



21st CENTURY

规划教材

面向21世纪高职高专经济管理系列规划教材

COURSES FOR VOCATIONAL HIGHER EDUCATION: ECONOMICS AND MANAGEMENT

经济数学基础与应用

ECONOMICS MATHEMATICS: FUNDAMENTALS AND APPLICATIONS

胡国胜 编 著



科学出版社

www.sciencep.com



面向21世纪高职高专经济管理系列规划教材
COURSES FOR VOCATIONAL HIGHER EDUCATION: ECONOMICS AND MANAGEMENT

经济数学基础与应用

胡国胜 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书共分7章,主要讲述微积分的基础知识及其在经济活动中的基本应用.主要内容包括函数、极限、一元函数微分、一元函数积分和二元函数微分等基础知识及其在经济、管理和金融等领域经常用到的数学模型,为学生今后将数学应用到经济活动中提供了很好的思路和解决问题的方法.

本书可供经济、管理、财会和金融等专业的高职高专或大专类学生学习使用.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础与应用/胡国胜编著. —北京:科学出版社,2004

(面向21世纪高职高专经济管理系列规划教材)

ISBN 7-03-014337-X

I. 经… II. 胡… III. 经济数学-高等学校:技术学校-教材 IV. F224

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第092733号

责任编辑:舒立 陈砾川/责任校对:柏连海

责任印制:吕春珉/封面设计:东方人华平面设计部

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年10月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2004年10月第一次印刷 印张:13

印数:1—4 000 字数:240 000

定价:17.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换<双青>)

面向 21 世纪高职高专规划教材专家委员会

主 任 李宗尧

副主任 (按姓氏笔画排序)

丁桂芝 叶小明 张和平 林 鹏

黄 藤 谢培苏

委 员 (略)

经济管理系列教材编委会

主 任 谢培苏

副主任 (按姓氏笔画排序)

刘文华 张举刚 李鼎新 胡国胜 赵居礼

委 员 (按姓氏笔画排序)

丁金平	于 强	马桂兰	丑幸荣	方树栋
毋庆刚	王长琦	王正洪	王达政	包惠群
卢 锐	田家富	刘玉玲	刘 华	刘德武
朱祥贤	朱新明	邢春玲	宋绍清	张先云
张 军	张 华	张国健	张 雪	张德实
李 伟	李 英	李新领	杜安杰	杨季夫
杨海清	杨 琼	肖建成	芮福宏	陈方清
周仁贵	周兴荣	周洪保	季 辉	郑克俊
郑 昕	姚虹华	姜宁川	柯正来	胡绍宏
赵 忠	赵喜文	骆群祥	倪 杰	徐忠山
谈留芳	贾益东	郭俊诚	高建宁	黄小彪
曾开红	程玉民	葛 军	韩 伟	韩小虎
韩银峰	愚良晨	窦志铭	潘旭强	潘映高

出版前言

随着世界经济的发展,人们越来越深刻地认识到经济发展需要的人才多元化、多层次的,既需要大批优秀的理论性、研究性的人才,也需要大批应用性人才。然而,我国传统的教育模式主要是培养理论性、研究性的人才。教育界在社会对应用性人才需求的推动下,专门研究了国外应用性人才教育的成功经验,结合国情大力度地改革我国的“高等职业教育”,制定了一系列的方针政策。联合国教科文组织1997年公布的教育分类中将这种教育称之为“高等技术与职业教育”,也就是我们通常所说的“高职高专”教育。

我国经济建设需要大批应用性人才,呼唤高职高专教育的崛起和成熟,寄希望于高职高专教育尽快向国家输送高质量的紧缺人才。近几年,高职高专教育发展迅速。目前,各类高职高专学校已占全国高等院校的近1/2,约有600所之多。教育部针对高职高专教育出台的一系列政策和改革方案主要体现在以下几个方面:

- “就业导向”成为高职高专教育的共识。高职高专院校在办学过程中充分考虑市场需求,用“就业导向”的思想制定招生和培养计划。
- 加快“双师型”教师队伍建设。已建立12个国家高职高专学生和教师的实训基地。
- 对学生实行“双认证”教育。学历文凭和职业资格“双认证”教育是高高职高专教育特色之一。
- 高职高专教育以2年学制为主。从学制入手,加快高职高专教学方向的改革,充分办出高职高专教育特色,尽快完成紧缺人才的培养。
- 开展精品专业和精品教材建设。已建立科学的高职高专教育评估体系和评估专家队伍,指导、敦促不同层次、不同类型的学校办出一流的教育。

在教育部关于“高职高专”教育思想和方针指导下,科学出版社积极参与到高职高专教材的建设中去。在组织教材过程中采取了“请进来,走出去”的工作方法,即由教育界的专家、领导和一线的教师,以及企事业单位从事人力资源工作的人员组成顾问班子,充分分析我国各地区的经济发展、产业结构以及人才需求现状,研究培养国家紧缺人才的关键要素,寻求切实可行的教学方法、手段和途径。

通过研讨认识到,我国幅员辽阔,各地区的产业结构有明显的差异,经济发展也不平衡,各地区对人才的实际需求也有所不同。相应地,对相同专业和相近专业,不同地区的教学单位在培养目标和培养内容上也各有自己的定位。鉴于此,

适应教育现状的教材建设应该具有多层次的设计。

为了使教材的编写能针对受教育者的培养目标,出版社的编辑分不同地区逐所学校拜访校长、系主任和老师,深入到高职高专学校及相关企事业单位,广泛、深入地 and 教学第一线的老师、用人单位交流,掌握了不同地区、不同类型的高职高专院校的师生、学生和教学设施情况,清楚了各学校所设专业的培养目标和办学特点,明确了用人单位的需求条件。各区域编辑对采集的数据进行统计分析,在相互交流的基础上找出各地区、各学校之间的共性和个性,有的放矢地制定选题项目,并进一步向老师、教育管理者征询意见,在获得明确指导性意见后完成“高职高专规划教材”策划及教材的组织工作:

- 第一批“高职高专规划教材”包括三个学科大系:经济管理、信息技术、建筑。
- 第一批“高职高专规划教材”在注意学科建设完整性的同时,十分关注具有区域人才培养特色的教材。
- 第一批“高职高专规划教材”组织过程正值高职高专学制从3年制向2年制转轨,教材编写将其作为考虑因素,要求提示不同学制的讲授内容。
- 第一批“高职高专规划教材”编写强调
 - ◆ 以就业岗位对知识和技能需求下的教材体系的系统性、科学性和实用性。
 - ◆ 教材以实例为先,应用为目的,围绕应用讲理论,取舍适度,不追求理论的完整性。
 - ◆ 提出问题→解决问题→归纳问题的教、学法,培养学生触类旁通的实际工作能力。
 - ◆ 课后作业和练习(或实训)真正具有培养学生实践能力的作用。

在“高职高专规划教材”编委的总体指导下,第一批各科教材基本是由系主任,或从教学一线中遴选的骨干教师执笔撰写。在每本书主编的严格审读及监控下,在各位老师的辛勤编撰下,这套凝聚了所有作者及参与研讨的老师们的经验、智慧和资源,涉及三个大的学科近200种的高职高专教材即将面世。我们希望经过近一年的努力,奉献给读者的这套书是他们渴望已久的适用教材。同时,我们也清醒地认识到,“高职高专”是正在探索中的教育,加之我们的水平和经验有限,教材的选题和编辑出版会存在一些不尽人意的地方,真诚地希望得到老师和学生的批评、建议,以利今后改进,为繁荣我国的高职高专教育不懈努力。

科学出版社

2004年6月1日

前 言

“为什么要学习数学?”, “数学有什么用?”, 这是我从事数学教学过程中学生问得最多的两个问题. 下面我举两个例子来加以说明.

数学是一种工具, 可以创造经济效益. 这里有一道初中二年级数学题: “甲乙两人是好朋友, 一个月里两次同时到一家商店买油, 两次的油价不相同. 他们两人的购买方式不同, 其中甲每次总打一斤油, 而乙每次只拿出一元钱来打油, 而不管能买多少. 问两种打油方式, 哪种更合算?” 这道题道理很简单, 如果从事贸易的公司能灵活应用这个道理, 就不难为公司创造价值.

数学是一门科学, 可以明事理. 在西方, 有“勇士追不上乌龟”的奇谈. 它说的是, 乌龟在勇士前面 100m, 勇士的速度是乌龟的 10 倍. 勇士跑完 100m, 乌龟又爬行了 10m, 勇士跑完 10m, 乌龟又爬行了 1m, 勇士跑完 1m, 乌龟又爬行了 0.1m……照这样的逻辑推下去, 勇士岂不是永远追不上乌龟吗? 这种奇谈错在哪里? 只要学习了微积分的知识, 可以用无穷小来解释.

微积分产生于 17 世纪, 是数学发展历史上最伟大的成就之一. 它的产生与现实中的问题息息相关, 其中四大问题对它的产生和发展推动作用最大. 它们是: 物体在任意时刻的速度和加速度; 与光学中透镜折射有关的曲线切线; 最大值与最小值问题; 曲线的长度、曲线围成的面积和曲面围成的体积. 微积分是为解决实际问题而产生的.

从上面例子, 我们知道数学已经不是“象牙塔上的明珠”, 它已实实在在地走进我们的社会生活、经济生活、文化生活甚至政治生活的方方面面. 毫不夸张地说, 当今社会, 不懂数学的人与不懂计算机的人一样, 都是文明社会的“文盲”.

当然, 这当中有个“度”的问题——数学学到什么程度为止? 很明显, 绝大多数人学习数学的目的在于应用, 特别是应用到经济活动中, 创造更多的效益. 从事数学研究的人毕竟是少数. 有人说过, 世界上的数学家不用超过 100 个. 所以, 数学教育是一件非常艰巨而又不得不做的事情. 就高职高专数学教育而言, 在教给学生必备的数学知识的同时, 更强调让学生学会用数学的思维方式观察周围的事物, 用数学的思维方法分析、解决问题. 当代著名数学家、教育家、Wolf 奖获得者 H. 惠特尼这样说: “学数学意味着什么? 当然是希望能用它……最好的学习就是用, 众所周知仅在自己有想法时才能真正地学习.” 在本书中,

以较多例子说明数学的应用，其基础知识以够用为度。为了能让学生更好地理解数学中的一些难懂的概念和复杂函数（变量）的变化规律，多用图、表来说明这些知识。本书的内容可在 60 学时左右讲授完。

在本书的编写过程中，廖敏慧老师就书中作图提出宝贵的意见，陈治勇老师提供了部分习题，作者还参考了部分文献，从中吸取了大量的营养，挑选了部分例题与习题，在此一并表示感谢。

最后，衷心地希望读者对本书的不足之处给予批评和指正。

目 录

第 1 章 函数	1
1.1 函数的定义	2
1.2 函数的表示	6
1.2.1 建立函数关系	8
1.2.2 函数的四种特征	10
1.3 初等函数	12
1.3.1 基本初等函数	12
1.3.2 复合函数、初等函数	13
1.3.3 反函数	14
1.3.4 函数的其他分类方法	16
1.4 分段函数	16
1.5 常用的经济函数	18
1.5.1 成本函数	18
1.5.2 需求函数	18
1.5.3 供给函数	19
1.5.4 均衡价格	19
1.5.5 收益函数	21
1.5.6 利润函数	23
第 2 章 极限与连续	27
2.1 数列极限	28
2.1.1 作为变量变化趋势的极限概念	28
2.1.2 数列极限的定义	32
2.1.3 数列极限的四则运算	33
2.2 函数的极限	35
2.2.1 函数极限的定义	37
2.2.2 函数极限的四则运算	42
2.3 两个重要极限	45
2.3.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	45

2.3.2	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ (e 是一个常数)	47
2.4	利率、利息、资本和复利	49
2.4.1	利率	49
2.4.2	复利	50
2.4.3	抵押贷款与分期付款	52
2.5	极限、无穷小与逼近	53
2.6	连续函数	55
2.6.1	函数连续的概念	55
2.6.2	闭区间上连续函数的性质	58
第3章	一元函数导数与微分	64
3.1	导数的概念	64
3.1.1	什么是导数	64
3.1.2	导数与连续	70
3.2	导数的计算	72
3.2.1	导数基本公式	72
3.2.2	导数运算法则	74
3.2.3	复合函数求导法则	75
3.2.4	隐函数导数	80
3.2.5	函数 $y = u(x)^{v(x)}$ 的导数	82
3.2.6	相对变化率	83
3.3	高阶导数	83
3.4	微分与近似计算	85
3.4.1	微分的概念	85
3.4.2	微分的运算	90
第4章	导数的应用	94
4.1	Rolle 中值定理和微分中值定理	94
4.2	L'Hopital 求极限法则	97
4.3	函数的单调性与极值	101
4.4	导数在边际成本分析、利润最大化中的应用	114
4.4.1	边际	114
4.4.2	利润最大化	116
第5章	不定积分	120
5.1	原函数与不定积分	120

5.1.1	原函数	120
5.1.2	不定积分的定义	122
5.1.3	不定积分的几何意义	123
5.2	积分表与线性性质	124
5.3	积分换元法	126
5.3.1	第一类换元法	127
5.3.2	第二类换元法	129
5.4	分部积分法	130
5.5	简单的微分方程	133
5.5.1	微分方程的基本概念	133
5.5.2	分离变量法	137
第 6 章	面积与定积分	142
6.1	面积与定积分	142
6.1.1	面积问题	142
6.1.2	定积分	144
6.2	牛顿-莱布尼茨公式	149
6.3	定积分的换元积分法和分部积分法	152
6.3.1	换元积分法	152
6.3.2	分部积分法	153
6.4	积分应用	155
6.4.1	曲线围成的面积	155
6.4.2	积分在经济上的应用	157
6.5	广义积分	159
6.5.1	无限区间上的积分	159
6.5.2	无界函数的积分	161
第 7 章	二元函数微分	166
7.1	二元函数的定义	167
7.2	二元函数的变化率——偏导数	168
7.2.1	二元函数的极限与连续	168
7.2.2	二元函数一阶偏导数	171
7.2.3	二阶偏导数	174
7.3	二元函数的逼近——全微分	175
7.4	二元函数的应用	178
7.4.1	无约束极值	178

7.4.2 有约束极值——拉格朗日乘数方法	184
7.5 最小二乘法	187
7.6 二元微分简单应用	189
附录 本书用到的公式	193
主要参考文献	195

第1章 函 数



学习目的与要求

清楚地理解“函数”概念.

熟练运用函数符号.

知道函数的基本分类.

了解分段函数表示法.

理解函数图形在分析函数中的直观作用.

会将几个简单函数复合成一个函数,也会将复合函数拆成简单函数.

理解就实际问题建立数学模型的一般方法,比如建立函数关系式.

理解具有经济意义的函数:需求函数、供给函数、成本函数、收益函数、利润函数.并且知道用简单的函数表示.

理解需求律和供给律;理解“均衡价格”和“均衡量”的概念.

自然对数的底 $e = 2.718281828\cdots$, 每天 24 小时, 到邮局寄信, 平信 8 角, 挂号信 2 元 8 角, 人民币利率五年期 2.78. 这些都有一个确定的值, 是固定不变的, 叫常量.

现实世界里, 变化无处不在. 在我们看得见的地方, 事物发生变化; 在我们看不见的地方, 事物也在变化. 比如:

- 人类从婴幼儿到老年的发育, 或者地球上的人口每天都在变化;
- 把冷土豆放到热烤箱中温度在变化, 威胁到我们生存的全球在变暖;
- 存在银行账户上的存款在增加, 或者我们的贸易逆差在增长;
- 全中国的人口每天都在变化.

这些取不同值的变化量称为变量.

所有这些变化的现象都可以用数学进行研究, 可以用数学有效地描述和解释自然界中许多现象. 例如, 行星的运动轨道是椭圆, 知道了它们的确切数学关系, 科学家就可以计算人造卫星的轨道, 从而能够到达想去的地方.

一个量变化这一事实本身就意味着这个量是随着其他的量变化而变化的. 例

如,位置、温度或人口,总是依赖于某个(或某些)别的量,比如依赖于时间.因此,人们感兴趣的这些量总是时间(或别的自变量)的函数.有的函数的自变量不是时间,比如,圆的周长 C ,它是用公式 $C=2\pi r$ 表示的半径 r 的函数.

就变量的种类来看,有些量是瞬间变化的.比如,一段时间内打电话的人数,地球上的人口总数等,这些量是离散的(discrete),它们通常可以借助数列(sequence)来描述;还有一些量是连续变化的,例如,放入冰箱的热咖啡的温度,空气的湿度,列车的运行里程,神舟五号从起飞时速度 0 到每秒 200 公里的速度变化等,这些量是连续的(continuous).用公式 $s=(1/2)gt^2$ 表示的自由落体运动规律就是 s 随 t 连续变化的一个例子.

在学习中学数学时已经接触过“函数”.通过研究函数关系——变量对变量的依赖关系——能定量地获取关于“什么时候”、“多少”的信息.在这里,将继续尝试用不同的观点来理解函数的概念.

微积分是以函数关系为研究对象的.函数是利用数学方法处理物理世界的必不可少的工具,所以应牢牢抓住这个概念,深刻理解.同时,应当对函数概念与表达它的记号及图形加以区别.函数概念是“看”不见的,借助图形对直观理解它会有很大帮助.当然,也不能仅仅依靠图形,而忽略对函数概念的深刻把握.

1.1 函数的定义

所谓函数关系,粗略地讲,就是两个(或多个)变量之间的一种关系.对其中一个或几个变量(作为自变量)的了解隐含了对另外一个或几个变量(因变量)的了解.例如知道正方形的边长,就可以计算这个正方形的面积;知道一个圆柱的底面的半径和高,就可以计算这个圆柱的体积和表面积.

函数关系到底是什么呢?

定义 1.1 (函数关系(function relation)) 设 A 和 B 都是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集合.从 A 到 B 的函数(function)关系 f 是这样一种规则:对于 A 中的每一个元素唯一地对应 B 中的一个元素.用记号表示就是: $f: A \rightarrow B$, 其中集合 A 称为函数 f 的定义域(domain), 记为 $A = D_f$; B 的子集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 称为函数的值域(range), 记为 R_f .

也就是说,可以将函数关系看成一种映射(mapping)或一个变换(transformation):函数 f 将 x 映射成(或变换成) y (图 1.1).

如果用 x 代表 A 中的一般元素,而 y 表示 B 中的一般元素,那么函数关系 f

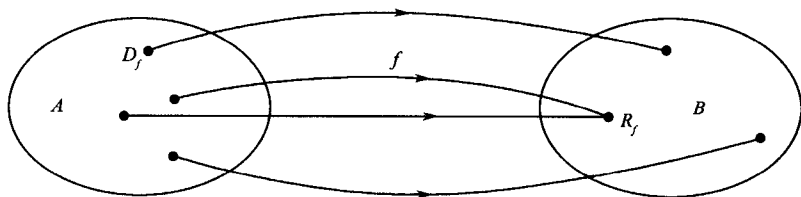


图 1.1 函数有规则的映射

就可以表示得具体一点: $y = f(x)$ (读作: y 是 x 的函数). 如果 $y_0 = f(x_0)$, 那么 B 中的变量 y_0 称为函数 f 在 $x \in D_f$ 处的函数值(value). 通常 x 叫做自变量(independent variable), y 通常称为因变量(dependent variable).

注意: f 指的是函数关系本身, 而 $f(2)$, $f(x)$ 等则表示函数在特定点的取值. 以后在不会引起混淆的情况下, 用“函数 f ”或者“函数 $f(x)$ ”表达这一函数关系, 也可用“函数 $y = f(x)$ ”和“变量 y ”表达同一个意思.

【例 1.1】 表达式

$$f(x) = x^2$$

告诉我们: 函数 f 是这样一种映射关系, 对于给定的 x , f 取值 x^2 . 因此, $f(2) = 2^2 = 4$. 注意, 字母 x 只是一个记号, 可用其他字母代替:

$$f(S) = S^2, f(t) = t^2, f(x) = x^2$$

都表示同一函数.

另外, 如果 $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, 那么

$$g(x+1) = \frac{x+1}{(x+1)^2 + 1} = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}.$$

而

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{(f(x))^2 + 1}.$$

如果 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ($x \neq -1$), 则

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1/x}{1/x + 1} = \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1).$$

【例 1.2】 如果 $f(e^x) = x^2 - 2x + 3$, 求 $f(x)$.

令 $u = e^x$, 则 $x = \ln u$,

$$f(u) = (\ln u)^2 - 2(\ln u) + 3,$$

所以, $f(x) = (\ln x)^2 - 2(\ln x) + 3$ ($x > 0$).

【例 1.3】 求函数

$$y = \frac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$$

的定义域.

解:由

$$\begin{cases} 3-x > 0 \Rightarrow x < 3 \\ |x|-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases}$$

得 $1 < x < 3$ 或 $x < -1$. 所以, 定义域 $D = (-\infty, -1) \cup (1, 3)$ (图 1.2).

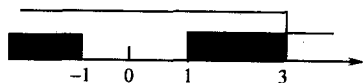


图 1.2 定义域

从定义 1.1 可以看出, 定义域和对应法则是构成函数的两个基本要素. 因此判断两个函数是否相同的两个条件是:

- (1) 定义域是否相同;
- (2) 对应法则(映射)是否相同.

【例 1.4】 判断下列各组中的两个函数是否相同:

- (1) $f(x) = 2 - x$, $g(x) = \frac{4-x^2}{x+2}$;
- (2) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$;
- (3) $f(x) = \ln \sqrt{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{2} \ln(x-1)$.

- 解: (1) 定义域不同, 因而两个函数不相同;
 (2) 定义域相同, 对应法则不同, 因而两个函数不相同;
 (3) 定义域和对应法则均相同, 因而两个函数相同.

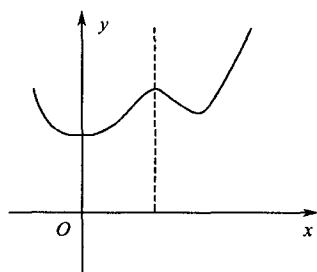
实际问题中, 要结合实际情况考虑变量的定义域. 如到邮局寄信, 信件个数不能是负数和小数, 必须是正整数. 体重与年龄有关, 体重是年龄的函数, 但年龄不能是负数等.

函数的图形(graph)是指 xy 平面上的集合

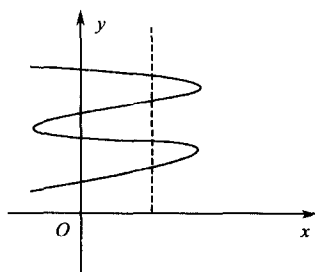
$$\{(x, y) | y = f(x), x \in D_f\},$$

它通常是平面上的一条曲线(图 1.3(a)和图 1.4(a)).

注意: 任何一条竖直的直线与函数的图形最多只能相交于一点(图 1.3(b)和图 1.4(b)).



(a) 某函数图形



(b) 不可能作为函数的图形

图 1.3 函数图形说明一

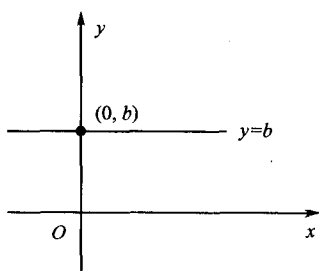
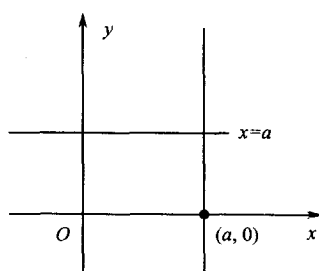
(a) 水平直线 $y=b$ 是函数(b) 竖直直线 $x=a$ 不是函数

图 1.4 函数图形说明二

在如图 1.5 所示的情况下, 适合方程组

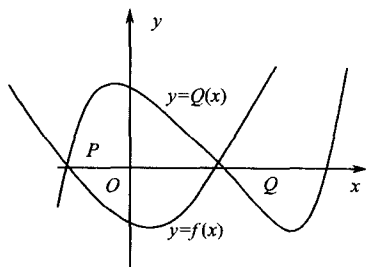


图 1.5 曲线的交点就是联立方程组的根

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = Q(x) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ Q(x, y) = 0 \end{cases}$$