QIANWANGEKEXUEGUSHI

千万个

林 力 主编

科学故事

新世纪版

时代文艺出版社

千万个科学故事

（数学故事）

下

编著　章鹏

时代文艺出版社

目　　录

直觉不能解题

数学是十分严谨的，因而由不得半点马虎——大意了，就要出差错——即使是对大数学家而言也是如此（数学史上是不乏其例的）。

“四色定理”（平面或球面上的图形仅用四种颜色即可使得任何相邻的区域分辨开）是一个看来很简单的定理，直至1978年才有人凭着大型电子计算机的帮助将它证出（花了1200小时机上时间）。19世纪末，当德国数学家闵可夫斯基在苏黎士大学给研究生们讲课时，草率地谈起了这个定理说：“它之所以没有被证出来，是由于世界上最著名的数学家没有去考虑它。”说完他大笔一挥在黑板上演证起来。他本想一挥而就，轻松地解决这个问题，但事与愿违，他写了满满几黑板，发现头绪越来越乱——最后“挂”了黑板。

下面的几个小问题看上去非常容易，但请你经仔细考虑后再回答，不然也会出错的。

还剩几个角

这个问题可能是“老生常谈”了：一个正方形的木板，锯下一个角，还剩几个角？

当然答还剩三个角显然不对；还剩五个角对吗？其实也不全对，不信请您看看下图，然后自己写出答案来。

请你再考虑：一个长方体木块锯去一个“角”后还剩几个“角”？(答案有四种)

(阴影系锯去的部分)

小华骑车准备进城买东西，他家离城 10 里。去时正赶顶风，每小时需要只能骑 10 里；回来时他想正好顺风快点骑。那么他每小时行多少里才能使他往返的平均速度达到每小时 20 里？

初一看，似乎返程时他的速度只要达到每小时 30 里就行！又错了。那么到底要骑多快才行？我们还是算算看。

设返程速度为每小时 v 里，依题意有：

$$20\times\left(\frac{10}{10}+\frac{10}{v}\right)=10\times2,$$

即 $1+\frac{10}{v}=1$ 或 $\frac{10}{v}=0$,

那么 v 应该等于多少？等于多少都不行，这是没法达到的平均！

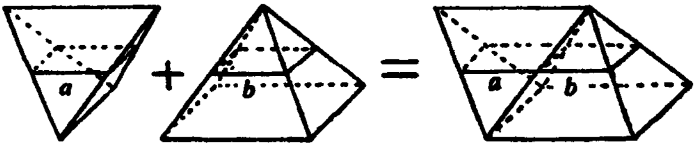
还剩几个面

一个正三棱锥和一个正四棱锥的侧面形状全等，当把这两个几何体以侧面为基准粘合在一起后，还露出几个面？

你准会脱口说道，七个，其实是五个。说起来这里还有一段小故事呢！

这道问题是 1982 年美国“初等学术能力测验”的一个题

目，全美共有 83 万中学生参加。题目的标准答案有 7 个，然而 17 岁的丹尼尔·路文的答案却是 5 个。事后路文自己动手做了模型，证明了自己的结论——主考机关最后只得宣布路文的答案是对的。道理在哪儿呢？请见下图。



如图，对正三棱锥而言，凡与任意两条不相邻的棱平行的截面都是矩形；对正四棱锥而言，凡与它底面平行的截面都是正方形。现通过棱的中点分别取两个这样的截面。则当两个棱锥重合于一个侧面后，这两个截面在重叠面上的两条边也正好重合，而另两条边（如图中 a、b）都在原正四棱锥的底的平行平面内，且夹角为 180°，所以 a、b 边所在同侧的两个侧面是共面的。

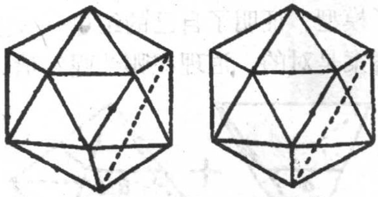
同理可知与它相对的另两个同侧侧面也共面。

这样两棱锥重叠一个侧面后共消失了 2＋（4－2）＝4 个暴露面，仅剩下 9－4＝5 个暴露面。

错了 50 年的会徽

最后我们想讲一个小故事。美国数学会是一个在国际上很有影响的数学研究组织，它有 19500 名会员。1942 年美国数学会所办的杂志《美国数学月刊》上刊载了美国数学会会徽（见下图），圆圈内是一个正 20 面体，对于它的权威性好像无人怀疑。

五十多年以后，美国华盛顿大学的 55 岁的布兰高·格林鲍



错误的　　正确的

华（南斯拉夫出生的美国人）从民主德国的邮票上发现其正20面体图案有误，他进而想到美国数学会会徽图案的讲究，他自己惊呆了——那也是一个有误的图案。

注意上图中的正三角形有箭头的那条边，应该与图中虚线平行才正确，可会徽上的这两条线却不平行（现在此图案已经改正）。

阿基米德与皇冠的故事

古希腊的大物理学家、数学家阿基米德，一次他接受了皇帝的一个命令。这个命令就是要阿基米德鉴别一下新做的皇冠是不是在金子中掺入了银子。但不可以对皇冠有一丝的损坏。

现在已知该皇冠重量为 12 磅。阿基米德用一块与皇冠有同等重量的纯金（12 磅）和另一块纯银（12 磅）称一称它们在水中的重量。他发现纯金减少 19 赖脱（1 磅 = 32 赖脱），纯银减少 $28\frac{1}{2}$赖脱后又把皇冠浸入水中去称，结果减轻 $21\frac{1}{4}$赖脱。此时，很明显，阿基米德知道，这顶皇冠在制造时是掺入了银子的。现在还要计算出掺入的银子是多少，纯金又是多少？

以下就是阿基米德的计算方法与结果。

设皇冠内有纯金 x 磅，掺入纯银 y 磅。则题设知，$x+y=12$………（1），又由试验知，1 磅纯金在水中减轻$\frac{19}{12}$赖脱。所以 x 磅纯金在水中应减轻$\frac{19}{12}x$ 赖脱。同样，y 磅纯银在水中应减轻$\frac{28\frac{1}{2}}{12}y$ 赖脱。于是得到$\frac{19}{12}x+\frac{28\frac{1}{2}}{12}y=21\frac{1}{4}$………（2）联立解（1）、(2)

$$\begin{cases} x+y=12 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{19}{12}x+\dfrac{28\frac{1}{2}}{12}y=21\dfrac{1}{4} \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

将（2）式化简 得　$38x+57y=510 \cdots\cdots (3)$

将（1）乘 38 得　$38x+38y=456 \cdots\cdots (4)$

（3）－（4）　　得　$19y=54$。

$$\therefore y=\frac{54}{19}=2\frac{16}{19}$$

代入（1）式　得　$x=12-2\frac{16}{19}=9\frac{3}{19}$。

故得

$$\begin{cases} x=9\dfrac{3}{19}\text{（磅）} \\ y=2\dfrac{16}{19}\text{（磅）} \end{cases}$$

所以阿基米德经过以上鉴别，解联立方程便知道，皇冠含有纯金 $9\frac{3}{19}$磅，纯银 $2\frac{16}{19}$磅。也就是说，在制作金冠时掺入了纯银 $2\frac{16}{19}$磅。

陛下知道了这个结果后，觉得阿基米德是个非常聪明的人，称赞他为国内最聪明的人之一。

这个古老的皇冠鉴别问题，在过去的确是一个难题。但对于今天来说，凡具有初中文化程度的人都能轻松地把它解决了。大家不都是最聪明的人了吗？

墓碑上的数字

在众多的数学家中，被称为“代数学鼻祖”的丢番图（Diophante 246~330）是公元三世纪亚历山大里亚城人，他的名著《算术》是一部能与欧几里得（Euclid，公元前330~前275）的《几何原本》相媲美的代数学的最早著作。丢番图的墓碑文是很奇特的，用一种未知的方式写出了已知的一生：

“过路人！这儿埋着丢番图的骨灰，下面的数目可以告诉你他活了多少岁。”

“他生命的六分之一是幸福的童年。”

“再活十二分之一，颊上长出了细细的胡须。”

“又过了生命的七分之一他才结婚。”

“再过五年他感到很幸福，得到了一个儿子。”

“可是这孩子光辉灿烂的生命只有他父亲的一半。”

“儿子死后，老人在悲痛中活了四年，结束了尘世生涯。”

“请问：丢番图活了多少岁？几岁结婚，几岁有孩子？”

这段墓文是历史留给后人关于这位学者平生的惟一信息。根据这一信息我们可以列出方程：

$$\frac{X}{6}+\frac{X}{12}+\frac{X}{7}+5=\frac{X}{2}-4$$

解得 X=84。即丢番图享年84岁。他33岁结婚，38岁得子。

尽管人们对丢番图的生平知道不多，但对他的学术造诣却甚为了解。特别是丢番图关于二次不定方程的巧妙解答，更让

后人叹为观止。下面举的勾股数组便是简单一例。

众所周知，我国是世界上最早发现勾股定理的国家。早在公元前 1100 年，我国的劳动人民就已经掌握了勾三、股四、弦五的规律，在两千年前成书的《周髀算经》中，还有一张勾股定理的证明图，叫“弦图”。

勾股定理的一般表述是这样的：假设 x，y 是一个直角三角形的两条直角边长，z 是斜边长，那么这三个数必须满足：

$$x^2+y^2=z^2$$

西方最早发现这个定理的，是古希腊的毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前 580 ~ 前 500）。他除证明之外，还找到了下面的求勾股数组的式子：

$$\begin{cases} x=n \\ y=\dfrac{1}{2}\ (n^2-1) \\ z=\dfrac{1}{2}\ (n^2+1) \end{cases} \qquad (n\text{ 为正奇数})$$

后来另一个古希腊的杰出学者柏拉图（Platon，公元前 427 ~ 前 347）也给出了相似的式子。

丢番图发现，不管是毕达哥拉斯还是柏拉图的式子，都没能给出完整的勾股数组，例如 8，15，17 三数就不在毕达哥拉斯的式子中。于是丢番图致力于找寻构造勾股数的一般法则。丢番图找到的这种法则是：若 a、b 是两个正整数，且 2ab 是完全平方，则

$$\begin{cases} x=a+\sqrt{2ab} \\ y=b+\sqrt{2ab} \\ z=a+b+\sqrt{2ab} \end{cases}$$

是一组勾股数。

丢番图究竟是怎样找到这些式子的，我们今天已无从得知，但读者完全可以验证它们满足于方程

$$x^2 + y^2 = z^2$$

用丢番图的方法，我们可以得到最前面的几组勾股数是：

a	b	$x^2 + y^2 = z^2$
1	2	$3^2 + 4^2 = 5^2$
1	8	$5^2 + 12^2 = 13^2$
2	4	$6^2 + 8^2 = 10^2$
1	18	$7^2 + 24^2 = 25^2$
2	9	$8^2 + 15^2 = 17^2$
3	6	$9^2 + 12^2 = 15^2$
1	32	$9^2 + 40^2 = 41^2$
2	16	$10^2 + 24^2 = 26^2$
…	…	…

丢番图的功绩在于，他所找到的式子中包含了全部的勾股数组。特别值得一提的是，与丢番图同时期的我国魏晋时期的数学家刘徽，用几何的方法找到了以下勾股数组的公式：

$$\begin{cases} x = uv \\ y = \dfrac{1}{2}\ (u^2 - v^2) \\ z = \dfrac{1}{2}\ (u^2 + v^2) \end{cases} \qquad \text{（u、v 为同奇偶的正数；且 u > v）}$$

这一结果记载于公元 263 年刘徽对一部古籍算书的注释本中。这是迄今为止人类对于勾股数组的最为完整的表示法之一。