



彭勇行 李政兴 编著

线性代数 大讲堂

单项选择题专项突破



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS



线性代数大讲堂

单项选择题专项突破

彭勇行 李政兴 编著



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

© 大连理工大学出版社 2005

图书在版编目(CIP)数据

线性代数大讲学·单项选择题专项突破 / 彭勇行, 李政兴
编著. — 大连: 大连理工大学出版社, 2005. 8

ISBN 7-5611-2973-4

I. 线… II. ①彭… ②李… III. 线性代数—研究生
入学考试—自学参考资料 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 089748 号

大连理工大学出版社出版

地址: 大连市凌水河 邮政编码: 116024

电话: 0411-84708842 传真: 0411-84701466 邮购: 0411-84707961

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸: 140mm × 203mm 印张: 8.5 字数: 311 千字

印数: 1 ~ 6 000

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑: 吴孝东

责任校对: 冯建

封面设计: 宋蕾

定 价: 12.80 元

卷首感言



大学是人一生中最为关键的阶段。从入学的第一天起,你就应当对大学四年有一个正确的认识和规划。为了在学习中享受到最大的快乐,为了在毕业时找到自己最喜爱的工作,每一个刚进入大学校园的人都应当掌握七项学习:学习自修之道、基础知识、实践贯通、兴趣培养、积极主动、掌控时间、为人处事。只要做好了这七点,大学生临到毕业时的最大收获就绝不会是“对什么都没有的忍耐和适应”,而应当是“对什么都可以有的自信和渴望”。只要做好了这七点,你就能成为一个有潜力、有思想、有价值、有前途的、快乐的毕业生。

数学是理工科学生必备的基础。很多学生在高中时认为数学是最难学的,到了大学里,一旦发现本专业对数学的要求不高,就会彻底放松对数学知识的学习,而且他们看不出数学知识有什么现实的应用或就业前景。但大家不要忘记,绝大多数理工科专业的知识体系都建立在数学的基础之上。例如,要想学好计算机工程专业,那至少要把离散数学(包括集合论、图论、数理逻辑等)、线性代数、概率统计和数学分析学好;要想进一步攻读计算机科学专业的硕士或博士学位,可能还需要更高的数学素养。同时,数学也是人类几千年积累的智慧结晶,学习数学知识可以培养和训练人的思维能力。通过对几何的学习,我们可以学会用演绎、推理来求证和思考的方法;通过学习概率统计,我们可以知道该如何避免钻进思维的死胡同,该如何让自己面前的机会最大化。所以,大家一定要用心把数学学好,不能敷衍了事。学习数学也不能仅仅局限于选修多门数学课程,而是要知道自己为什么学习数学,要从学习数学的过程中掌握认知和思考的方法。

虽然我一向鼓励大家追寻自己的兴趣,但在这里仍需强调,生活

中有些事情即便不感兴趣也是必须要做的。例如，打好基础，学好数学、英语和计算机的使用就是这一类必须做的事情。如果你对数学、英语和计算机有兴趣，那你是幸运儿，可以享受学习的乐趣；但就算你没有兴趣，你也必须把这些基础打好。打基础是苦功夫，不愿吃苦是不能修得正果的。

~~~~~

经过大学四年，你会从思考中确立自我，从学习中寻求真理，从独立中体验自主，从计划中把握时间，从交流中锻炼表达，从交友中品味成熟，从实践中赢得价值，从兴趣中攫取快乐，从追求中获得力量。

~~~~~

离开大学时，只要做到了这些，你最大的收获将是“对什么都可以拥有的自信和渴望”。你就能成为一个有潜力、有思想、有价值、有前途的中国未来的主人翁。

李开复

2005年2月

——摘自：“给中国学生的第四封信：大学四年应是这样度过”

前 言

硕士研究生入学统一考试的数学试题主要有三种题型,即填空题、单项选择题和解答题(包括计算题、应用题和证明题)。其中单项选择题是数学试题的三种主要题型之一。本套丛书是按照全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》编写的考研参考书,专门介绍单项选择题,分为三册:高等数学(含微积分和空间解析几何)、线性代数、概率论与数理统计。

鉴于选择题特有的考核功能,即是考查基本概念、基本理论和逻辑推理能力的有效题型,选择题在硕士研究生入学统一考试数学试卷中所占比重比过去明显加大。按照教育部制订的《数学考试大纲》要求,目前单项选择题的题量已经增至8题,分值也已经超过试卷总分的1/5。因此,了解单项选择题的特点和功能,掌握其常用的解题方法(直选法和排除法);熟悉历年硕士研究生入学统一考试数学试卷选择题常考题型的解题方法和技巧,强化备考的知识、能力和基本方法,对于考生迅速、准确地做好选择题,争取满意的考试成绩是十分必要的。为此,我们编撰了这本《线性代数大讲堂·单项选择题专项突破》。本书可以作为经济类、管理类和工学类各专业报考硕士研究生的学习指导书,也可以作为相关专业在校大学生学习线性代数的参考书。

本书根据全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》,以及经济类、管理类和工学类线性代数教学大纲编撰。在编撰中,参考了大量有关教材和资料,汇集了作者在长期教学和多年命题工作中积累的大量试题。本书是按照《数学考试大纲》的章节顺序编写的,全书各章分为4个部分。第1部分是“概念、性质和公式”,按照考试大纲要求,简明扼要地归纳和总结了有关概念、性质、公式和基本方法,目的是使考生能在较短时间内复习和掌握有关重点及热点问题。第2部

分是“典型例题分析”，编选了历年硕士研究生入学统一考试数学试卷中的线性代数选择题，精选了部分考研辅导中的典型试题，讲解和分析了这些试题的解题方法和技巧，并结合试题分析了有关知识点的内在联系，有利于读者开阔解题思路，提高解题能力。第3、4部分，根据考试大纲和近年考研试题的变化趋势，精选了适量的习题，并给出分析和解答，便于读者复习自测。

本书第1~3章由李政兴教授编撰，致读者，第4~6章由彭勇行教授编撰。最后，由彭勇行统稿和总纂。限于笔者水平，本书难免有不足和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编著者
2005年8月

致读者

—— 选择题的考核功能及解题方法

选择题是全国硕士研究生入学统一考试数学试卷的三种题型之一。按照 2005 年数学考试大纲要求,选择题与填空题一共约占卷面分数的 40%。根据历年研究生入学考试试卷分析,选择题的试题数量,已由 2004 年之前的 5 题,增加到现在的 8 题。其分数值由 100 分制每题 3 分共 15 分,增加到 150 分制的每题 4 分共 32 分。考试内容涵盖微积分、线性代数和概率统计三门学科,基本形式是四选一的单项选择题。尽管选择题在整个试卷中所占比例仅为 $1/5$ (约占 21.3%),但由于选择题特有的考核功能,即能够考核对基本概念的理解程度,考核对基本理论的理解、分析和应用能力,具有一定难度,其考核功能与其他类型试题难以替代的。因此,认识选择题的特点,了解选择题的考核功能,掌握选择题的常用解题方法,对于考生迅速、准确作好选择题,为其他类型试题留下充足的思考和解答时间,争取满意的考试成绩是至关重要的。

① 选择题的特点

硕士研究生入学统一考试的题型主要是填空题、选择题和解答题(包括计算、应用和证明题)三种,其中填空题和选择题称为主观性试题,由于答案惟一,评分不受主观因素影响,能较客观地反映考生的水平。解答题称为主观性试题,考生根据题设条件和要求,进行计算、分析和论证。由于解答不惟一,评分受主观因素影响,存在一定程度的主观性误差。主观性试题目前仍是各类数学考试的传统题型。

选择题由题干和若干选项组成,符合试题要求的选项称为正确选项,其余选项称为干扰项。正确选项只有一个的选择题,称为单项选择题。正确选项有多个的选择题,称为多项选择题。目前,硕士研究生入学统一考试的选择题,均为四选一的单项选择题。

数学考试中的选择题,大致可以分为三类。第一类是计算性的选择题,第二类是概念性的选择题,第三类是理论性的选择题。计算性选择题是计算题的变异形式,主要考核基本方法、运算能力和某些典型计算错误。由于其考核功能可以通过填空题和计算题实现,在研究生入学统一考试中一般较少采用。概念性选择题主要考核对基本概念的定义和本质属性的理解,概念内涵和外延的理解

和掌握。理论性选择题主要考核对基本定理、性质、法则和公式的条件与结论的理解和掌握,并考核分析、判断、类比、归纳等逻辑思维能力。第二类 and 第三类选择题涉及概念、定理的各种变式,迷惑性较强,难度较大,全国硕士研究生入学考试的选择题多属此类。

选择题有以下几个特点。

第一,选择题考核的知识点应该是考试大纲规定的基本概念和基本理论,并且也是教学的重点和难点,这些都是考生必须掌握而又不容易掌握的内容。

第二,选择题具有形式和逻辑关系的统一性,在分析知识点所涉及的基本概念的内涵和外延,基本定理的条件和结论的基础上,试题的题干和选项在形式和逻辑关系上相统一。题干和四个选项之间形式上存在合乎逻辑的推理关系,选项之间一般要求有相似的语言结构,使得选择题具有一定逻辑推理能力的考核功能。

第三,干扰项设置具有一定的迷惑性。选择题干扰项设置不应该是简单的错误选项拼凑,应充分注意考生对基本概念和基本定理认识和识记过程中,容易出现的歧见和模糊,紧扣概念的内涵和外延,定理的条件和结构。通常将概念的内涵和外延稍作变化,对定理的条件和结论略加修改,暗中设置一时不易辨别的错误,使得选择题具有辨识和诊断概念性和理论性错误的考核功能。

② 选择题的考核功能

2.1 考核对基本概念理解的程度

概念是数学教学的基础。数学基本理论的建立,数学运算、逻辑推理等能力无一不是以明确、清晰的概念为基础。概念是事物本质属性的反应,数学概念通常是以定义形式给出,包括概念的内涵和外延部分。所谓概念的内涵是指概念所反映的事物的本质属性,概念的外延是指适合这个概念的一切对象,即概念的适用范围。概念明确,就是概念的内涵明确,概念的外延也明确。概念性选择题主要考核对基本概念的理解和掌握,对概念内涵和外延的理解和掌握,明确概念种和属的区别和联系,选择题针对概念的内涵和外延,设计一些变异形式的迷惑选项,考核对概念理解和掌握的程度。一道选择题往往涉及若干概念,只有深刻理解各个概念的本质和关系,才能以清晰的逻辑关系辨别出正确和错误的选项。

【例 1】 (940503) 设 A, B 都是 n 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 A 和 B 的秩 ()

- | | |
|------------------------|------------|
| A. 必有一个等于零 | B. 都小于 n |
| C. 一个小于 n , 一个等于 n | D. 都等于 n |

分析 本题是概念性的选择题。解答此题涉及到以下基本概念和知识点:

- (1) 矩阵秩的概念和性质;
- (2) 基础解系的概念和性质;
- (3) 齐次线性方程组的解和性质。

要求考生清楚理解矩阵秩、基础解系和齐次线性方程组解等概念,并以这些概念作为基础进行正确推理,才能在四个选项中选出正确答案。解答本题的关键是在关系式 $AB = O$ 中,把矩阵 B 的列向量视为齐次线性方程组 $Ax = O$ 的解。同时,在关系式 $B^T A^T = O$ 中,把 A^T 的列向量,即 A 的行向量视作齐次线性方程组 $B^T x = O$ 的解。从而得到, $r(B) \leq n - r(A)$, $r(A) = r(A^T) \leq n - r(B^T) = n - r(B)$ 。再根据题设 A, B 都是非零矩阵,推出 A 和 B 的秩都小于 n 的正确选项。

对于部分考生,解答此题存在一定难度。究其原因,第一,考生必须对矩阵秩、基础解系和齐次线性方程组解等概念及其相互关系有较深的理解,一道选择题涉及若干概念,无疑是一个不低的要求。第二,本题的关键,是将矩阵 B 和 A^T 的列向量视为齐次线性方程组的解,由关系式 $AB = O$ 联想到齐次线性方程组 $Ax = O$ 和 $B^T x = O$ 的解与矩阵秩的关系,这本身在逻辑思维上就存在一定跨度,要求考生有较强的逻辑推理能力,这正是本题存在一定难度的原因。第三,干扰项的设计与正确选项,都是以矩阵 A, B 的秩与数 $n, 0$ 关系的形式出现。判断和推理中,仅考虑矩阵 A 的秩是不够的,而判断矩阵 B 的秩需要转置,并不直截了当,这就进一步增加了试题的迷惑性和难度。仅此一道 3 分的选择题,考核了若干线性代数的基本概念,齐次线性方程组存在非零解的充要条件,并考核了应用这些概念进行推理判断的能力。

对于基础较好的考生,根据题设条件和已知关系式:秩 $(A) +$ 秩 $(B) \leq n$, 推导出 A 和 B 的秩都小于 n 的结论。也可以 $AB = O$ 和排除法选出正确选项。

说明 本题经实测,难度为 0.49。

 **注意** 为了能简洁地传递考研信息,本书中对所选用的历年考研真题采用“年代/类别/分值”的标注方式。如本题中的“940503”表示 1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学(五)试卷分值为 3 分的试题。

2.2 考核对基本理论掌握的程度

数学的基本理论,通常是以定理、性质、法则、公式等形式表示。掌握这些基本定理、性质、法则和公式,必须明确它们的适用范围,条件和结论是什么。条件对于结论是充分的、必要的,还是既充分又必要的,为了考核对基本理论掌握的程度,根据考试大纲的不同层次要求,设计各种不同形式的理论性选择题,或改变它们的适用范围,或将命题的条件稍加变化,或将命题的结论略作修改,或将条件的充分性和必要性作适当调整,编制变化多样,形式各异的选项,在具有迷惑和干扰性的推理过程中,测试考生对基本理论的掌握程度。

【例 2】(970403) 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 中未知量个数为 n , 方程组个数为 m , 系数矩阵 A 的秩为 r , 则 ()

- A. $r = m$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有解
- B. $r = m$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有惟一解
- C. $m = n$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有惟一解
- D. $r < n$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解

分析 本题是理论性选择题, 主要考核对非齐次线性方程组解的存在定理掌握的程度。解答本题涉及到以下知识点:

- (1) 非齐次线性方程组有解的必要充分条件;
- (2) 矩阵秩的概念和性质;
- (3) 非齐次线性方程组的解与系数矩阵的秩、未知量个数之间的关系。

本题要求考生掌握非齐次线性方程组解的存在定理, 理解矩阵秩的概念和性质, 并对非齐次线性方程组解的个数与矩阵秩 r 、未知量个数 n 三者之间的关系十分清楚。由条件 $r = m$ 推出秩 $(A) = \text{秩}(Ab)$, 才能作出正确判断, 找出正确选项(A)。本题编制基于非齐次线性方程组解的存在定理, 对定理的条件和结论作了适当处理, 给出题干和选项, 其要求又高于对存在定理的理解和掌握。究其原因, 其一, 在题干中仅给出系数矩阵 A 的秩为 r , 没有明确指出增广矩阵的秩, 要求考生思考系数矩阵与增广矩阵秩的关系。否则, 容易形成推理判断中的思维障碍。其二, 在选项中给出系数矩阵的秩 r 与行数 m 、列数 n 的几种关系, 要求考生根据矩阵秩的概念和性质, 由条件 $r = m$ 推出秩 $(A) = \text{秩}(Ab)$, 对于部分考生这也是一种不低的要求。其三, 在选项设计中, 注意到考生在判定线性方程组有解、有惟一解或无穷多个解的存在条件时, 容易产生的模糊和错误, 要求考生掌握有解的判定条件和内在联系。由于试题对存在定理的条件和结论作了适当的变化, 增加了考核功能的强度和综合性。

本题经实测, 难度为 0.43。

2.3 考核对分析、判别等逻辑思维能力的训练程度

数学是一门逻辑性很强的学科, 常被誉为训练思维的体操。全国硕士研究生入学考试数学考试大纲明确指出, 要求考生具有逻辑推理能力。逻辑推理包括相关的逻辑知识和推理方法。逻辑知识诸如概念、定义、分类、命题、定理、条件、结论等, 推理方法诸如观察、分析、综合、比较、抽象、演绎、类比等。要求考生应用相关知识和方法进行抽象概括、推理分析。同样, 选择题具备考核逻辑思维能力训练程度的功能。特别在容易出现概念和方法模糊性错误方面, 测试考生的分析、比较、判别等逻辑思维能力, 选择题具有其他题型难以替代的功能。

【例 3】(950403) 设矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩为 $r(A) = m < n$, E_m 为 m 阶单位矩阵, 下述结论正确的是 ()

- A. A 的任意 m 个列向量必线性无关
- B. A 的任意一个 m 阶子式不等于零
- C. 若矩阵 B 满足 $BA = O$, 则 $B = O$
- D. A 通过初等行变换, 必可化为 (E_m, O) 的形式

分析 本题属于概念性和理论性相结合的选择題。除了考核基本概念和基本理论之外, 几个干扰项均是考生在推理中容易产生模糊和错误之处, 本题具有比较、分析、判别能力的测试功能。本题涉及的知识点:

- (1) 矩阵秩的概念及其判定;
- (2) 矩阵秩与其行、列向量组线性相关性之间的关系;
- (3) 矩阵的初等变换及性质;
- (4) 齐次线性方程组解的性质。

要求考生对矩阵的秩及其性质、矩阵初等变换及性质、齐次线性方程组解的性质有较深的理解和掌握, 才能作出正确的判断和选择。本题的关键, 在于理解齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解的充分必要条件, 是秩 (A) 等于未知量的个数。选项(C)中, 条件写成 $BA = O$, 通过转置得到 $A^T B^T = O$, 且秩 $(A^T) = \text{秩}(A) = m$ 。从而, 齐次线性方程组 $A^T x = 0$ 仅有零解, 推得 $B^T = O$ 。故 $B = O$, 选项(C)正确。干扰项(A), (B), (D) 具有较大迷惑性, 均是考生容易产生误判和模糊的地方。选项(A), (B), 要求考生理解矩阵的概念, 矩阵秩与矩阵的行、列向量组线性相关性之间的联系。秩 $(A) = m$, 未必 A 的任意 m 个列向量必线性无关, 未必 A 的任意一个 m 阶子式不等于零。选项(D) 要求考生对矩阵的初等变换与矩阵秩的关系有较深的理解, 初等行变换不改变矩阵的秩, 但化为标准形式之后, 其中单位矩阵 E_m 未必位于矩阵的前 m 列。本题题干部分, 给出矩阵 A 的行、列数分别为 m 和 n , 并一反常规, 设秩 (A) 等于行数 m , 这样可以将试题知识点的覆盖面扩大。在设置选项时, 不刻意追求形式结构上的工整对称, 而是紧扣矩阵秩的概念, 结合与其紧密相关的基本概念和基本性质, 结合考生容易产生的推理偏误, 其目的在于考核分析、比较和判断的逻辑思维功能。

● 本题经过实测, 难度为 0.21。

选择题的三个考核功能, 往往不是单独存在的。在同一试题中, 可以根据命题的实际需要, 强化某一方面或两个方面的考核功能, 综合交叉使用, 实现考试大纲规定考核目的。

③ 选择题的解题方法

考生了解选择题的特点、分类和考核功能, 对于做好选择题, 提高研究生入学考试成绩不无好处。选择题在全国硕士研究生入学统一考试试题中所占比例超过 1/5, 并且有一定难度, 如何做好选择题, 这是考生们共同关注的问题。如前所述, 硕士研究生统一考试中的选择题不同于其他类型考试, 以概念性和理论

性选择题为主,考核目的在于测试对基本概念、基本理论理解和掌握程度,测试逻辑推理能力训练程度。因此,做好选择题,要求考生打好三个基础,即知识基础、能力基础和方法基础。所谓知识基础,就是要求考生全面、深入了解和掌握考试大纲所规定的基本概念、基本理论和原理,并对相关概念和理论之间的有机联系融会贯通、灵活应用;所谓能力基础,就是要求考生强化训练考试大纲所规定的抽象思维、逻辑推理、综合应用知识等能力,能够深入敏捷思维、严格合理推演、迅速准确判断。具备良好的知识和能力基础,这是解好选择题的前提。所谓方法基础,通过反复训练、认真总结,比较熟练地掌握解答选择题的方法和技巧,做到快速准确、事半功倍,这是提高解题效率的有效途径。

解答选择题原则上不需要进行大量的演算和复杂的推证,为了迅速准确地判断选择,必要的演算和简捷的推理是必不可少的。对于四选一的单项选择题,如果确定某个选项正确,无须证明其他选项不成立。同样,如果确定某些选项错误,也无须证明正确选项成立。解答选择题通常有两种方法,一是直选法,通过推理或计算直接判断并选择正确选项;二是排除法,通过反例或逆推判断并排除错误选项,从而间接选择正确选项。在具体应用时,可以根据试题不同类型,交替综合使用,达到迅速、准确、便捷的目的。

3.1 直选法

直选法是从题设条件出发,应用有关概念、性质和定理,经过推理和演算,直接判断和确定正确选项的方法。对于概念性选择题,涉及常用性质、定理和公式的理论性选择题,或以并列命题形式给出的选择题,常用直选法分析判别。

【例 4】 (043404) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价,则必有 ()

- A. 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = a$
- B. 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = -a$
- C. 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B| = 0$
- D. 当 $|A| = 0$ 时, $|B| = 0$

分析 应选(D)。本题考查矩阵等价的概念和性质,利用 n 阶矩阵等价的概念,或者利用 n 阶矩阵等价的充分必要条件是秩相等的性质进行分析,立即得到正确选项。

因为 n 阶矩阵 A 与 B 等价,故存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $PAQ = B$ 。于是, $|P||A||Q| = |B|$ 。由于 $|P| \neq 0, |Q| \neq 0$, 故当且仅当 $|A| = 0$ 时, $|B| = 0$ 。所以,应选(D)。

或者由于 A 与 B 等价,则 A 与 B 有相同的秩。当 $|A| = 0$ 时,有 $r(A) < n$, 故 $r(B) < n$, 即有 $|B| = 0$ 。因此,应选(D)。

【例 5】 (050304) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值,对应的特征向量分别是 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是 ()

A. $\lambda_1 = 0$ B. $\lambda_2 = 0$ C. $\lambda_1 \neq 0$ D. $\lambda_2 \neq 0$

分析 应选(D)。本题考查矩阵特征值和特征向量的概念和性质、向量组线性相关性的概念等知识点,理解和掌握了这些概念和性质,不难直接推得正确选项。

由题设条件, α_1, α_2 是矩阵 A 的两个不同特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量,则 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$ 。设有数 k_1, k_2 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 于是, $k_1\alpha_1 + k_2(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 0$, 即 $(k_1 + \lambda_1k_2)\alpha_1 + \lambda_2k_2\alpha_2 = 0$ 。由于 α_1, α_2 线性无关,故有线性方程组

$$\begin{cases} k_1 + \lambda_1k_2 = 0 \\ \lambda_2k_2 = 0 \end{cases}$$

当且仅当系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$$

时,线性方程组仅有零解 $k_1 = k_2 = 0$ 。所以, $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是 $\lambda_2 \neq 0$ 。故应选(D)。

3.2 排除法

利用各种合理而有效的方法,将选项中不符合题设条件的错误选项,或者错误命题逐一排除,从而选出正确选项的解题方法称为排除法。常用排除错误选项的方法有以下几种。一是赋值排除,也称为反例排除。备选项中的结论或命题应该具备一般性,如果赋以结论或命题中某些元素特殊数值,明显看出结论不满足题设条件,或违背正确性质,或命题不成立,则结论或命题不正确,从而排除该选项。赋值排除是最常用的排除方法。二是验证排除,即代入排除。将备选项逐一代入题设条件进行验证,以其正确与否决定取舍。由于单项选择题需要对四个选项逐一验证之后才能确定惟一正确选项,因此验证排除之前,应该观察分析,先易后难,确定先后次序。尽管验证排除比较起来工作量较大,对于用具体形式给出的备选项,或题设条件适于验证计算的试题,验证排除仍是一种常用的方法。三是推演排除,应用有关概念、性质和定理,从题设条件出发,对各选项进行推理和演算,逐一将错误选项筛选出来加以排除。由于选择题只要迅速准确判别各选项的正确性,无须按部就班严格推证,所以推演排除多数考生较少采用。在实际解题中,赋值排除和验证排除经常依据试题实际,交替灵活使用,从而提高解题速度。

【例 6】 同例 4。

分析 本题宜用赋值排除。设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然, A 与 B 等价。对于 (A), $|A| = 2 \neq 0$, 但 $|B| \neq 2$, 故 (A) 不对, 应排除。对于 (B), $|A| = 2 \neq 0$, 但 $|B| \neq -2$, 故 (B) 不对, 应排除。对于 (C), $|A| \neq 0$, 但 $|B| \neq 0$, 故 (C) 不对, 应排除。

综上所述, 本题应选 (D)。

● 本题仅举一个反例, 就将三个错误选项排除。赋值排除列举的反例应力求数值简单、举一反三, 这样可以提高解题的速度。

【例 7】 同例 5。

分析 本题宜用验证排除。

由题设条件知, α_1, α_2 属于 A 不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 则 α_1, α_2 线性无关。由于 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$, 故向量组 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 即向量组 $\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ 。对于选项 (A), 向量组 $\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ 线性无关, 未必 $\lambda_1 = 0$ 。例如, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, 有 $\alpha_1, -\alpha_1 + \alpha_2$ 线性无关。故 (A) 不对, 应排除。对于 (B), 当 $\lambda_2 = 0$ 时, 则 $\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ 线性相关, 故 (B) 不对, 应排除。对于 (C), 当 $\lambda_1 \neq 0$ 时, 若 $\lambda_2 = 0$, 则 $\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ 线性相关, 故 (C) 不对, 应排除。

综上所述, 本题应选 (D)。

目 录

卷首感言

前言

致读者

第一章 行列式

概念、性质和公式	1
典型例题分析	5
习题一	23
参考答案及提示	27

第二章 矩阵

概念、性质和公式	40
典型例题分析	48
习题二	75
参考答案及提示	79

第三章 向量

概念、性质和公式	88
典型例题分析	93
习题三	113
参考答案及提示	117

第四章 线性方程组

概念、性质和公式	128
典型例题分析	132
习题四	151
参考答案及提示	158

第五章 特征值与特征向量

概念、性质和公式	173
典型例题分析	176
习题五	196
参考答案及提示	201

第六章 二次型

概念、性质和公式	216
典型例题分析	220
习题六	239
参考答案及提示	242