (B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$;

(C) $P(C)=P(A\cup B)$; (D) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$.

分析： 由 $P(C|AB)=\frac{P(ABC)}{P(AB)}=1$，知 $P(ABC)=P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$，且 $ABC\subset C$，$P(ABC)\leqslant P(C)$. 故应选(B).

9. 设 A，B 是两事件，$A\subset B$，$P(B)>0$，则下列结论正确的是________.

(A) $P(A)<P(A|B)$; (B) $P(A)\leqslant P(A|B)$;

(C) $P(A)>P(A|B)$; (D) $P(A)\geqslant P(A|B)$.

分析： 由于 $A\subset B$,知 $AB=A$,且由 $0<P(B)\leqslant 1$,知$\frac{1}{P(B)}\geqslant 1$，故

$$P(A)-P(A|B)=P(A)-\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A)-\frac{P(A)}{P(B)}=P(A)(1-\frac{1}{P(B)})\leqslant 0,$$

即得 $P(A)\leqslant P(A|B)$. 故应选(B).

此题也可以这样考虑：当事件 B 已发生时，样本空间从 Ω 缩小为B，事件 A 在B 中所占“比重”应不小于 A 在Ω 中所占“比重”，故必有(B)成立．

二、解答题

(一) 随机事件与概率的性质

1. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 一袋中放有 3 个球，分别标上 1, 2, 3 号;从袋中不放回地抽取 2 次，每次一球，记录两次取球的号码;

(2) 从上述袋中每次取一球，看后放回，混和后再取一球．记录两次取球的号码;

(3) 从上述袋中一次性任取两球，记录取到的号码．

解 (1) 第(1)种取法在概率论中叫不放回抽样，两次取到的球号不能重复，故共 3×2个样本点，其样本空间 Ω_1 可表示为:

$$\Omega_1=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}.$$

(2) 第(2)种取法为有放回抽样，两次取到的球号可以重复，故共有 $3\times3=9$ 个样本点，样本空间 Ω_2 可表示为:

$$\Omega_2=\{(1,1),\ (1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)(3,2)(3,3)\}.$$

(3) 第(3)种取法不要顺序，比如一次取到 1, 2 号球就算是一种取法，故共有 $C_3^2=3$ 个样本点，样本空间 Ω_3 为:

$$\Omega_3=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}.$$

2. 设 A, B, C 是三事件，试将下列事件用 A, B, C 的运算表示出来.

(1) 仅 A 发生; (2) A,B 发生，但 C 不发生; (3) 三事件不都发生; (4) 三事件至少一个发生; (5) 三事件至多一个发生; (6) 三事件都不发生; (7) 三事件不多于一个发生; (8) 三事件恰有一个发生; (9) 三事件恰有二个发生; (10) 三事件至少两个发生．

解 (1) $A\bar{B}\bar{C}$; (2) $AB\bar{C}$; (3) $\overline{ABC}$或$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$; (4) $A\cup B\cup C$; (5) $\bar{A}\bar{B}\cup\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{C}$; (6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$; (7) $\overline{AB\cup AC\cup BC}$; (8) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$; (9) $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$; (10) $AB\cup AC\cup BC$.

注 复合事件常用“至少”、“至多”、“恰有”之类的术语来描述，初学者应弄清楚这些概念的含义．一个事件可用它本身的含义或其对立事件的否定来表示，比如其中第(4)小题亦可写成$\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$. 另外，如有可能，尽量用彼此不交的事件之并集来表示某事件，这会给概率计算带来方便．比如其中第(10)小题亦可表示为 $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$，这样的四个积事件彼此不交.

3. 设 A, B 是两事件，那么事件“A, B 都发生”,“A, B 不都发生”,“A, B 都不发生”中，哪两个是对立事件?

解 上述三事件可表示为 $AB,\overline{AB},\bar{A}\bar{B}$;由 De Morgen 律，知 $\bar{A}\bar{B}=\overline{A\cup B}\neq\overline{AB}$;显然 AB 与$\overline{AB}$是对立事件．

4. 比较下列概率的大小.

$P(B)$; $P(A\cup B)$; $P(AB)$; $P(A)+P(B)$; 其中 $P(A)>0$, $P(B)>0$.

解 由于 $AB\subset B\subset A\cup B$，且 $AB\neq\Phi$ 时,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant P(A)+P(B),$$

故上述概率的大小关系为

$$P(AB)\leqslant P(B)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B).$$

5. 已知事件 A，B 满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.

解　由于 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)=P(AB),$$

从而得

$$1=P(A)+P(B),$$

故

$$P(B)=1-P(A)=1-p.$$

（二）等可能概型

等可能概型可分为两类：古典概型与几何概型．对于古典概型的计算，基本工具是排列组合. 计算时，首先应分析题目是否要求有顺序，若有，还应进一步分析是属于放回或不放回抽样；若不要求有顺序，则一般可采用超几何分布的思路解决．有时，还应考虑对立事件或应用概率的性质．对于几何概型，首先应作出图形，常可用积分知识来解题．

例 1　袋中有 7 只红球，5 只白球，不放回地陆续取出 3 球，求：

(1) 顺序为红、白、红的概率；

(2) 有 2 只红球的概率．

解　(1) 样本空间点数为 12 个球中取出 3 个的排列为 P_{12}^3，以 A 表示所求事件；若要 A 发生，应有 $7\times5\times6$ 种选择，故

$$P(A)=\frac{7\times5\times6}{12\times11\times10}=0.1591.$$

(2) 不放回地抽 3 次、每次一球，在不要求顺序的条件下，与一次性取出 3 球等价，故可用超几何分布公式求解，所求概率为

$$p_2=\frac{C_7^2\cdot C_5^1}{C_{12}^3}=\frac{21}{44}=0.4773.$$

例 2　某市的电话号码是一个8位数，设 0～9 这 10 个数字在每位数中出现是等可能的．求以下概率：

(1) 8 位数全不同的概率；

(2) 至少有两个数字相同的概率；

(3) 恰好有两个位置上号码相同而其它位置上号码各自不同的概率．

解　可把这个问题看成如下模型：袋中装有 0～9 号共 10 个小球，有放回地取 8 次，每次一球作排列，样本点总数为 10^8. 于是

(1) 8 位数全不同的概率为　$p_1=\dfrac{P_{10}^8}{10^8}=0.0181.$

(2) 至少有两个数字相同的概率与 8 位数全不同的概率互为对立事件，故概率为

$$p_2=1-p_1=0.9819.$$

(3) 设 $A=$“恰好两个位置上号码相同”，意味着其它位置上没有相同号. 可以这样安排：取两个位置(C_8^2)，取一个数(C_{10}^1)，放在这个两个位置上，其余 6 个位置由 9 个剩

下的数字作全排列，即

$$P(A)=\frac{C_8^2\cdot C_{10}^1\cdot P_9^6}{10^8}=0.1693.$$

例 3 把10本书任意放在书架上，求指定的一套三卷本书按次序放在一起的概率．

解 样本点总数显然为10本书的全排列 10!；设 A 为所求事件，要 A 发生，可以把所指定的一套三卷本书按次序放在一起，从左到右或从右到左为 1,2,3 卷共 2 种选择，然后把这一套书看成是一个整体，与其余 7 本作全排列，故有

$$P(A)=\frac{2\times 8!}{10!}=\frac{1}{45}.$$

例 4 从1～2000中随机地取一整数，问取到的数不能被 5 或 6 整除的概率是多少？

解 设 A，B，C 分别表示所取数"能被 5 整除"，"能被 6 整除"，以及"不能被 5 或 6 整除"，则有 $C=\overline{A\cup B}$．于是，

$$P(C)=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB). \tag{1-1}$$

其中，由于$\frac{2000}{5}=400$，

故 $$P(A)=\frac{400}{2000}=0.2;$$

又 $333<\frac{2000}{6}<334$，即 1～2000 中有 333 个数能被 6 整除，故

$$P(B)=\frac{333}{2000}=0.1665;$$

而一个数能同时被 5 和 6 整除，就相当于能被其最小公倍数 30 整除，而$66<\frac{2000}{30}<67$，即 1～2000 中有 66 个数能被 6 和 5 整除．从而

$$P(AB)=\frac{66}{2000}=0.033,$$

代入(1－1)式，得

$$P(C)=1-0.2-0.1665+0.033=0.6665.$$

注 做题时应注意对立事件及加法公式的应用，把 $P(A\cup B)$ 转化为 $P(A)+P(B)-P(AB)$是一种常用的办法．

例 5 某旅行社100 人中有 42人会讲英语，38 人会讲日语，29 人会讲日语与英语，9 人会讲英语、日语、法语，且每人至少会讲英、日、法三种语言中的一种，今在旅行社中任指一人．求：

(1) 此人会讲英语和日语，但不会讲法语的概率；

(2) 此人只会讲法语的概率．

解 以 A，B，C 分别表示事件"此人会讲英语"，"此人会讲日语"，"此人会讲法语"，则由题设，知 $P(A)=\frac{42}{100}$ ，$P(B)=\frac{38}{100}$ ，$P(AB)=\frac{29}{100}$ ，$P(ABC)=\frac{9}{100}$，且 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=0$.

(1) $P(AB\overline{C})=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)=0.29-0.09=0.2$ ；

(2) $P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(\overline{A}\,\overline{B}-\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A}\,\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$

$$=P(\overline{A\cup B})-0=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$
$$=1-0.42-0.35+0.29=0.52.$$

例 6　口袋里有两个五角、三个贰角、五个壹角的硬币共 10 枚，从中任取 5 枚，求总值超过壹元的概率．

解　显然，样本点总数为 C_{10}^5. 设 A 为所求事件，要 A 发生，可以有以下两种情况：

(1) 取两个伍角币，其余三个任取，其样本点数为

$$C_2^2C_3^3+C_2^2C_3^2C_5^1+C_2^2C_3^1C_5^2+C_2^2C_5^3=56;$$

(2) 取一个伍角币，贰角币至少要两个，其样本点数为

$$C_2^1\cdot C_3^3\cdot C_5^1+C_2^1\cdot C_3^2\cdot C_5^2=70,$$

从而
$$P(A)=\frac{56+70}{C_{10}^5}=\frac{1}{2}.$$

例 7　从6双不同的鞋子中任取 4 只，问其中至少有一双配对的概率是多少？

解　设 A =“至少有一双配对”，则 $\overline{A}$ =“4 只全不配对”．为此，可用以下两种解法：

解法一：不考虑顺序，利用组合数求解．样本点总数为 C_{12}^4，要 $\overline{A}$ 发生，可以先从 6 双中取出 4 双，再从每双中取出一只，故所求概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_6^4\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1}{C_{12}^4}=\frac{17}{33}.$$

解法二：可以设想 4 只鞋子是一只一只地取出，要求有顺序，即 12 个元素每次取一个做不放回抽样的排列，样本点总数为 P_{12}^4．要 $\overline{A}$ 发生，可以先从 12 只鞋子中取出一只，再从 10 只中选一只，再从 8 只中选出一只，最后再从 6 只中选一只．故所求概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{12\times10\times8\times6}{12\times11\times10\times9}=\frac{17}{33}.$$

注　本题的两种解法来自于对样本空间的不同理解．计算事件中所含样本点数必须在确定的样本空间中进行，否则容易发生错误．

例 8　在(0,1)区间内任取两个随机数 x,y，求 y 与 x^2 之积小于$\frac{1}{3}$的概率．

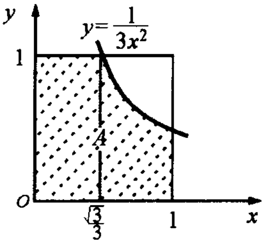

图 1.1

解　这是几何概率题．可以把这两个数理解为二元数组 (x,y)在平面上的位置，则样本空间

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\},$$

记 $A=\{(x,y)\in\Omega\mid x^2y<\frac{1}{3}\}$，则 A 如图 1.1 中阴影部分所示，故所求概率为

$$p=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times1+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1\frac{dx}{3x^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{x})\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}=0.8214.$$

例 9　甲、乙两人约定上午 8:00～9:00 之间在某公交站乘公共汽车，设他们各自独立地在这段时间内任何时刻到达，且这段时间内共有四趟班车，分别于 8:15，8:30，8:45，9:00到达．若甲、乙两人约定：(1) 见车就乘；(2) 最多等一班车．求两人同乘一辆车的概率．

解　公共汽车的到达时刻把区间[8,9]四等分. 若设 x,y 分别表示甲、乙两人的到达时刻，并记上午 8:00 时为零点，则样本空间也是矩形 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，于是可将该矩形划分为如图 1.2 中的 16 个小方格.

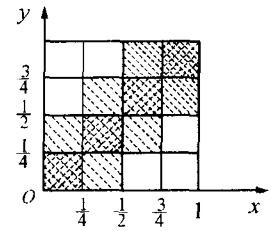

图 1.2

(1) 见车就乘. 这时仅当(x,y) 落入双重阴影部分时，甲、乙两人能同乘一辆车，这时

$$p_1=\frac{4\text{ 个小方格的面积}}{16\text{ 个小方格的面积}}=\frac{1}{4};$$

(2)最多等一辆车. 这时当(x,y) 落入整个阴影部分(包括双重阴影部分) 时，甲、乙两人能同乘一辆车，这时

$$p_2=\frac{10\text{ 个小方格的面积}}{16\text{ 个小方格的面积}}=\frac{5}{8}.$$

例 10　(蒲丰的火柴棒问题)

在平面上画出许多等距离为 a 的平行线，朝平面上任意掷一根长度为 l 的火柴棍 $(0<l\leqslant a)$,求该火柴棍与某一平行线相交的概率 p.

解　令 M 表示火柴棍的中点，x 表示平面上 M 点到最近一条平行线的距离，φ 表示小棍与最近一条平行线的夹角(如图 1.3).

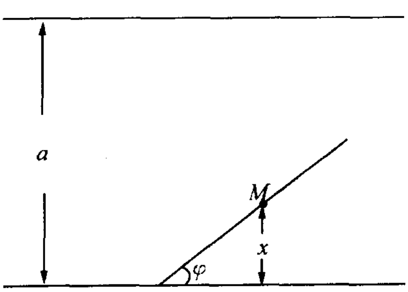

图 1.3

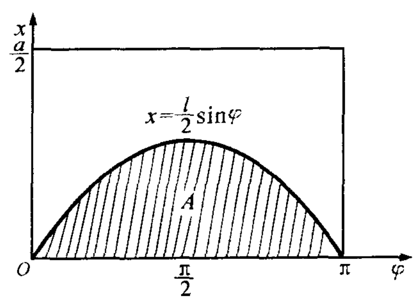

图 1.4

易知,有 $0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}$,$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$,若记 $\Omega=\{(x,\varphi)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$，则 Ω 表示平面上坐标系中一个矩形(如图 1.4)，仅当 $2x\leqslant l\sin\varphi$ 时，小棍能与平行线相交. 若设

$$A=\{(x,\varphi)\in\Omega\mid 2x\leqslant l\sin\varphi\},$$

则所求概率为

$$P(A)=\frac{\int_0^\pi\frac{l}{2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\frac{a\pi}{2}}=\frac{2l}{\pi a}.$$

特别地，当 $l=a$ 时,$P(A)=\frac{2}{\pi}$.

注　这是历史上著名的数学问题，可用之估计 π 的值. 18 世纪意大利数学家 Lazzerini 进行过一次试验，他掷了 3407 根火柴，发现有 2169 根与平行线相交，于是，