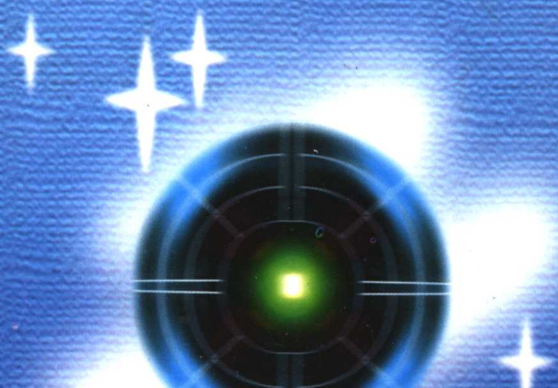
矩阵引论

JUZHENYINLUN

卫宗礼 编著



陕西科学技术出版社

矩 阵 引 论

卫宗礼 编著

陕 西 科 学 技 术 出 版 社

内容介绍

本书共分九章，较全面地介绍了矩阵基本理论，主要内容有：矩阵基本知识，矩阵分解理论，矩阵范数理论，广义逆矩阵，矩阵中的不等式，矩阵分析，矩阵的克朗尼克积，代数特征值问题，最后介绍了几种常用的矩阵.

本书可作为数学专业高年级学生和计算机等专业研究生教材，以及有关工程人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵引论/卫宗礼编著. —西安：陕西科学技术出版社，2004.8

ISBN 7－5369－3841－1

Ⅰ. 矩… Ⅱ. 卫… Ⅲ. 矩阵－理论－高等学校－教材 Ⅳ. 0151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 084179 号

出 版 者	陕西科学技术出版社 西安北大街 131 号　邮编　710003 电话(029)87211849　传真(029)87218236 http://www.snstp.com
发 行 者	陕西科学技术出版社 电话(029)87212206　87260001
印　　刷	陕西丰源印务有限公司
规　　格	880 mm×1230 mm　32 开本
印　　张	7.25
字　　数	200 千字
版　　次	2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	11.00 元

前　言

矩阵理论是数学的一个重要分支，它有着悠久的发展历史和极其丰富的内容. 它既是经典数学的基础，又是最具有使用价值的数学理论. 作为数学的一种基本工具，它在数学科学及其他科学技术领域，如数值分析、微分方程、运筹学、量子力学、统计力学、现代控制理论、系统工程等，甚至在经济管理、社会科学等领域都有着广泛的应用. 现代计算机技术的飞速发展为矩阵理论的应用开辟了更广阔的空间，因此作为数学专业高年级学生和计算机、物理、化学、经济管理专业研究生必须了解和掌握矩阵的基础理论和基本计算方法，本书就是基于这样一个目的而编写的. 通过对本书的学习，能够对矩阵的基础理论和基本计算方法有一个比较全面、系统的了解，为今后的进一步学习和研究打下一个坚实的基础.

本书的编写力图做到内容全面、论述详尽、语言通俗、易于自学，尽可能满足不同专业的需求，本书独具特色之处就是增加了“矩阵中的不等式”一章.

本书第一章作为预备知识，简单复习了高等代数中矩阵的基本概念、基本运算及常用的符号；第二章较全面地介绍了矩阵的六种分解定理，它在广义逆矩阵一章中有重要的应用；第三章介绍了矩阵的范数理论，它是矩阵分析理论的基础；第四章讲述了矩阵的减号广义逆、自反广义逆、最小范数广义逆、最小二乘广义逆和加号广义逆以及它们在线性方程组理论中的应用；第五章介绍了矩阵中常用的不等式；第六章讲述的是矩阵分析与矩阵函数；第七章介绍了矩阵的克朗尼克积；第八章介绍了代数特征值问题；第九章介绍了几种常用的矩阵. 不同专业的学生可根据需要选学有关内容.

由于时间仓促，书中难免存在错误和不当之处，敬请读者不吝指正。

作　者

2004 年 8 月于洛阳师范学院

目　录

第一章　矩阵的基本知识

这一章主要介绍有关矩阵的基本概念和符号.

第一节　矩阵的定义及基本运算

设 F 是一个数域，由 F 中 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,m;$ $j = 1,2,\cdots,n)$ 组成的矩形阵列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为数域 F 上的一个 $m \times n$ 矩阵，简记作 $(a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij} 表示矩阵第 i 行第 j 列处的元素. 记数域 F 上 $m \times n$ 矩阵的全体为 $F^{m\times n}$，当 $m = n$ 时称 A 为 n 阶方阵，此时元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为方阵 A 的对角元. 若 A 的对角元以外的元素全为零，则称 A 为对角阵，记作 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，即

$$\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

若在 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ 中对角元都相等，则称之为数量阵；在数量阵中若 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$，则称该数量阵为单位阵，记为 I_n，或简记为 I.

矩阵的几种基本运算：

(1) 加法：设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{ij})_{m\times n}$，则

$$A+B=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

减法是加法的逆运算，$A-B=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$.

(2) 数乘：设 $k\in F, A=(a_{ij})_{m\times n}, kA=(ka_{ij})_{m\times n}$，显然 $(-1)A=(-a_{ij})_{m\times n}=-A$.

(3) 乘法：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times p}$，则

$$AB=(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj})_{m\times p}.$$

当 A 为 n 阶方阵时，定义 A 的 k 次幂为：$A^k=\underbrace{AAA\cdots A}_{k}$，其中 k 为某个正整数；且规定 $A^0=I_n$，当 A 为可逆阵时，$A^{-k}=(A^{-1})^k$.

(4) 转置：$A^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$，其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

(5) 共轭：$\overline{A}=(\overline{a}_{ij})_{m\times n}$，其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

(6) 共轭转置：$A^{\mathrm{H}}=\overline{A}^{\mathrm{T}}=(\overline{a}_{ij})^{\mathrm{T}}_{m\times n}$，显然 $\overline{A}^{\mathrm{T}}=\overline{A^{\mathrm{T}}}$.

(7) 分块：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，若 $m_k(k=1,2,\cdots,s), n_l(l=1,2,\cdots,t)$ 都是正整数，且 $\sum_{i=1}^{s}m_k=m, \sum_{j=1}^{t}n_l=n$，则按下方式将 A 分成 $s\times t$ 块：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},$$

其中 A_{kl} 为 $m_k\times n_l$ 矩阵，此时 A 称为 $s\times t$ 分块阵，简记为 $A=(A_{ij})$. 矩阵的很多运算都可以推广到分块矩阵上去，这里不再一一叙述.

几种常用的特殊类型的矩阵（以下矩阵均为 n 阶方阵）：

上三角矩阵：当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$.

下三角矩阵：当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$.

对称阵：$A^{\mathrm{T}}=A, A\in F^{n\times n}$.

Hermite 阵：$A^H = A, A \in C^{n\times n}$（$C$ 为复数域）.

反对称阵：$A^T = -A, A \in F^{n\times n}$.

反 Hermite 阵：$A^H = -A, A \in C^{n\times n}$.

正交阵：$A^TA = I_n, A \in R^{n\times n}$（$R$ 为实数域）.

酉矩阵：$A^HA = I_n, A \in C^{n\times n}$.

幂等阵：$A^2 = A, A \in F^{n\times n}$.

幂零阵：$A^k = 0$，k 为某一正整数；$A \in F^{n\times n}$.

正定阵：$x^HAx > 0, \forall x \in F^n$，且 $x \neq 0$；$A \in F^{n\times n}, A^H = A$.

半正定阵：$x^HAx \geqslant 0, \forall x \in F^n$，且 $x \neq 0$；$A \in F^{n\times n}, A^H = A$.

负定阵：$x^HAx < 0, \forall x \in F^n$，且 $x \neq 0$；$A \in F^{n\times n}, A^H = A$.

半负定阵：$x^HAx \leqslant 0, \forall x \in F^n$，且 $x \neq 0$；$A \in F^{n\times n}, A^H = A$.

正矩阵：$a_{ij} > 0\ (i,j = 1,2,\cdots,n)$.

非负矩阵：$a_{ij} \geqslant 0\ (i,j = 1,2,\cdots,n)$.

对角占优阵：$|a_{ii}| \geqslant \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\ (i = 1,2,\cdots,n)$.

严格对角占优阵：$|a_{ii}| \geqslant \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\ (i = 1,2,\cdots,n)$.

第二节　矩阵的等价关系和等价类

定义 1.2.1　设 $A, B \in F^{m\times n}$，若 A, B 之间存在一种关系，记为“$\sim$”，这种关系如果满足：

(1) $A \sim A$（反身性）；

(2) $A \sim B$，则 $B \sim A$（对称性）；

(3) $A \sim B$，且 $B \sim C$，则 $A \sim C$（传递性），

则称该关系为等价关系，此时称 A 与 B 等价.

在某种等价关系下，$F^{m\times n}$ 中所有与 A 等价的矩阵组成的集合称为矩阵 A 的等价类. 下面给出几种常用的等价关系：

(1) 相抵：设 $A,B \in F^{m\times n}$，若存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q 使得

$$B = PAQ,$$

则称 A,B 相抵，也称 PAQ 为 A 的相抵变换.

(2) 酉相抵：设 $A,B \in F^{m\times n}$，若存在 m 阶酉阵 U 和 n 阶酉阵 V 使得

$$B = UAV,$$

则称 A,B 酉相抵.

(3) 相似：设 $A,B \in F^{m\times n}$，若存在 n 阶可逆阵 P，使得

$$B = PAP^{-1},$$

则称 A,B 相似，称 PAP^{-1} 为 A 的相似变换.

(4) 合同：设 $A,B \in F^{m\times n}$，若存在 n 阶可逆阵 P，使得

$$B = PAP^{\mathrm{T}},$$

则称 A,B 合同，称 PAP^{T} 为 A 的合同变换.

(5) 正交相似：设 $A,B \in F^{m\times n}$，若存在 n 阶正交阵 Q 使得

$$B = QAQ^{\mathrm{T}} = QAQ^{-1},$$

则称 A,B 正交相似.

(6) 酉相似：设 $A,B \in F^{m\times n}$，若存在 n 阶酉阵 U 使得

$$B = UAU^{\mathrm{H}} = UAU^{-1},$$

则称 A,B 酉相似.

由线性代数我们知道矩阵的秩在相抵变换下保持不变，而上述等价关系 2 ～ 5 都是相抵的特殊情形，因此在上述所有变换下都有秩 A = 秩 B.

如果 n 阶方阵 A 能相似一个对角阵，则称 A 是单纯矩阵；如果 A 不能相似一个对角阵，则称 A 是亏损矩阵. 显然正(负) 定阵、半(负) 正定阵都是单纯矩阵.

第二章　矩阵的分解

矩阵分解理论对推动近代矩阵理论的研究和发展起到了关键的作用. 它也是矩阵计算中一种常用的方法和手段. 所谓矩阵分解,就是将一个矩阵写成结构比较简单的或性质比较熟悉的另一些矩阵的乘积或和. 在本章中我们主要讨论几种常用的矩阵分解.

第一节　矩阵的 LU 三角分解

对一个给定的 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,可以用矩阵的行初等变换把该矩阵化成上三角矩阵,即采用按自然顺序进行消元. 其步骤如下:

记

$$A=A^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^{(1)} & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix},$$

如果第一个主元素 $a_{11}^{(1)}\neq 0$,令 $l_{i1}=\dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}(i=2,3,\cdots,m)$,则分别从第 i 行减去第 1 行的 l_{i1} 倍,可将第一列从第 2 到第 m 个元素化为零. 这时消元矩阵为

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & O \\ -l_{21} & 1 & & & \\ -l_{31} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -l_{m1} & & O & & 1 \end{pmatrix},$$

令

$$A^{(2)} = L_1 A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

当 $a_{22}^{(2)} \neq 0$,以此类推.假设消元已完成 $k-1$ 步$(1 \leqslant k-1 \leqslant r-1, r = r(A))$,得到

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & a_{k+1k}^{(k)} & \cdots & a_{k+1n}^{(k)} \\ & & \vdots & & \vdots \\ O & & a_{mk}^{(k)} & \cdots & a_{mn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

不妨假设在消元过程中,总有 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. 于是令

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad i = k+1, \cdots, m,$$

则令第 k 步的消元矩阵为

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & O \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ O & & -l_{mk} & & O & 1 \end{pmatrix},$$

即有

$$A^{(k+1)} = L_k A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & a_{k+1k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1n}^{(k+1)} \\ & & a_{k+2k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+2n}^{(k+1)} \\ & & \vdots & & \vdots \\ O & & a_{mk+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{mn}^{(k+1)} \end{pmatrix},$$

不断重复以上过程，直至完成第 r 步. 此时得到

$$A^{(r+1)} = L_r A^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & a_{rr}^{(r)} & \cdots & a_{rn}^{(r)} \\ & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ O & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

递推写出上述所有消元矩阵及消元过程，即

$$L_r L_{r-1} \cdots L_1 A = A^{(r+1)},$$

所以

$$A=(L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{r-1}^{-1}L_r^{-1})A^{(r+1)}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & & & & & O \\ l_{21} & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & 1 & & \\ l_{r+11} & \cdots & \cdots & l_{r+1r} & 1 & \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \\ l_{m1} & \cdots & \cdots & l_{mr} & O & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & a_{rr}^{(r)} & \cdots & a_{rn}^{(r)} \\ & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

记

$$L=\begin{pmatrix} 1 & & & O \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & 1 \\ l_{r+11} & l_{r+12} & \cdots & l_{r+1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mr} \end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ O & & u_{rr} & \cdots & u_{rn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & \ddots & & & \vdots \\ O & & a_{rr}^{(r)} & \cdots & a_{rn}^{(r)} \end{pmatrix},$$

则得

$$A=(L,*)\begin{pmatrix} U \\ O \end{pmatrix}=LU,$$

上式通常称为矩阵 A 的 LU 分解.

注意:这里要求矩阵 A 的 LU 分解中 U 的主对角元 $u_{ii}\neq 0(1\leqslant i\leqslant r)$.

显然

$$U=\begin{pmatrix} u_{11} & & & O \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & u_{rr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \frac{u_{13}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \frac{u_{23}}{u_{22}} & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & & \vdots \\ O & & 1 & \cdots & \frac{u_{rn}}{u_{rr}} \end{pmatrix}=D\overline{U},$$

其中

$$D=\operatorname{diag}(u_{11},u_{22},\cdots,u_{rr}),\overline{U}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \frac{u_{13}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \frac{u_{23}}{u_{22}} & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & & \vdots \\ O & & 1 & \cdots & \frac{u_{rn}}{u_{rr}} \end{pmatrix},$$

于是

$$A = LU = AD\overline{U},$$

称上式为 A 的 LDU 分解.

定义 2.1.1 我们称矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & O \\ l_{21} & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & 1 & & \\ l_{r+11} & l_{r+12} & \cdots & l_{r+1r} & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mr} & O & 1 \end{pmatrix}$$

为单位下三角矩阵. 而称矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & O \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & 1 \\ l_{r+11} & l_{r+12} & \cdots & l_{r+1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mr} \end{pmatrix}$$

为广义单位下三角矩阵. 类似的有单位上三角矩阵和广义单位上三角矩阵.

注意 (1) 在上述分解过程中,我们总假设 $a_{kk}^{(k)}$ 非零,否则上述消元过程无法进行. 即是说一个矩阵的 LU 分解并不一定存在. 而有些矩阵在进行到某一步后才能发现它的 LU 分解并不存在.

(2) 当一个矩阵 A 的 LU 分解存在时,若不要求 L 是广义下三角矩阵时,一般来说这种分解不是唯一的. 这是因为如果 $A = LU$ 为 A 的一个 LU 分解,则对任意的可逆对角阵 D,$A =$

$(LD)(D^{-1}U)=\widetilde{L}\widetilde{U}$,其中 $\widetilde{L},\widetilde{U}$ 也分别是下、上三角矩阵,因此它也是 A 的一个 LU 分解. 今后谈到一个矩阵的 LU 分解时,总要求 L 是广义下三角矩阵,U 的主对角元 $u_{ii}\neq 0(1\leqslant i\leqslant r)$.

一个矩阵满足什么条件才存在 LU 分解?下面定理回答了这个问题.

定理 2.1.1　设 $A\in F^{m\times n}$,$r(A)=r$,则 A 存在 LU 分解($A=LU$) 的充要条件是 A 的前 r 阶顺序主子式 $|A_k|\neq 0(1\leqslant k\leqslant r)$. 其中:

$$L=\begin{pmatrix} 1 & & & O \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & 1 \\ l_{r+11} & l_{r+12} & \cdots & l_{r+1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mr} \end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ O & & u_{rr} & \cdots & u_{rn} \end{pmatrix}$$

其中 $u_{ii}\neq 0(1\leqslant i\leqslant r)$.

证明　充分性是显然的,这是因为对 A 进行分解时只用到消法变换,由行列式的性质知,消法变换不改变矩阵顺序主子式的值. 因此,