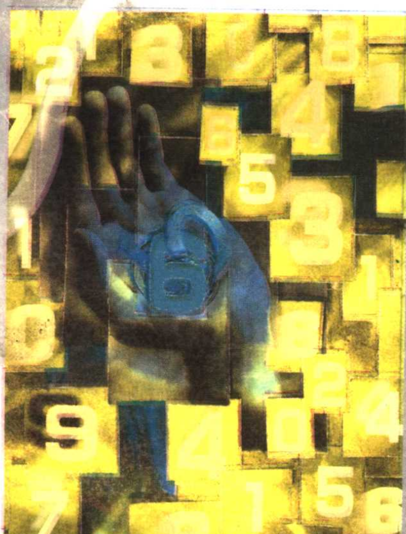
北京大学计算机科学与技术系教材

集合论与图论

离散数学二分册

耿素云 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学计算机科学技术系教材

集合论与图论

离散数学二分册

耿素云 编著

北京大学出版社
北 京

内 容 提 要

本书为离散数学第二分册，即集合论与图论部分（第一分册《数理逻辑》，第三分册《代数结构与组合数学》）。书中系统地介绍了朴素集合论与图论的基本内容，其中包括集合的基本概念、二元关系、函数、自然数、基数与序数；图的基本概念、图的连通性、欧拉图与哈密尔顿图、树、平面图、图的着色、图的矩阵表示、覆盖集、独立集、匹配等，还介绍了与带权图有关的几种图论中的算法。

本书适用于计算机及相关专业的本科生或研究生，也可供计算机专业科技人员学习或参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学　第2分册：集合论与图论/耿素云编著. —北京：北京大学出版社，1997. 12

ISBN 7-301-03604-3

Ⅰ. 离…　Ⅱ. 耿…　Ⅲ. ①离散数学②集合论③图论　Ⅳ. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 26806 号

书　　名：集合论与图论

著作责任者：耿素云　编著

责 任 编 辑：段晓青　张豫夫

标 准 书 号：ISBN 7-301-03604-3/TP・381

出　版　者：北京大学出版社

地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

电　　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032

排　印　者：北京经纬印刷厂印刷

发　行　者：北京大学出版社

经　销　者：新华书店

850×1168　32开本　12.25印张　318千字

1998年2月第一版　1998年2月第一次印刷

定　　　价：19.0元

前　言

离散数学是研究离散量的结构及相互关系的数学学科，是现代数学的一个重要分支，它在计算机科学与技术领域中有着广泛的应用。因此，离散数学是计算机专业学生的一门极为重要的专业基础课程。通过本课程的学习，可以使学生掌握处理离散结构的描述工具与方法，并能培养学生的抽象思维和严格的逻辑推理能力。

一般说来，离散数学包含数理逻辑、集合论、图论、代数结构、组合数学等内容。我们将以上内容分成三个分册出版：第一分册为数理逻辑，第二分册为集合论与图论，第三分册为代数结构与组合数学。本套教材体系严谨、内容丰富、配有大量的例题与习题，并与计算机科学的理论与实践紧密结合，它适用于计算机及相关专业的本科生或研究生，也可供计算机专业科技人员使用或参考。

本书为第二分册，即集合论与图论部分。该分册系统介绍了朴素集合论与图论的基本内容。第一章到第六章的内容分别为集合、二元关系、函数、自然数、基数、序数，其中序数部分打了 * 号，不做为基本要求，只供参考。第七章到第十四章的内容分别为图、欧拉图与哈密尔顿图、树、图的矩阵表示、平面图、图的着色、覆盖集与独立集、带权图及其应用。第十四章的内容可分到相关章节讲解，也可以最后统一讲解。

作者在编写本书过程中参阅了多种离散数学教材及有关资料，在此向有关作者们表示衷心的感谢。

在这里，我们还要特别感谢北大出版社和北大计算机系的领导，他们对本套教材的出版给予了大力支持与帮助。

最后，我们诚恳地期待读者对本套教材提出宝贵意见。

作者

1996年12月于北大

目　录

第一部分　集合论

第二部分　图论

第一章 集 合

§1.1 集合的概念及集合之间的关系

自从 19 世纪末著名的德国数学家康托(G. Cantor 1845—1918)为集合论做奠基工作以来,集合论在一百多年的时间里,已经成为数学中不可缺少的基本的描述工具,集合已成了数学中最为基本的概念.

集合论分为两种体系,一种是朴素集合论体系,也称为康托集合论体系;另一种是公理集合论体系,本书不讨论公理集合论体系,在前 6 章介绍的是朴素集合论体系中的主要内容. 在朴素集合论体系中,有些概念,特别是关于集合的概念是不能精确定义的. 我们不给集合下严格定义,这丝毫不会影响对集合的理解.

一般地,人们用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$,表示集合中的元素. 用 $a\in A$ 表示 a 为 A 的元素,读作 a 属于 A,而用 $a\notin A$ 表示 a 不是 A 中的元素,读作 a 不属于 A. 一般用两种方法表示集合.

列举法:列出集合中的全体元素,元素之间用逗号分开,然后用花括号括起来. 设 A 是由 a,b,c,d 为元素的集合,B 是正偶数集合,则 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{2,4,6,\cdots\}$.

描述法:用谓词 $P(x)$ 表示 x 具有性质 P,用 $\{x|P(x)\}$ 表示具有性质 P 的集合,例如,$P_1(x)$:x 是英文字母,$P_2(y)$:y 是十进制数字,则 $C=\{x|P_1(x)\}$,$D=\{y|P_2(y)\}$ 分别表示 26 个英文字母集合和 10 个十进制数字集合.

对于集合的表示法应该注意以下几点:

(1) 集合中的元素是各不相同的.

(2) 集合中的元素不规定顺序.

(3) 集合的两种表示法有时是可以互相转化的. 例如列举法中的 B 可用描述法表示为 $B=\{x|x>0$ 且 x 为偶数$\}$或$\{x|x=2(k+1),k$ 为非负整数$\}$.

为方便起见,本书中指定 N,Z,Q,R,C 分别表示自然数集合(含 0),整数集合,有理数集合,实数集合和复数集合. 有了这个规定之后,列举法中的 B 又可表示为$\{x|x\in N$ 且 x 为非 0 偶数$\}$,或$\{x|x=2(k+1)$且 $k\in N\}$. 由此可见,表示一个集合的方法是很灵活多变的,当然要注意准确性和简洁性. 下面讨论集合之间的关系.

定义 1.1 设 A,B 为二集合,若 B 中的每个元素都是 A 中的元素,则称 B 是 A 的**子集**,也称 A 包含 B 或 B 含于 A,记作 $B\subseteq A$. 其符号化形式为

$$B\subseteq A\Leftrightarrow\forall\ x(x\in B\rightarrow x\in A).$$

若 B 不是 A 的子集,则记作 $B\nsubseteq A$,其符号化形式为

$$B\nsubseteq A\Leftrightarrow\exists\ x(x\in B\wedge x\notin A).$$

设 $A=\{a,b,c\},B=\{a,b,c,d\},C=\{a,b\}$,则 $A\subseteq B,C\subseteq A,C\subseteq B$.

定义 1.2 设 A,B 为二集合,若 A 包含 B 且 B 包含 A,则称 A 与 B **相等**,记作 $A=B$. 即

$$A=B\Leftrightarrow\forall\ x(x\in A\leftrightarrow x\in B).$$

设 $A=\{2\},B=\{1,4\},C=\{x|x^2-5x+4=0\},D=\{x|x$ 为偶素数$\}$,则 $A=D$ 且 $B=C$.

设 A,B,C 为 3 个集合,容易证明下面 3 个命题为真:

(1) $A\subseteq A$;

(2) 若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,则 $B\nsubseteq A$;

(3) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

定义 1.3 设 A,B 为二集合，若 A 为 B 的子集，且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的**真子集**，或称 B 真包含 A，记作 $A\subset B$. 即

$$A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B.$$

若 A 不是 B 的真子集，则记作 $A\not\subset B$，其符号化形式为

$$A\not\subset B\Leftrightarrow\exists\, x(x\in A\wedge x\notin B)\vee(A=B).$$

设 A,B,C 为 3 个集合，从定义不难看出下面 3 个命题为真：

(1) $A\not\subset A$；

(2) 若 $A\subset B$，则 $B\not\subset A$；

(3) 若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$.

定义 1.4 不拥有任何元素的集合称为**空集合**，简称为**空集**，记作$\varnothing$[①].

$\{x\mid x^2+1=0\wedge x\in R\}$，$\{(x,y)\mid x^2+y^2<0\wedge x,y\in R\}$都是空集.

定理 1.1 空集是一切集合的子集.

证明 只要证明，对于任意的集合 A，均有$\varnothing\subseteq A$ 成立，即证明$\forall\, x(x\in\varnothing\rightarrow x\in A)$为真，这是显然的. ▌

推论 空集是唯一的.

证明 设$\varnothing_1$ 与$\varnothing_2$ 都是空集，由定理 1.1 可知

$$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2\wedge\varnothing_2\subseteq\varnothing_1,$$

所以，$\varnothing_1=\varnothing_2$. ▌

由推论可知，空集无论以什么形式出现，它们都是相等的. 因而

$$\{x\mid x\neq x\}=\{x\mid x^2+1=0\wedge x\in R\}=\varnothing.$$

空集是一切集合的子集，从这个意义上看，可以形象地说：$\varnothing$是“最小”的集合. 有无最大的集合呢？回答是否定的，但当讨论某具体问题时，可以定义一个具有相对性的“最大”集合.

定义 1.5 如果限定所讨论的集合都是某一集合的子集，则称该集合为**全集**，常记为 E.

---

① $\varnothing$是丹麦字母，发音为“ugh”.

从定义可以看出，全集的概念具有相对性. 例如，当我们讨论(a,b)区间上实数的性质时，可将(a,b)取为全集，当讨论$[0,+\infty)$上实数性质时，可将$[0,+\infty)$区间取成全集. 这说明全集是根据具体情况而决定的，因而具有相对性.

又容易发现，根据某一具体情况定义的全集是不唯一的. 讨论(a,b)区间上实数性质时，当然可以取(a,b)为全集，也可以取区间$[a,b)$，$(a,b]$，$(a,+\infty)$，实数集 R 等为全集. 又如，当讨论的集合都是 $A=\{a,b,c\}$的子集时，可以取 A 为全集，也可以取 $B=\{a,b,c,d\}$为全集，其实，可以取包含 A 的一切集合为全集，而 A 是所要求的全集中“最小”的全集，但找不到所要求的“最大”的全集.

给定若干个集合后，都可以找到包含它们的全集，因而在今后的讨论中，所涉及到的集合都可以看成某个全集 E 的子集.

定义 1.6 设 A 为一个集合，称由 A 的所有子集组成的集合为 A 的**幂集**，记作 $P(A)$[①]. 用描述法表示为

$$P(A)=\{x\mid x\subseteq A\}.$$

为方便起见，本书中规定，$\varnothing$为 **0 元集**，含 1 个元素的集合为**单元集**或 **1 元集**，含 2 个元素的集合为 **2 元集**，…，含 n 个元素的集合为 ***n* 元集**$(n\geqslant 1)$. 用$|A|$表示 A 中的元素个数，当 A 中的元素个数为有限数时，A 为**有限集**或**有穷集**[②].

为了求出给定集合 A 的幂集，首先求出 A 的由低到高元的所有子集，再将它们组成集合即可. 设 $A=\{a,b,c\}$，求 $P(A)$的步骤如下：

0 元子集为：$\varnothing$；

1 元子集为：$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$；

2 元子集为：$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$；

3 元子集为：$\{a,b,c\}=A$.

---

① 在概率论中，用 $P(A)$表示事件 A 的概率，请读者注意区分. 有的书上用 2^A 表示 A 的幂集.

② 在本小节所给出的概念，在第五章还要给出严格的定义或表示法.

A 的幂集 $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

从以上的讨论不难证明下面定理.

定理 1.2 设集合 A 的元素个数 $|A|=n$（n 为自然数），则 $|P(A)|=2^n$.

除了 $P(A)$ 这样由集合构成的集合外，在数学中还会遇到许多其他形式的由集合构成的集合，统称这样的集合为**集族**. 若将集族中的集合都赋予记号，则可得带指标集的集族，见下面定义.

定义 1.7 设 $\mathscr{A}$ 为一个集族，S 为一个集合，若对于任意的 $\alpha\in S$，存在唯一的 $A_\alpha\in\mathscr{A}$ 与之对应，而且 $\mathscr{A}$ 中的任何集合都对应 S 中的某一元素，则称 $\mathscr{A}$ 是以 S 为指标集的**集族**，S 称为 $\mathscr{A}$ 的**指标集**. 常记 $\mathscr{A}=\{A_\alpha\mid\alpha\in S\}$，或 $\mathscr{A}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$.

如果将 $\varnothing$ 看成集族，则称 $\varnothing$ 为**空集族**.

设 $A_1=\{x\mid x\in N\wedge x$ 为奇数$\}$，

$A_2=\{x\mid x\in N\wedge x$ 为偶数$\}$，

则 $\{A_1,A_2\}$ 是以 $\{1,2\}$ 为指标集的集族.

设 p 为一素数，$A_k=\{x\mid x=k(\mathrm{mod}\ p)\}$，$k=0,1,\cdots,p-1$，则 $\mathscr{A}=\{A_0,A_1,\cdots,A_{p-1}\}$ 是以 $\{0,1,2,\cdots,p-1\}$ 为指标集的集族，也可以记为 $\mathscr{A}=\{A_k\mid k\in\{0,1,\cdots,p-1\}\}$，或 $\mathscr{A}=\{A_k\}_{k\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}}$，

设 $A_n=\{x\mid x\in N\wedge x=n\}$，则 $\mathscr{A}=\{A_n\mid n\in N\}$ 是以 N 为指标集的集族，集族中的元素为以各自然数为元素的单元集.

令 $N_+=N-\{0\}$，设 $A_n=\{x\mid 0\leqslant x<\frac{1}{n}\wedge n\in N_+\}$，则 $\mathscr{A}=\{A_n\mid n\in N_+\}$ 是以 N_+ 为指标集的集族，其元素为半开半闭区间 $[0,\frac{1}{n})$，$n=1,2,\cdots$.

在本节结束之前，略谈一下多重集合的概念，前面谈到的集合都是由不同对象（元素）组成的. 某元素在集合中无论重复出现多少次，仍看成是一个元素. 而在实际中，某一元素的重复出现往往

表达了某种实际意义. 例如,在某项工程中所需要的工程技术人员的种类可用集合 $A=\{$电机工程师,机械工程师,数学家,制图员,程序员$\}$表示,但从集合 A 看不出所需要人员的数量，于是引出多重集合的概念.

设全集为 E,E 中元素可以不止一次在 A 中出现的集合 A,称为**多重集合**. 若 E 中元素 a 在 A 中出现 $k(k\geqslant 0)$次,则称 a 在 A 中的**重复度**为 k.

设全集 $E=\{a,b,c,d,e\}$. $A=\{a,a,b,b,c\}$为多重集合,其中 a,b 的重复度为 2,C 的重复度为 1,而 d,e 的重复度均为 0.

其实,集合可看成是各元素重复度均小于等于 1 的多重集合.

在图论等课程中用到多重集合的概念. 本书集合论部分只讨论集合而不讨论多重集合,因而谈到集合都不是多重集合,集合中的元素是各不相同的.

§1.2 集合的运算

给定两个集合 A,B,除了关心 A,B 之间是否有包含或相等的关系外,有时还要讨论至少属于 A,B 之一的元素组成的集合,或既属于 A 又属于 B 的全体元素组成的集合,以及属于 A 而不属 B 的全体元素组成的集合等,这些新的集合是通过集合的并、交、补等基本运算产生的.

定义 1.8 设 A,B 为二集合,称由 A 和 B 的所有元素组成的集合为 A 与 B 的**并集**,记作 $A\cup B$,称$\cup$为**并运算符**,$A\cup B$ 的描述法表示如下:

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}.$$

设

$$A=\{x\mid x\in N\wedge 5\leqslant x\leqslant 10\},$$
$$B=\{x\mid x\in N\wedge x\leqslant 10\wedge x \text{ 为素数}\},$$

则

$$A\cup B=\{2,3,5,6,7,8,9,10\}.$$

可以将集合的并运算推广到有限个或可数个集合[①]. 设 A_1, $A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个集合,

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid\exists\ i(1\leqslant i\leqslant n\wedge x\in A_i)\},$$

简记为

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

类似地,对于可数个集合 $A_1,A_2,\cdots$,记

$$A_1\cup A_2\cup\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

为其并集.

设

$$A_n=\{x\mid x\in R\wedge n-1\leqslant x\leqslant n\},n=1,2,\cdots,10,$$

则

$$\bigcup_{n=1}^{10}A_n=\{x\mid x\in R\wedge 0\leqslant x\leqslant 10\}=[0,10].$$

设

$$A_n=\{x\mid x\in R\wedge 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{n}\},n=1,2,\cdots,$$

则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid x\in R\wedge 0\leqslant x\leqslant 1\}=[0,1].$$

定义 1.9 设 A,B 为二集合,称由 A 和 B 的公共元素组成的集合为 A 与 B 的**交集**,记作 $A\cap B$,称 $\cap$ 为**交运算符**. $A\cap B$ 的描述法表示为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}.$$

设

$$A=\{x\mid x\in N\wedge x\text{ 为奇数}\wedge 0\leqslant x\leqslant 20\},$$
$$B=\{x\mid x\in N\wedge x\text{ 为素数}\wedge 0\leqslant x\leqslant 20\},$$

---

① 有限和可数集的定义在第四章介绍.

则

$$A \cap B = \{3,5,7,11,13,17,19\}.$$

同并运算类似，可以将集合的交推广到有限个或可数个集合：

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \forall_i (1 \leqslant i \leqslant n \rightarrow x \in A_i)\}.$$

类似定义

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

设

$$A_n = \{x \mid x \in R \wedge 0 \leqslant x \leqslant n\}, n = 1,2,\cdots,$$

则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid x \in R \wedge 0 \leqslant x \leqslant 1\} = [0,1].$$

定义 1.10 设 A,B 为二集合，若 $A \cap B = \varnothing$，则称 A,B 是**不交的**，设 $A_1,A_2,\cdots$是可数个集合，若对于任意的 $i \neq j$，均有 $A_i \cap A_j = \varnothing$，则称 $A_1,A_2,\cdots$是**互不相交的**.

设

$$A_n = \{x \mid x \in R \wedge n-1 < x < n\}, n = 1,2,\cdots,$$

则 $A_1,A_2,\cdots$是互不相交的.

定义 1.11 设 A,B 为二集合，称属于 A 而不属于 B 的全体元素组成的集合为 B 对 A 的**相对补集**，记作 $A-B$，称－为**相对补运算符**. $A-B$ 的描述法表示为

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

定义 1.12 设 A,B 为二集合，称属于 A 而不属于 B，或属于 B 而不属于 A 的全体元素组成的集合为 A 与 B 的**对称差**，记作 $A \oplus B$，称$\oplus$为**对称差运算符**. $A \oplus B$ 的描述法表示为

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

容易看出，$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

定义 1.13 设 E 为全集，$A \subseteq E$，称 A 对 E 的相对补集为 A 的**绝对补集**，并将 $E-A$ 简记为$\sim A$，称$\sim$为**绝对补运算符**. $\sim A$ 的描述法表示为

$$\sim A=\{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}.$$

因为 E 是全集，所以 $x\in E$ 是真命题，于是

$$\sim A=\{x \mid x \notin A\}.$$

设

$$A=\{x \mid x \in R \wedge 0 \leqslant x<2\}, B=\{x \mid x \in R \wedge 1 \leqslant x<3\},$$

则

$$A-B=\{x \mid x \in R \wedge 0 \leqslant x<1\}=[0,1)$$

$$B-A=\{x \mid x \in R \wedge 2 \leqslant x<3\}=[2,3)$$

$$A \oplus B=\{x \mid x \in R \wedge(0 \leqslant x<1 \vee 2 \leqslant x<3)\}=[0,1) \cup[2,3).$$

当将实数集 R 作为全集时，

$$\begin{aligned}\sim A &=\{x \mid x \in R \wedge(-\infty<x<0 \vee 2 \leqslant x<+\infty)\} \\ &=(-\infty, 0) \cup[2,+\infty).\end{aligned}$$

以上定义了集合的并、交、补运算，还可以将并、交运算推广到集族上.

定义 1.14 设 $\mathscr{A}$ 为一个集族，称由 $\mathscr{A}$ 中全体元素的元素组成的集合为 $\mathscr{A}$ 的**广义并集**，记作 $\bigcup\mathscr{A}$，称 $\bigcup$ 为**广义并运算符**，读作“大并”. $\bigcup\mathscr{A}$ 的描述法表示为

$$\bigcup \mathscr{A}=\{x \mid \exists z(z \in \mathscr{A} \wedge x \in z)\}.$$

设

$$\mathscr{A}=\{\{a, b\},\{c, d\},\{d, e, f\}\}.$$

则

$$\bigcup \mathscr{A}=\{a, b, c, d, e, f\}.$$

当 $\mathscr{A}$ 是以 S 为指标集的集族时，

$$\bigcup \mathscr{A}=\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}=\bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha.$$

定义 1.15 设 $\mathscr{A}$ 为非空的集族，称由 $\mathscr{A}$ 中全体元素的公共元素组成的集合为 $\mathscr{A}$ 的**广义交集**，记作 $\bigcap\mathscr{A}$，称 $\bigcap$ 为**广义交运算符**，读作“大交”. $\bigcap\mathscr{A}$ 的描述法表示为

$$\bigcap \mathscr{A}=\{x \mid \forall z(z \in \mathscr{A} \rightarrow x \in z)\}.$$