21世纪高等学校电子信息类专业规划教材

概率论与数理统计

刘卫江 主 编
杨有社 寇光兴 副主编

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

21世纪高等学校电子信息类专业规划教材

概率论与数理统计

刘卫江　主　编

杨有社　寇光兴　副主编

清华大学出版社

北京交通大学出版社

・北京・

内容简介

本书是按照我国现行的工科大学本科数学课程教学基本要求和工学专业硕士研究生入学考试大纲编写的。全书内容共分9章，包括随机事件及古典概型概率计算、一维和二维随机变量及分布、随机变量数字特征、大数定律、中心极限定理、统计量及分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等。各章配有习题，书末附有部分习题参考答案和一些重要的概率分布表。

本书结构严谨、逻辑清晰、叙述详细，可作为工科大学各专业的教材，也可作为报考硕士研究生人员和工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/刘卫江主编；杨有社，寇光兴副主编．—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2004.11

（21世纪高等学校电子信息类专业规划教材）

ISBN 7-81082-451-1

Ⅰ．概… Ⅱ．①刘… ②杨… ③寇… Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ．O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第115603号

责任编辑：陈川

出 版 者：清华大学出版社　邮编：100084　电话：010-62776969

北京交通大学出版社　邮编：100044　电话：010-51686414

印 刷 者：北京鑫海金澳胶印有限公司

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　　本：185×260　印张：12.25　字数：297千字

版　　次：2005年1月第1版　2005年1月第1次印刷

书　　号：ISBN 7-81082-451-1/O·23

印　　数：1～5000册　定价：17.00元

前　言

本书是按照我国现行的工科大学本科数学课程教学基本要求和工学专业硕士研究生入学考试大纲编写的。全书内容分三个部分共9章。第一部分是古典概型和随机变量部分(第1、2、3章),主要介绍随机事件及概率、一维和二维随机变量及分布。第二部分是数字特征和极限定理部分(第4、5章),主要介绍随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理。第三部分是数理统计部分(第6、7、8、9章),主要介绍统计量及分布、参数估计、假设检验和方差分析、回归分析。各章配有习题,书末附有部分习题参考答案。

本书可作为工科大学各专业的教材,也可作为报考硕士研究生人员和工程技术人员的参考书。

参加本书编写工作的有空军工程大学刘卫江、杨有社、寇光兴等同志,由刘卫江同志任主编并负责全书的统稿,空军工程大学王国正、刘建仓、李炳杰、吴菊英、杨亚莉等同志为本书提供了大量的习题,井爱雯、袁修久、任谨骤、孙锁、梁放弛、张小水、柏又青等同志提供了部分习题答案,王伟、杜华桦、赵小明等同志提供了部分插图。

本书由空军工程大学朱林户教授、冯有前教授任主审,他们认真审阅了原稿,并提出了许多宝贵的改进意见,对此,我们表示衷心的感谢。

限于编者水平,同时编写时间也比较仓促,对因此而造成的教材中的不妥之处给读者带来的不便,编者深表歉意,恳请广大读者提出批评和指正。

编　者

2005年1月

目　录

第 1 章　概率论基本概念

自然界的现象可以分为两大类,一类是在一定条件下必然要发生的现象,称为必然现象;另一类是在一定条件下可能出现也可能不出现的现象,称为随机现象.

一个物体自地面以初速度 v_0 垂直向上运动,在 v_0 小于第一宇宙速度的条件下,它终将下落到地面;一个平面三角形的内角和一定等于 $180°$ 等都是必然现象的例子.必然现象也称必然事件.在相同的条件下抛一枚硬币,其结果可能正面朝上,也可能反面朝上;记录一段时间内经过一个路口的车辆数目可能较多,也可能较少;某种股票的价格在下一个交易日可能上升,也可能下降等,这些都是随机现象的例子.随机现象也称随机事件,产生随机现象的原因是由于存在着大量影响事物发展的偶然因素.

以往的数学学科的主要内容是研究必然现象中的数学规律.那么可否用研究必然现象的方法去研究随机现象呢?也就是说通过进一步研究影响事物发展的各种偶然因素,去探寻随机现象发生的确切条件.人们发现,要完成这个工作几乎是不可能的,同时也缺乏必要性.例如,记录一段时间内某路口通过的车辆数,其主要目的是想了解该路口车辆流量的大小,以判断交通是否拥挤.因此,这个数量的确切大小并无太实际的意义,我们关心的只是一个"大致"的数量,或者说是这个数量是否超过某一界限.这很自然地使我们产生了求这个随机现象发生的"可能性"的想法.

如果我们能够知道一个随机现象发生的"可能性",那么我们就可以对将要发生的现象做出一种预测或预报,这显然会给我们下一步的行为带来方便.

1.1　随机试验

1.1.1　随机试验

进行一次试验,虽然全体可能结果是已知的,但是试验之前不能确切预知将出现哪一个结果,并且此试验在相同条件下可重复进行,则此试验称为随机试验.这里我们所使用的"试验"这个术语的含义是广泛的,除了通常意义下的物理和化学实验外,也包括对自然界的各种现象的观测和记录.以下是一些随机试验的例子.

E_1:抛一枚硬币,观察出现正面 H 和反面 T 的情况.

E_2:在一个装有 m 个红球和 n 个白球的口袋中,任意摸出一球,记录球的颜色.

E_3:掷一颗骰子,观察出现的点数.

E_4:记录一部电话在一段时间内的来电次数.

E_5:某一班级全体学生在一次考试中的平均成绩.

E_6:在一批产品中任取 m 件,记录次品所占的比例.

E_7:记录某地一昼夜的最高气温和最低气温.

1.1.2 频率稳定性

随机试验最主要的特点是试验的结果在事先无法完全预言，但在相同的条件下大量地重复随机试验，其结果会呈现出一定的数量规律性，历史上一些著名的实验证明了这一点. 表 1 - 1 给出抛硬币实验数据.

表 1 - 1 抛硬币实验

实验者	实验次数	出现正面次数	出现正面频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
德摩根	4092	2048	0.5005
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

可以发现，当抛掷次数很大时，正面出现的频率非常接近于 0.5. 这种在相同条件下大量重复某一随机试验时，各种可能的结果出现的频率稳定在某个数值附近的性质，称为频率稳定性. 频率稳定性的存在，表明随机现象也有它的数量规律性，概率论就是研究随机现象中数量规律性的数学学科.

1.2 样本空间与随机事件

1.2.1 样本空间

一个随机试验 E，其所有可能出现的结果是完全已知的. 我们将随机试验可能出现的结果的全体组成的集合称为随机试验 E 的样本空间，通常用 S 来表示. S 中的元素，即 E 的每个结果称为 E 的样本点.

以下是 1.1 中试验 $E_1 \sim E_7$ 的样本空间：

$S_1 = \{H, T\}$；

$S_2 = \{$红色，白色$\}$；

$S_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$；

$S_4 = \{0,1,2,3,\cdots\}$；

$S_5 = \left\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{100n}{n}\right\}$，这里 n 是学生总数，考试成绩为百分制；

$S_6 = \left\{\frac{0}{m}, \frac{1}{m}, \cdots, \frac{m}{m}\right\}$；

$S_7 = \{(x, y) \mid T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低气温，y 表示最高气温，并设该地区气温不小于 T_0 也不大于 T_1.

样本空间的元素是由试验的目的决定的. 例如，同样是抛掷两枚硬币的试验 E，如果目的是观察出现正反面的情况，那么它的样本空间为 $S = \{HH, HT, TH, TT\}$；如果目的是

观察出现正面的次数,那么它的样本空间为 $S=\{0,1,2\}$.

1.2.2　随机事件

在随机试验中,人们常常关心满足某些条件下的试验结果是否出现,我们将这些满足特定条件的试验结果所组成的集合称为随机试验的随机事件,简称事件.通常用大写字母 A,B,C,… 等表示事件.一个随机试验 E 的随机事件 A 是 E 的样本空间 S 的一个子集.如果试验的结果在 A 中,我们称事件 A 发生,否则称 A 不发生.

由样本空间 S 的一个样本点组成的单点子集称为一个基本事件.

S 作为 S 的子集是一个随机事件,由于它包含了所有的样本点,所以在一次试验中它总是发生的.我们称 S 为必然事件.

空集 $\varnothing$ 作为 S 的子集也是一个随机事件,由于它不含任何样本点,所以在一次试验中它总是不发生的.我们称 $\varnothing$ 为不可能事件.

以下是随机事件的例子.

在 E_3 中事件 A_1 即"出现的点数不小于 3"可表为

$$A_1=\{3,4,5,6\}$$

在 E_5 中事件 A_2 即"平均成绩小于 80 分"可表为

$$A_2=\left\{\frac{0}{n},\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{80n-1}{n}\right\}$$

在 E_7 中事件 A_3 即"最高气温与最低气温相差不大于 10℃"可表为

$$A_3=\{(x,y)\mid y-x\leqslant 10,T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$$

1.3　事件的运算

1.3.1　事件的运算

由于随机事件是一个集合,因此我们完全可以按照集合论中集合之间的关系和运算来处理事件之间的关系和运算.以下我们给出这些关系和运算在概率论中的含义.

设 S 是随机试验 E 的样本空间,而 $A,B,A_k(k=1,2,3,\cdots)$ 是 S 的子集.

(1)　若 $A\subseteq B$,则称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 包含于事件 B,其含义是事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称事件 A 与事件 B 相等.

(2)　事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$,称为事件 A 与事件 B 的和事件或并事件,其含义是当且仅当 A,B 中至少有一个发生时事件 $A\cup B$ 发生.

类似地,$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 是个 n 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,称为有限并.$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 是可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件,称为可列并.

(3)　事件 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$,称为事件 A 与事件 B 的积事件或交事件,其含义是当且仅当 A,B 同时发生时事件 $A\cap B$ 发生.$A\cap B$ 也记成 AB.

类似地,$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 是 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件,称为有限交.$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 是可列个事件

$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件,称为可列交.

(4)　事件 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$,称为事件 A 与事件 B 的差事件,其含义是当且仅当 A 发生且 B 不发生时事件 $A-B$ 发生.

(5)　$A\cap B=\varnothing$,称事件 A 与事件 B 互不相容或互斥,其含义是事件 A 与事件 B 不能同时发生.

基本事件是两两互不相容的.

(6)　若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$,称事件 A 与事件 B 互为逆事件,也称事件 A 与事件 B 互为对立事件,其含义是在一次试验中事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生.A 的逆事件记为 $\bar{A}$,显然,$\bar{A}=S-A$.

事件之间的关系和运算也可以用集合论中的维恩图(又称文氏图)来表示.如图 1－1～图 1－6 所示.

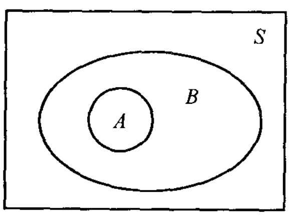

图 1－1　$A\subseteq B$

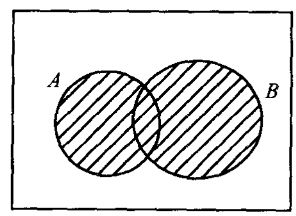

图 1－2　$A\cup B$

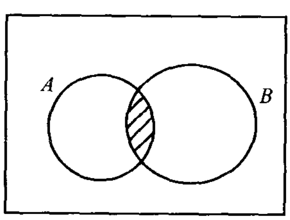

图 1－3　$A\cap B$

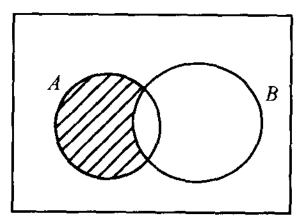

图 1－4　$A-B$

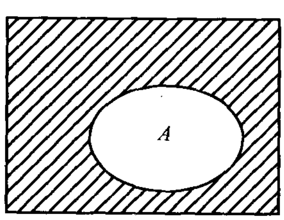

图 1－5　$\bar{A}$

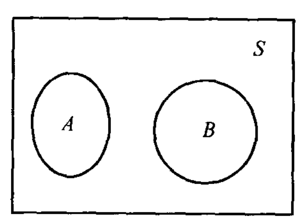

图 1－6　$A\cap B=\varnothing$

1.3.2　事件运算的性质

设 A,B,C 是事件,则事件的运算有以下性质:

交换律:　$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$

结合律:　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

分配律：　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

对偶律：　$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

对偶律又称德摩根律，它对多个事件的交、并运算仍成立，例如我们有

$$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}, \overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

1.4　频率与概率

1.4.1　频率的定义与性质

除必然事件和不可能事件外，一个事件在一次试验中可能发生，也可能不发生．为了描述这个事件发生的可能性的大小，我们引入频率概念．

定义 1.1　在相同的条件下将一随机试验重复 n 次，事件 A 发生的次数记为 n_A，称 n_A 为事件 A 发生的频数，比值

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

称为事件 A 发生的频率．

易知，频率具有以下性质：

(1)　$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$

(2)　$f_n(S) = 1$

(3)　若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两不相容的事件，则有

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

上述 3 条性质分别称为频率的非负性、规范性和可加性．

从直观上，我们很容易想到利用事件 A 发生的频率来描述事件 A 发生的可能性，因为频率反映的是事件 A 在试验中发生的频繁程度，频率越大，则事件 A 发生越频繁，从而可以认为事件 A 发生的可能性越大．但是显而易见的事实是，频率具有波动性，即对于相同的 n，$f_n(A)$ 不一定相同．但从 1.1 中的抛硬币试验可知，当 n 很大的时候，频率的这种波动具有稳定性，即当 n 逐渐增大时，$f_n(A)$ 稳定于某一个常数．在抛硬币试验中，出现正面 H 的频率稳定于 0.5 附近，一个合理的解释是因为硬币的质地和形状是均匀的，所以出现正面与反面的可能性相等．因此，这个频率的稳定值 0.5 恰好代表了正面出现的可能性大小．

同样的事情发生在对英文文献中各字母的使用情况统计中，Dewey 在统计了约 438 023 个字母的英文文献后发现，字母 E 出现的频率大约为 0.1268，而字母 J 出现的频率大约为 0.001．这种字母使用频率的大小取决于英语本身，是由英语特殊的构词方法和语法所决定，它反映了各个字母在英语中出现可能性的大小．

这种表示一定条件下事件 A 发生可能性大小的频率稳定值称为事件 A 的概率，记为 $P(A)$．作为频率的稳定值，$P(A)$ 也应具备以下 3 条性质：

(1)　非负性　$P(A) \geqslant 0$

(2)　规范性　$P(S) = 1$

(3)　可加性　设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$$

1.4.2 概率的定义与性质

以上我们通过大量重复试验中频率所呈现出的稳定性说明了表示事件发生可能性大小的概率是客观存在的.但是我们所使用的“大量重复试验中频率的稳定值”这种说法是不规范的,为了理论研究中的需要,我们给出概率的严格定义.

定义 1.2 设 E 是随机试验,S 是它的样本空间,对于 E 的每个事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

(1) 对于每个事件 A,$P(A) \geqslant 0$;

(2) $P(S) = 1$;

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 是两两不相容的事件,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k) + \cdots \quad (1-1)$$

式(1-1)称为概率的可列可加性.

在第 5 章中我们将证明,当 $n \to \infty$ 时,$P(A)$ 就是频率 $f_n(A)$ 的一种极限,所以用 $P(A)$ 来度量事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小是合理的.

由概率的定义,可以推知概率的一些重要性质.

(1) $P(\varnothing) = 0$

证明:记 $A_n = \varnothing, (n = 1,2,3,\cdots)$,则 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 两两互不相容且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$,所以,$P(\varnothing) = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(\varnothing)\right)$,再由 $P(\varnothing) \geqslant 0$ 可知 $P(\varnothing) = 0$.

(2) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两不相容,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \quad (1-2)$$

证明:只要令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$ 并应用概率的可列可加性及性质 1 即可.

式(1-2)称为概率的有限可加性.

(3) 设 A, B 是两事件,若 $A \subset B$,则

$$P(B - A) = P(B) - P(A); P(B) \geqslant P(A)$$

证明:因为 $A \subseteq B$,　　所以 $B = A \cup (B - A)$

因为 $A \cup (B - A) = \varnothing$,因为 $P(B) = P(A) + P(B - A)$

所以 $P(B - A) = P(B) - P(A)$

因为 $P(B - A) \geqslant 0$,　　所以 $P(B) \geqslant P(A)$

(4) 对任一事件 A,$P(A) \leqslant 1$

证明:因为 $A \subseteq S$,所以 $P(A) \leqslant P(S) = 1$

(5) 对任一事件 A,$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ (1-3)

证明:因为 $\bar{A} \cup A = S, A\bar{A} = \varnothing$,所以 $P(A) + P(\bar{A}) = P(S) = 1$,故

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

(6) 对任意的事件 A, B,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1-4)$$

证明:因为 $A \cup B = A \cup (B - AB)$,　$A(B - AB) = \varnothing, AB \subset B$

所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$

式(1 - 4)可以推广到多个事件的情形. 如对三个事件 A,B,C,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

一般地,对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

证明留给读者自己完成.

1.5 古典概型

我们首先来考虑随机试验的样本空间只有有限个样本点的情形.

假定随机试验的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,它共有 n 个基本事件

$$A_i=\{e_i\},\quad i=1,2,\cdots,n$$

如果 $P(A_i)$ 诸为已知,则对任一事件 $A=\{e_{n_1},e_{n_2},\cdots,e_{n_k}\}$,易知

$$A=A_{n_1}\cup A_{n_2}\cup\cdots\cup A_{n_k}$$

由于基本事件两两不相容,由概率的有限可加性可知

$$P(A)=P(A_{n_1})+P(A_{n_2})+\cdots+P(A_{n_k})\tag{1 - 5}$$

这表明在一个样本点为有限的随机试验中任一事件 A 的概率由每个基本事件的概率 $P(A_i)$ 完全确定.

一个最简单的情形是各个基本事件发生的概率相等的情形,此时由于

$$P(S)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$$

故可知,

$$P(A_i)=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n\tag{1 - 6}$$

对于事件 $A=\{e_{n_1},e_{n_2},\cdots,e_{n_k}\}$,由式(1 - 5)和式(1 - 6),有

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中基本事件数}}{S\text{ 中基本事件总数}}\tag{1 - 7}$$

以上所述的随机试验模型在概率论发展初期曾是概率论的主要研究对象,所以我们称之为古典概型,其主要特征是基本事件有限且每个基本事件发生的可能性相等,故又称等可能概型.

当我们确信随机试验是古典概型问题,那么运用式(1 - 7)便可计算各个事件的概率.

【例 1.1】　同时抛三枚质地均匀的硬币,设事件 A_1 为"恰有两枚硬币出现正面",事件 A_2 为"至少有一枚硬币出现正面",分别求 $P(A_1)$ 和 $P(A_2)$.

解　将三枚硬币编号并按序号观察三枚硬币出现正面 H 和反面 T 的情况,则其样本空间为 $S=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$,易知,

$$A_1=\{HHT,HTH,THH\},\quad A_2=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH\}$$

由于 S 中只有 8 个样本点,且由硬币的均匀性可知每个基本事件发生的可能性相等,故

由式(1 - 7)可知,

$$P(A_1)=\frac{3}{8},P(A_2)=\frac{7}{8}$$

利用概率的性质,$P(A_2)$ 还可以这样计算:

$$\overline{A_2}=\{TTT\},P(A_2)=1-P(\bar{A}_2)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

古典概型的概率计算中,建立样本空间并使每个基本事件的概率相等是正确计算的前提.同样是抛三枚硬币的试验,如果我们以出现正面的次数来建立样本空间,有

$$S'=\{0,1,2,3\}$$

这样 $A_1=\{2\},A_2=\{1,2,3\}$,如果据此认为 $P(A_1)=\frac{1}{4},P(A_2)=\frac{3}{4}$ 则是错误的,因为 S' 中的 4 个样本点的出现不是等可能的,从而 S' 不是古典概型的样本空间,当然也就不能使用古典概型的计算公式(1 - 7).

【例 1.2】 一口袋内装有 8 只球,其中 5 只红球,3 只白球,从口袋内任意取球两次,每次随机地取一只.考虑两种取球方式,(a) 第一次取一只球,观察颜色后放回袋中,将袋中球混合均匀后再任取一球,这种取球方式称为放回抽样;(b) 第一次取球后不放回,第二次从剩余的球中再任取一球,这种取球方式称为不放回抽样.分别就以上两种取球方式,计算(1)取到的两只球都是红球的概率;(2) 取到的两只球颜色不同的概率.

解 (a) 放回抽样的情形

设 A 表示取到的两只球都是红球的事件,B 表示取到的两只球颜色不同的事件,从袋中依次取两只球,每一种取法为一个基本事件.显然,样本空间中仅有有限个样本点,同时,每一个基本事件发生的可能性相等,所以这是古典概型问题.

第一次取球时袋中有 8 个球可供抽取,共有 8 种取法,第二次取球时袋中有 8 个球可供抽取,也有 8 种取法.由计数的乘法原理,共有 8×8 种取法,即样本空间中有 8×8 个样本点.

由于样本空间中样本点较多,我们不再一一列举.事实上,就计算概率而言,我们只要知道样本空间及事件中所含的样本点数目就足够了.

对于事件 A 而言,第一次有 5 只球可供抽取,第二次也有 5 只球可供抽取,所以共有 5×5 种取法,即 A 中包含 5×5 个样本点,故

$$P(A)=\frac{5\times5}{8\times8}=\frac{25}{64}$$

对于事件 B 而言,要求两次取出的球颜色不同,可以分为第一次取红球、第二次取白球和第一次取白球、第二次取红球两种情况分别计算 B 中样本点总数.由乘法原理和加法原理可知,B 中样本点总数为 $5\times3+3\times5$,故

$$P(B)=\frac{5\times3+3\times5}{8\times8}=\frac{15}{32}$$

(b) 不放回抽样的情形

$$P(A)=\frac{5\times4}{8\times7}=\frac{5}{14},\quad P(B)=\frac{5\times3+3\times5}{8\times7}=\frac{15}{28}$$

(请读者自己验证)

【例 1.3】 将 r 个不同的球任意放入编号为 1 至 n 的 n 个盒子中($r\leqslant n$),假定每个球放入每个盒子的可能性相等,求每个盒子至多有一球的概率.

解　将 r 个球放入 n 个盒子中，每一种方法是一个基本事件，由题中假设可知这是一个古典概型问题. 由于每一个球都可以放入 n 个盒子中的任一个中去，共有 n^r 种不同的放法，而每一个盒子至多有一个球的放法有 $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$ 种，故所求概率为

$$p=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r}=\frac{n!}{n^r\cdot r!}$$

例 1.3 中的问题也称为占位问题，它在统计学中有着重要的应用. 它有一个有趣的特例，就是如下的例 1.4.

【例 1.4】　设有 r 个人，假定每人的生日在一年的 365 天中任一天的概率相等，求这 r 个人生日各不相同的概率.

解　将 365 天理解为 365 个盒子，而 r 个人去任意地占这 365 个盒子，生日各不相同即为每盒至多一人，由例 1.3 可知，所求概率为

$$p=\frac{365!}{365^r\times r!}$$

具体计算可知，$r=23$ 时，$p=0.453$；$r=64$ 时，$p=0.003$. 这表明，任意的 23 人中，至少有两人生日相同的概率为 $1-0.493=0.507$；而任意的 64 人中，至少有两人生日相同的概率为 $1-0.003=0.997$，这几乎等于必然事件的概率了. 我们知道任意的 366 人才能保证至少有两人生日相同，而 64 与 366 相去甚远，但我们却得到了几乎一样的结论. 在计算之前，你能想到这一点吗？

【例 1.5】　设有 n 件产品，其中 d 件次品，今从中任取 m 件，问其中恰有 $k(k\leqslant d)$ 件次品的概率是多少？

解　这是不放回抽样情形. 从 n 件产品中任取 m 件，共有 C_n^m 种不同的取法，每一种取法为一个基本事件. 要取得 k 件次品，当然是从 d 件次品中取得，其余的 $m-k$ 件正品是从 $n-d$ 件正品中取得，所以恰好取得 k 件次品的取法共有 $C_d^kC_{n-d}^{m-k}$ 种取法，所求概率为

$$p=\frac{C_d^kC_{n-d}^{m-k}}{C_n^m}\tag{1-8}$$

式(1－8)称为超几何分布的概率公式.

【例 1.6】　在五双不同的鞋子中任取 4 只，这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少？

解　五双鞋子共有 10 只，任取 4 只，总的取法为 $C_{10}^4=210$ 种.

取出的 4 只鞋子中至少有两只配成一双的取法，可以分成恰有一双和恰有两双两种不相容的情形分别计算后相加即可.

恰有一双的取法为 $C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1=120$ 种，其含义是先取一双中的两只，再取两双并从每一双中取一只；恰有两双的取法为 $C_5^2C_4^4=10$ 种，其含义是取两双中的 4 只，故所求概率为

$$p=\frac{120+10}{210}=\frac{13}{21}$$

本例中的概率也可以这样计算，设 A 表示事件“取出的 4 只鞋子中至少有两只配成一双”，则 $\bar{A}$ 表示事件“取出的 4 只鞋子中任何两只都配不成一双”，$\bar{A}$ 包含的取法为 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=80$ 种，其含义为先取 4 双，再从每双中任取一只. 故