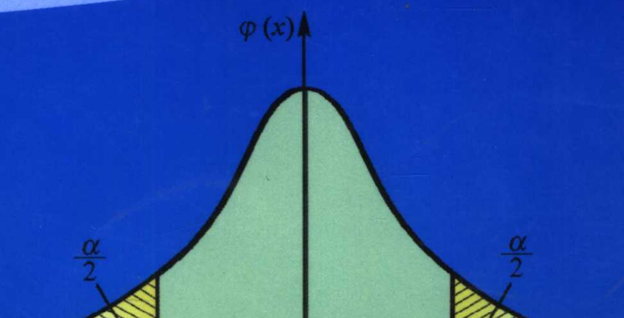
高等院校数学基础课教材

概率论与数理统计

梁飞豹 徐荣聪 刘文丽 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等院校数学基础课教材

概率论与数理统计

梁飞豹　徐荣聪　刘文丽　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/梁飞豹,徐荣聪,刘文丽编著.—北京:北京大学出版社,2005.8

ISBN 7-301-09447-7

Ⅰ.概… Ⅱ.①梁… ②徐… ③刘… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 085964 号

书　　　名:概率论与数理统计

著作责任者:梁飞豹　徐荣聪　刘文丽　编著

责 任 编 辑:刘　勇　曾琬婷

标 准 书 号:ISBN 7-301-09447-7/O·0660

出 版 发 行:北京大学出版社

地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871

网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn

电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021

印　刷　者:北京飞达印刷有限责任公司

经　销　者:新华书店

890 mm×1240 mm　A5　8.5 印张　250 千字

2005 年 8 月第 1 版　2005 年 8 月第 1 次印刷

印　　　数:0001—8000 册

定　　　价:16.00 元

内 容 简 介

本书是高等院校理工科大学生“概率论与数理统计”课程的教材.全书共分八章,内容包括:随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理初步、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验等.各章配有较丰富的习题,并配有一套模拟题.书末附有习题的答案或提示,较难的习题给出解答,供教师和学生参考.

本书按照教育部制定的教学大纲编写,力求简明扼要,便于教学与自学.本书突出体现了作者在教学第一线积累的丰富教学经验,注重对概率统计思想方法与思维模式的讲授,强调对学生基础知识的理解、能力的培养以及概率统计方法在各个领域中的应用.

本书可作为高等院校非数学专业的理工、经济、管理等专业的大学生“概率论与数理统计”课程的教材或教学参考书,也可作为科技工作者、报考研究生人员的参考书.

前　言

本书是在郭福星教授编著的《概率论与数理统计》(福建科学技术出版社)教材的基础上,结合我们近年来在福州大学的教学实践,并参照全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学(一)和数学(三)对概率论和数理统计部分的基本要求编写的,可作为高等学校非数学专业理工、经济、管理等专业的概率论与数理统计课程的教材,也可作为报考硕士研究生人员和实际工作者的参考书.

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科,它是现代数学的一个重要分支.随着计算机的发展以及各种统计软件的开发,概率统计在各领域都得到了广泛的应用,正因为如此,概率统计课程成为高等院校各专业最重要的数学必修课之一.但由于这门课程自身的特点,初学者往往对一些重要的概念及思想感到疑惑不解,为此,我们在教材的编写过程中,力求体现以下几个方面:

(1) 简明扼要.注重概念和理论的直观解释,尽量避免纯数学化的论证,但又保持了内容的完整性和严谨性,对基本的概念、定理和公式给出严格、准确、规范的叙述.

(2) 注重概率统计方法及在各个领域的应用.侧重对概率统计方法的介绍,培养学生对基本概念的准确理解及对常用方法的熟练掌握.精选大量概率统计在各个领域中的典型应用案例作为例题和习题,以帮助学生正确理解和应用这些方法.

(3) 紧扣全国硕士研究生入学数学(一)和数学(三)的考试大纲.各章末所配的模拟题是近年来硕士研究生入学考试的典型题型及本课程的考试题型.

（4）本书习题及模拟题都有参考答案，除了一些基本题外，对较难的习题我们还给出解题思路或提示，便于教学与自学.

讲授本教材的全部内容（除少数带 * 号外）大约需要 54 学时，如果只讲授概率论部分（前 5 章），则只需 36 学时.

本书在编写过程中，得到福州大学数学与计算机科学学院领导的大力帮助，在文字编辑、图表制作、习题选编、文稿审校等方面，郑美莺、吕书龙、游华、朱玉灿、林志兴、黄利文等教师做了大量工作. 北京大学出版社为本书出版给予了大力支持，特别是理科部刘勇主任及曾琬婷编辑在编校中付出了辛勤的劳动，并提出了许多宝贵的意见，对此，我们一并表示衷心的感谢！

由于编者的水平所限，书中不当乃至错误之处在所难免，恳请同行和广大读者批评指正.

编　者

2005 年 7 月于福州大学

目　　录

第一章　随机事件及其概率 …………………………………… (1)

§1.1　样本空间与随机事件 …………………………………… (1)

一、随机试验 …………………………………… (1)

二、样本空间 …………………………………… (2)

三、随机事件 …………………………………… (3)

四、事件间的关系与运算 …………………………………… (4)

§1.2　概率的直观定义 …………………………………… (7)

一、统计概率 …………………………………… (8)

二、古典概率 …………………………………… (9)

三、几何概率 …………………………………… (12)

§1.3　概率的公理化定义 …………………………………… (13)

一、概率的公理化定义 …………………………………… (13)

二、概率的性质 …………………………………… (14)

§1.4　条件概率与乘法公式 …………………………………… (16)

一、条件概率 …………………………………… (16)

二、乘法公式 …………………………………… (18)

三、全概率公式 …………………………………… (19)

四、贝叶斯公式 …………………………………… (21)

§1.5　事件的独立性 …………………………………… (22)

一、事件的独立性 …………………………………… (22)

二、伯努利概型 …………………………………… (26)

习题一 …………………………………… (28)

模拟题一 …………………………………… (31)

第二章　随机变量及其分布 …………………………………… (33)

§2.1　随机变量与分布函数 …………………………………… (33)

一、随机变量 …………………………………………………… (33)
二、分布函数 …………………………………………………… (35)
§ 2.2 离散型随机变量及其分布……………………………… (37)
一、概率分布 …………………………………………………… (37)
二、几种常见的离散型随机变量的分布…………………… (40)
§ 2.3 连续型随机变量及其分布……………………………… (47)
一、概率密度 …………………………………………………… (48)
二、几种常见的连续型随机变量的分布…………………… (51)
§ 2.4 随机变量函数的分布………………………………… (60)
一、离散型随机变量函数的分布 ………………………… (61)
二、连续型随机变量函数的分布 ………………………… (62)
习题二 ……………………………………………………………… (68)
模拟题二 …………………………………………………………… (71)
第三章 多维随机变量及其分布 ………………………………… (74)
§ 3.1 二维随机变量及其分布………………………………… (74)
一、二维随机变量 …………………………………………… (74)
二、联合分布函数 …………………………………………… (75)
三、二维离散型随机变量…………………………………… (77)
四、二维连续型随机变量…………………………………… (79)
§ 3.2 边缘分布与独立性……………………………………… (84)
一、边缘分布 ………………………………………………… (84)
二、随机变量的独立性……………………………………… (89)
§ 3.3 二维随机变量函数的分布……………………………… (93)
一、二维离散型随机变量函数的分布 …………………… (93)
二、二维连续型随机变量函数的分布 …………………… (95)
§ 3.4 二维随机变量的条件分布 ……………………………… (100)
一、二维离散型随机变量的条件分布 …………………… (100)
二、二维连续型随机变量的条件分布 …………………… (102)
习题三……………………………………………………………… (105)
模拟题三…………………………………………………………… (108)

第四章 随机变量的数字特征 …………………………… (111)
§4.1 数学期望 …………………………………………… (111)
一、离散型随机变量的数学期望 ……………………… (111)
二、连续型随机变量的数学期望 ……………………… (114)
三、随机变量函数的数学期望 ………………………… (115)
四、数学期望的性质 …………………………………… (118)
§4.2 方差 …………………………………………………… (120)
一、方差的定义 ………………………………………… (120)
二、方差的性质 ………………………………………… (123)
三、几种常见分布的数学期望与方差 ………………… (127)
§4.3 协方差与相关系数 ………………………………… (129)
一、协方差 ……………………………………………… (129)
二、相关系数 …………………………………………… (130)
习题四 ……………………………………………………… (137)
模拟题四 …………………………………………………… (139)
第五章 极限定理初步 ………………………………… (142)
§5.1 大数定律 …………………………………………… (142)
一、伯努利大数定律 …………………………………… (142)
二、辛钦大数定律 ……………………………………… (143)
§5.2 中心极限定理 ……………………………………… (145)
一、独立同分布中心极限定理 ………………………… (145)
二、二项分布中心极限定理 …………………………… (147)
习题五 ……………………………………………………… (151)
模拟题五 …………………………………………………… (152)
第六章 数理统计的基本概念 ………………………… (155)
§6.1 总体与样本 ………………………………………… (155)
§6.2 统计量与抽样分布 ………………………………… (157)
一、统计量 ……………………………………………… (157)
二、抽样分布 …………………………………………… (160)
三、正态总体的抽样分布 ……………………………… (166)

习题六………………………………………………………… (168)
模拟题六……………………………………………………… (169)
第七章　参数估计…………………………………………… (171)
§7.1　点估计 ……………………………………………… (171)
一、矩法 …………………………………………………… (171)
二、极大似然估计法 ……………………………………… (174)
§7.2　估计量的评价标准 ………………………………… (179)
一、无偏性 ………………………………………………… (180)
二、有效性 ………………………………………………… (181)
三、一致性 ………………………………………………… (182)
§7.3　区间估计 …………………………………………… (183)
§7.4　正态总体均值与方差的区间估计 ………………… (185)
一、单个总体的情形 ……………………………………… (185)
二、双总体的情形 ………………………………………… (190)
*§7.5　单侧置信区间 ……………………………………… (195)
习题七………………………………………………………… (196)
模拟题七……………………………………………………… (201)
第八章　假设检验…………………………………………… (204)
§8.1　假设检验的基本概念 ……………………………… (204)
一、问题的提出…………………………………………… (204)
二、假设检验的基本原理 ………………………………… (205)
三、假设检验的两类错误 ………………………………… (207)
四、假设检验的一般步骤 ………………………………… (209)
§8.2　单个正态总体参数的假设检验 …………………… (209)
一、单个正态总体均值的假设检验……………………… (209)
二、单个正态总体方差的假设检验……………………… (212)
§8.3　两个正态总体参数的假设检验 …………………… (215)
一、两个正态总体均值的假设检验……………………… (215)
二、两个正态总体方差的假设检验……………………… (218)
*§8.4　分布拟合检验 ……………………………………… (221)

习题八……………………………………………………… (224)
模拟题八…………………………………………………… (225)
附录Ⅰ 常见分布参数、估计量及数字特征一览表 ………… (228)
附录Ⅱ 常用分布表 ……………………………………… (229)
习题答案与提示…………………………………………… (237)
参考书目………………………………………………… (260)

第一章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科. 什么是概率?说来也不陌生,通常我们说话带的某些词如也许、大概、可能等就具有概率意义. 为给概率及概率论下一个严格的定义,我们必须首先了解自然界的现象分类.

在自然界及各种社会活动中观察到的各种现象大体上可归结为三种类型. 第一种类型是确定性现象,我们把事前可以预知结果的,在某些确定的条件满足时,某一确定的结果必然会发生的现象称为确定性现象. 例如:在一个标准大气压下,水加热到 100 ℃时一定沸腾;上抛物体必定落回地面等. 这种现象由确定性数学来研究. 第二种类型是模糊现象,我们把客观事物的差异在中介过渡时所呈现的"亦此亦彼"性,称为模糊现象,例如:高与低、美与丑等,这种现象由模糊数学来研究. 第三种类型是我们将要研究的随机现象,我们把事前能够预知所有可能结果,但在每次试验时不能确定哪一种结果将要出现的现象称为**偶然现象**或**随机现象**. 例如:抛掷一枚质地均匀的硬币,硬币落地后可能是正面(国徽一面)朝上,也可能是反面朝上;新生婴儿可能是男的,也可能是女的;同一射手向同一目标发射子弹,弹着点可能落在目标上,也可能不落在目标上;从一批产品中任取一件产品,此产品可能为合格品,也可能为不合格品;等等.

§1.1　样本空间与随机事件

一、随机试验

为了研究随机现象内部隐藏的统计规律性,必须对随机现象进行大量的观测或试验,这种观测或试验统称为**随机试验**,简称为**试验**,记为 E 或 E_1,E_2 等.

例 1.1.1　掷一颗正六面体的骰子，观察出现的点数.

例 1.1.2　从水泥自动生产流水线上任意抽取一袋水泥，称其质量.

例 1.1.3　一射手打靶，直到击中靶心为止，记录其射击次数.

以上三个例子都是随机试验，它们具有如下特点：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行.

(2) 每一次试验，可能出现各种不同的结果，总共有可能出现哪几种结果，是可以事先明确知道的.

(3) 每一次试验，实际只出现一种结果，至于实际出现哪一种结果，试验之前是无法预先知道的.

以上三个特点是随机试验所具有的共同特点. 我们就是通过大量的随机试验去研究随机现象的.

例 1.1.4　将一枚质地均匀的硬币连掷两次，观察出现正、反面的情况. 这里把硬币连掷两次作为一次试验，这是一个随机试验，记为 E_1. 若用记号 $\omega_{正}$ 表示出现正面，$\omega_{反}$ 表示出现反面，则 E_1 共有四种可能的结果：

$$(\omega_{正},\omega_{正}),\quad (\omega_{正},\omega_{反}),\quad (\omega_{反},\omega_{正}),\quad (\omega_{反},\omega_{反}).$$

二、样本空间

在研究随机试验 E 时，首先必须弄清楚这个试验可能出现的所有结果，称每一个可能的结果为**样本点**，一般用小写字母 ω 表示，全体样本点构成的集合称为**样本空间**，一般用大写字母 Ω 表示.

在例 1.1.1 中，样本点简记为

$$\omega_i=\{出现\ i\ 点\},\quad i=1,2,\cdots,6,$$

则样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$.

在例 1.1.2 中，若用 x 表示“一袋水泥的质量”，则 x 的取值围绕一个值变化. 若每袋水泥定额为 50 kg，自动流水生产线上最大偏差为 1 kg，则 x 取值范围为$[49,51]$，即样本点有无限多个，它充满了区间$[49,51]$，故样本空间

$$\Omega=\{x\,|\,49\leqslant x\leqslant 51\}.$$

在例 1.1.3 中，若用 n 表示“击中目标所需的射击次数”，则 n 取

正整数 1,2,…,若将这些样本点记为 ω_n=直到第 $n(n=1,2,\cdots)$次才击中目标,则样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

在例 1.1.4 中,用 E_1 表示连续两次投掷一枚质地均匀的硬币,$\omega_{正}$ 表示出现正面,$\omega_{反}$ 表示出现反面,则随机试验 E_1 的样本空间为

$$\Omega=\{(\omega_{正},\omega_{正}),(\omega_{正},\omega_{反}),(\omega_{反},\omega_{正}),(\omega_{反},\omega_{反})\}.$$

从上面的例子可以看出,随机试验样本点的总数可以是有限多个,也可以是无限多个.

三、随机事件

在随机试验 E 中,可能发生也可能不发生的事情称为**随机事件**[①],简称**事件**,一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示随机事件.

每次试验中,一定发生的事情称为**必然事件**,记为 Ω,每次试验中一定不发生的事情称为**不可能事件**,记为$\varnothing$,这两个事情是确定性事件,不是随机事件,但为了方便起见,通常把 Ω 和$\varnothing$都作为随机事件来看待.

对于一个随机试验,它的每一个可能出现的结果(样本点)都是一个事件,这种简单的随机事件称为**基本事件**,基本事件也可以看作是试验中不能再分解的事件.由若干个基本事件组成的事件称为**复合事件**(或可再分事件),不管是基本事件或是复合事件都是随机事件.

按集合论的观点,对于某一随机试验 E,样本空间 Ω 是一集合,随机事件 A 可看作集合 Ω 的一个子集,即 $A\subset\Omega$,所有随机事件全体称为**事件集**,记为 $\mathscr{L}$.即 $\mathscr{L}=\{A\mid A\subset\Omega\}$.显然 Ω(必然事件)$\in\mathscr{L}$,$\varnothing$(不可能事件)$\in\mathscr{L}$.

在例 1.1.1 中,掷一颗骰子"出现 5 点"是一个随机事件,记为 $A=\{\omega_5\}$,它是一个基本事件.掷一颗骰子"出现偶数点"也是一个随机事件,记为 $B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$,它是一个复合事件.掷一颗骰子"出现的

① 随机事件也可定义为:在随机试验 E 的样本空间 Ω 中,由部分样本点组成的集合称为**随机事件**,简称**事件**.在每次试验中,当且仅当这一子集中有一个样本点出现时,称这一事件发生.

点数小于 7 点”，它是一个必然事件，记为 Ω. 掷一颗骰子“出现的点数大于 8 点”，它是一个不可能事件，记为 $\varnothing$.

四、事件间的关系与运算

事件是样本空间的子集，所以事件间的关系与运算同集合间的关系与运算完全一致.

1. 事件的包含

若事件 A 发生时，必导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记为 $A\subset B$，或 $B\supset A$. 即 A 中的每一样本点都包含在 B 中，如图 1-1 所示.

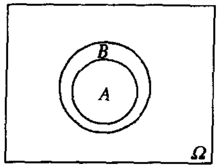


图 1-1 $A\subset B$

在例 1.1.1 中，掷一颗骰子出现 1 点或 5 点构成的事件 $A=\{\omega_1,\omega_5\}$，掷一颗骰子出现奇数点构成的事件 $B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$，则事件 B 包含事件 A，即 $A\subset B$.

2. 事件的相等

若事件 A 包含事件 B 且事件 B 包含事件 A，则称事件 A 与事件 B **相等**或**等价**，记为 $A=B$.

3. 事件的积

事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为事件 A 与 B 的**积（交）事件**，记为 $A\cap B$ 或 AB. 即由事件 A 与 B 的公共样本点组成的集合，如图 1-2 所示.

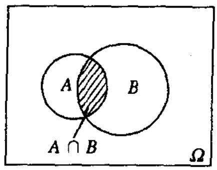


图 1-2 $A\cap B$

在例 1.1.2 中，A 表示抽取一袋水泥的质量不少于 49 kg，即 $A=\{x\mid x\geqslant 49\}$，$B$ 表示抽取一袋水泥的质量不多于 50 kg，即 $B=\{x\mid x\leqslant 50\}$，则 AB 表示抽取一袋水泥的质量为 49 kg 到 50 kg 之间，即 $AB=\{x\mid 49\leqslant x\leqslant 50\}$.

类似地，任意有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积（交）事件记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$，$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 则表示可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生.

显然对任一事件 A 均有下面性质：

(1) $\Omega A=A$; (2) $AA=A$;

(3) $\varnothing A=\varnothing$; (4) 若 $B\supset A$,则 $AB=A$.

4. 事件的互不相容(互斥)

若事件 A 与 B 不能同时发生.则称事件 A 与 B 为**互不相容(互斥)事件**.即所有包含在 A 中的样本点与包含在 B 中的样本点全不相同,或 $AB=\varnothing$(见图 1-3).

在例 1.1.1 中,掷一颗骰子出现 1 点和 5 点构成的事件 A 与出现偶数点构成的事件 C 是互不相容的,即 $A\cap C=\varnothing$.

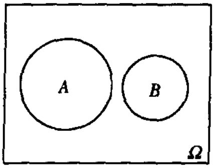


图 1-3 A 与 B 互斥

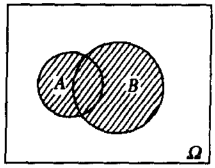


图 1-4 $A\cup B$

5. 事件的并

事件 A 与 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的**和(并)事件**,记为 $A\cup B$.即由 A 与 B 中所有样本点组成的集合(见图 1-4).

类似地,任意有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之中,至少有一个发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和(并)事件,记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,而记号 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示任意可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$之中至少有一个发生的事件.

特别地,若事件 A 与 B 互不相容(即 $AB=\varnothing$),则 A 与 B 的和事件常记为 $A+B$.

显然,对任一事件 A 均有下面性质:

(1) $A\cup A=A$; (2) $\Omega\cup A=\Omega$;

(3) $\varnothing\cup A=A$; (4) 若 $B\supset A$,则有 $A\cup B=B$.

6. 事件的对立

事件 A 不发生的事件称为事件 A 的**对立事件**(或**逆事件**),记为 $\overline{A}$.即样本空间 Ω 中所有不包含在 A 中的样本点全体组成的集合

(见图 1-5). 显然 $A\cup\overline{A}=\Omega, A\cap\overline{A}=\varnothing$.

在例 1.1.1 中，掷一颗骰子出现奇数点构成的事件 B 和出现能被 2 整除的点构成的事件 D 是互为对立事件，即有 $\overline{B}=D$ 及 $\overline{D}=B$ 且 $B\cup D=\Omega, B\cap D=\varnothing$.

由定义可知：对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件.

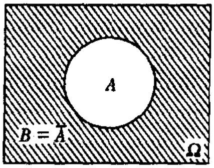


图 1-5　$B=\overline{A}$

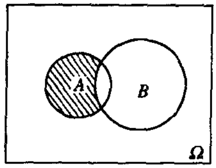


图 1-6　$A-B$

7. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$. 即所有包含在 A 中而不包含在 B 中的样本点全体组成的集合，如图 1-6 阴影部分所示.

在例 1.1.1 中，掷一颗骰子出现不超过 5 点的事件 $F=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$ 与出现偶数点构成的事件 $B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$ 的差为 $F-B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$.

在进行事件运算时，一般是先进行逆的运算，再进行交的运算，最后再进行并或差的运算.

事件运算的性质：

(1) **交换律**：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) **结合律**：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) **分配律**：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) **对偶原则**：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这个原则可推广到任意有限个或可列个事件的情况，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$