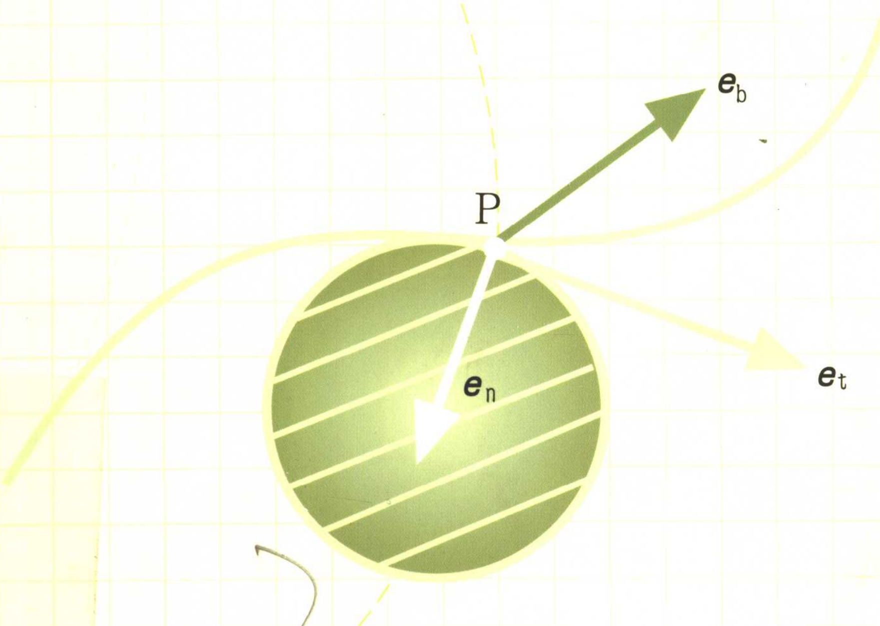
Concise Theoretical Mechanics

理论力学简明教程

周乐柱 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

理论力学简明教程

周乐柱　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

理论力学简明教程/周乐柱编著. —北京:北京大学出版社,2005.1
ISBN 7-301-08097-2

Ⅰ. 理…　Ⅱ. 周…　Ⅲ. 理论力学-高等学校-教材　Ⅳ. O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 108392 号

书　　　名:理论力学简明教程
著作责任者:周乐柱　编著
责 任 编 辑:孙　琰
标 准 书 号:ISBN 7-301-08097-2/O·0620
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者:北京高新特打字服务社　51736661
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
730 mm×980 mm　16 开本　14.25 印张　268 千字
2005 年 1 月第 1 版　2005 年 1 月第 1 次印刷
印　　　数:0001—3000 册
定　　　价:21.00 元

内 容 提 要

本书以经典力学的分析力学为主要内容.在运动学方面,先从普遍的曲线坐标系出发,导出质点速度和加速度的普遍公式,然后在基本矢量微商的基础上导出质点相对运动的运动学公式.在动力学理论方面,以拉格朗日动力学及其应用为主(第二章至第五章),同时简要介绍了哈密顿动力学(第六章),其中第三章至第五章从拉格朗日函数、拉格朗日方程及其初积分出发讨论了多自由度振动、有心运动和刚体动力学.在第七章中,从普遍的变分原理出发,导出了拉格朗日方程和哈密顿方程,体现出分析力学原理的多样性.本书在阐述经典力学原理的传统力学应用的同时,用实例强调了该原理在其他学科和现代科技中的应用,希望能扩展学生的眼界,提高学生的学习兴趣.

本书给出了一定数量的习题及相应的答案和提示,希望对自学者会有所帮助.

本书可作为普通高等院校理工科电子信息科学与技术专业的本科生的教材,也可供其他专业的学生参考,还可作为考研的辅导材料.

前　言

本书是编者从事力学和理论力学课程教学工作二十多年的总结.在多年的教学研究和实践活动中,我们逐步形成了这样的思想:第一,在高等院校理工科电子信息科学与技术专业本科生的若干专业中,必须加强基础物理和理论物理教育,但是不能占用太多的学时;第二,在经典力学的教学中,基础物理课程以矢量力学为主,理论力学课程以分析力学为主.本书的编写正是贯彻了这一思想,使学生能用较少的学时掌握分析力学的基本原理和方法,在抽象思维和理论分析方面得到一定的训练和提高.

在运动学方面,本书首先从普遍的曲线坐标系出发,导出质点速度和加速度的普遍公式,然后在基本矢量微商的基础上导出质点相对运动的运动学公式.

在动力学理论方面,本书以拉格朗日动力学及其应用为主,同时简要介绍了哈密顿动力学;还从普遍的变分原理出发,导出了拉格朗日方程和哈密顿方程,从而体现出分析力学原理的多样性.

本书的第三章至第五章讨论了多自由度振动、有心运动和刚体动力学.从内容上看,这是基础物理的重要补充,但是处理方法与基础物理不同,这里是从拉格朗日函数、拉格朗日方程及其初积分出发的.

本书在阐述经典力学原理的传统力学应用的同时,还用实例强调了经典力学原理在其他学科和现代科技中的应用.例如,在第三章中,联系电子学中的振动系统,突出了特征频率、特征模式的普遍性;在第四章中,结合开普勒方程,讲述了人造卫星星下点在地面的运动轨迹及其对通信的影响;在第五章中,从惯量张量推广到了普遍的各向异性的电磁材料;在第七章中,用例子说明了经典力学在电磁学、光学中的应用.希望这些联系和讲法能扩展学生的眼界,提高学生的学习兴趣.带 * 号的章节可选讲或作为学生进一步阅读的材料.

由于编者水平所限,本书的缺点和错误在所难免,恳切希望读者批评指正,以期进一步改进.

周乐柱

于北京大学燕北园

2004 年 6 月

目　　录

第一章　运　动　学

§1.1　质点运动学

1.1.1　基本概念

1. 质点、参考系和坐标系

(1) 质点

质点运动学研究的是如何描述质点的运动以及描述质点运动的物理量之间的关系.什么是质点呢?质点是其大小和形状可以略去不计而只具有一定质量的几何点.它是我们在研究实际物体运动时常采用的一种抽象化的模型.

实际物体总是具有一定的大小和形状,而且组成物体的各个部分的运动状态也不尽相同.在这种情况下,研究物体的运动就比较困难.但我们可以将物体看成是由许多小质点组成的.每个质点的运动研究清楚,整个物体的运动问题就比较容易解决了.

应该指出,实际物体能否看做是质点,关键不在其实际大小,而在于它所涉及的问题.例如地球,在讨论其公转时可以看做是质点,但在讨论自转时就必须考虑其大小和形状.又如电子,虽然很小,但在考虑其自旋运动时也不能看做是质点.另外,在很多问题中,我们对组成复杂物体系统的各部分的运动状态不感兴趣,仅对该物体系统总的运动状态感兴趣.这时引入质心的概念,把体系看做总质量集中在质心的一个质点.系统总的运动情况由质心的运动状态来表征,而质心的运动仅由作用于体系的外力决定.

(2) 参考系和坐标系

运动或静止只有相对的意义,因而要描述一个物体的运动,首先必须选定另外的物体作为观察和测量的标准.这个预先选定的、作为观测该物体运动标准的物体称为参考系(或参照系).对于参考系,必须强调两点:

① 对于物体在三维空间的运动,参考系必须是一个参考体,而不能是一个参考点.这个参考体必须是一个刚体.它反映了经典力学的空间是线性空间,可以在三个互相垂直的方向上无限延伸.

② 在运动学中,参考系的选择是完全任意的;而在动力学中,参考系则分为惯性参考系和非惯性参考系,其动力学方程有不同的表述,要根据问题的需要作适当的选择.

参考系选定后,物体的运动就完全确定了,但要定量地描述物体的运动,还需选择适当的、固定在参考系上的坐标系.常见的坐标系有直角坐标系、极坐标系、柱坐标系、球坐标系和自然坐标系等.

2. 位矢、位移、速度和加速度

(1) 位矢

参考系和坐标系确定后,质点 P 的位置可用起点作为坐标原点,终点由质点的矢量确定,称为位置矢量,简称位矢,记做 $\boldsymbol{r}$,如图 1-1 所示.质点的运动就用位矢随时间的变化来描述,即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t). \tag{1.1.1}$$

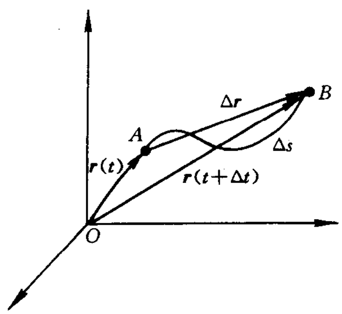


图 1-1　位矢、位移和路程

在数学上,式(1.1.1)给出了以时间 t 为参量的曲线方程,称为 P 点的运动方程.在给定的坐标系中,消去式(1.1.1)中的 t,就得到质点运动的轨迹方程.

(2) 位移

质点运动时,位置连续变化.在给定的时间间隔 Δt 内,连接质点初位置 A 到末位置 B 的矢量称为质点在 Δt 内的位移矢量,简称位移,记做 $\Delta\boldsymbol{r}$,如图 1-1 所示.显然有

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t). \tag{1.1.2}$$

位移之所以为矢量,不仅因为其有大小,有方向,而且还因为其相加满足平行四边形法则.

在曲线运动中,位移的大小与质点实际经过的路程 Δs 并不相同.位移仅与质点起、终点的位置有关,而路程不仅与其起、终点有关,还与轨迹曲线有关.但是,根据微分几何的理论,当末位置 B 无限趋向于初位置 A(即当 $\Delta t\to 0$)时,$|\Delta\boldsymbol{r}|=\Delta s$,且 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向就是轨迹曲线上 A 点的切线方向.

(3) 速度

位矢的时间变化率称为速度,记做 $\boldsymbol{v}$.若在给定的时间间隔 Δt 内,质点从初位置 $\boldsymbol{r}(t)$变到末位置 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$,则

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.1.3}$$

称为质点在 t 时刻的瞬时速度,简称速度.速度的大小称为速率.因位移是矢量,

故速度也是矢量.

(4) 加速度

速度的时间变化率称为加速度,记做 $\boldsymbol{a}$. 若在给定的时间间隔 Δt 内,质点的速度由 $\boldsymbol{v}(t)$ 变到 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$, 如图 1-2 所示,则

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{r}}\qquad(1.1.4)$$

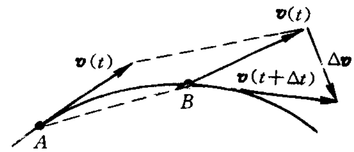


图 1-2　速度和速度的改变

称为质点在 t 时刻的瞬时加速度,简称加速度. 因速度是矢量,故加速度也是矢量.

1.1.2　位矢、速度和加速度在几种坐标系下的表达式

1. 直角坐标系

在直角坐标系中,基本矢量是 $\boldsymbol{e}_x$,$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$(即大小恒为 1、方向不随点的位置改变的常矢量,且是相互正交的,满足 $\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z$). 质点 P 的位置可用一组坐标(x,y,z)表示,如图 1-3 所示. P 点运动时, x,y 和 z 为时间 t 的函数,因而位矢可以表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_x+y(t)\boldsymbol{e}_y+z(t)\boldsymbol{e}_z.\qquad(1.1.5)$$

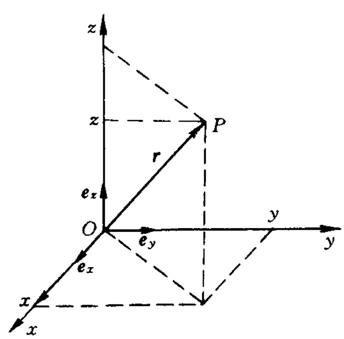


图 1-3　直角坐标系中的位矢

由式(1.1.3)～(1.1.5)可得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\boldsymbol{e}_x+\dot{y}\boldsymbol{e}_y+\dot{z}\boldsymbol{e}_z,\qquad(1.1.6)$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\ddot{x}\boldsymbol{e}_x+\ddot{y}\boldsymbol{e}_y+\ddot{z}\boldsymbol{e}_z.\qquad(1.1.7)$$

在推导式(1.1.6)和(1.1.7)的过程中,用到了基本矢量 $\boldsymbol{e}_x$,$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 是常矢量及其对时间的微商为零的条件. 由式(1.1.6)和(1.1.7)不难得到速率

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\qquad(1.1.8)$$

和加速度的大小

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}.\qquad(1.1.9)$$

请读者思考: a 与$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$是否相等?

2. 极坐标系

当质点做平面曲线运动(如有心运动)时,常采用极坐标系,如图 1-4 所示.

质点 P 的位置可用一组坐标 (ρ,φ) 表示，ρ 称为矢径，φ 称为极角. 在极坐标系中，基本矢量是 $\boldsymbol{e}_\rho$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$，其中 $\boldsymbol{e}_\rho$ 沿矢径方向向外，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 垂直于 $\boldsymbol{e}_\rho$ 并指向 φ 增加的方向. 显然，$\boldsymbol{e}_\rho$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 的方向随 P 点的位置而变化. 位矢可以表示为

$$\boldsymbol{\rho} = \rho \boldsymbol{e}_\rho, \tag{1.1.10}$$

代入式(1.1.3)得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t}. \tag{1.1.11}$$

问题是：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t}=$？ 导出 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t}$ 的方法有很多种，这里仅介绍其中的两种.

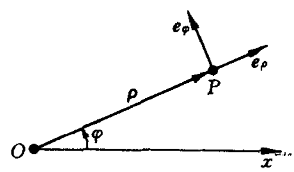


图 1-4 极坐标系中的位矢

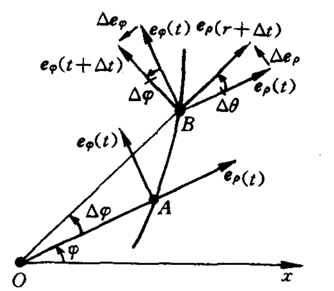


图 1-5 极坐标系中基本矢量随时间的变化

方法一：形象直观的推导方法. 图 1-5 给出了在一微小时间间隔 Δt 前后质点的位置及相应基本矢量的变化，其中我们已将 t 时刻位置 A 处的基本矢量平移到了 $t+\Delta t$ 时刻质点的位置 B 处. 由此可见，$\Delta\boldsymbol{e}_\rho$ 的大小为

$$|\Delta\boldsymbol{e}_\rho| \approx |\boldsymbol{e}_\rho|\Delta\varphi = \Delta\varphi. \tag{1.1.12}$$

当 $\Delta t\to 0$ 即 $\Delta\varphi\to 0$ 时，$\Delta\boldsymbol{e}_\rho$ 的方向是垂直于 $\boldsymbol{e}_\rho$ 的，即沿 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向. 事实上，由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_\rho) = 2\boldsymbol{e}_\rho\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_\rho) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e_\rho^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1) = 0,$$

同样可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t} \perp \boldsymbol{e}_\rho. \tag{1.1.13}$$

综合考虑 $\Delta\boldsymbol{e}_\rho$ 的大小和方向，可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{e}_\rho}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\varphi = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{1.1.14}$$

对 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 的变化作类似的考察，得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\rho. \tag{1.1.15}$$

如果引入角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\omega$，则

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\omega=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\rho\times\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{1.1.16}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向由按 φ 增加的方向形成的右手螺旋定则确定. 式(1.1.14)和(1.1.15)可统一写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t}=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_\rho,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}=-\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_\varphi.\end{cases} \tag{1.1.17}$$

上式表示，基本矢量对时间的微商等于该矢量转动的角速度矢量与自身的叉乘. 这是一个十分有用的普遍的结论.

方法二：利用直角坐标的导出方法. 图 1-6 给出了极坐标系与直角坐标系中基本矢量之间的关系，由此不难得出

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_\rho=\cos\varphi\boldsymbol{e}_x+\sin\varphi\boldsymbol{e}_y,\\ \boldsymbol{e}_\varphi=-\sin\varphi\boldsymbol{e}_x+\cos\varphi\boldsymbol{e}_y.\end{cases} \tag{1.1.18}$$

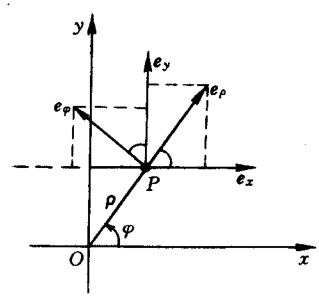


图 1-6　极坐标系与直角坐标系的关系

求上式对时间的微商，并再利用上式，即得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t}=(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_x+\cos\varphi\boldsymbol{e}_y)\dot{\varphi}=\boldsymbol{e}_\varphi\dot{\varphi},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}=(-\cos\varphi\boldsymbol{e}_x-\sin\varphi\boldsymbol{e}_y)\dot{\varphi}=-\boldsymbol{e}_\rho\dot{\varphi}.\end{cases} \tag{1.1.19}$$

该式与式(1.1.17)完全一致. 利用基本矢量的微商，不难得到质点的速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\rho\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t}=\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t}=\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.1.20}$$

和加速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi)\\ &=\ddot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t}+\dot{\rho}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\rho\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\rho\dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}\\ &=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\rho+(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi,\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

以及速率

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\dot{\rho}^2+(\rho\dot{\varphi})^2} \tag{1.1.22}$$

和加速度的大小

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)^2+(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi})^2}, \tag{1.1.23}$$

其中速度的径向分量 v_ρ 和横向分量 v_φ 分别为

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \tag{1.1.24}$$

加速度的径向分量 a_ρ 和横向分量 a_φ 分别为

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}. \tag{1.1.25}$$

请读者思考：a_ρ 与 $\frac{\mathrm{d}v_\rho}{\mathrm{d}t}$，$a_\varphi$ 与 $\frac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}t}$，$a$ 与 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 是否分别相等？为什么？径向加速度与向心加速度、横向加速度与切向加速度之间有何关系？

3. 柱坐标系

对质点的某些三维运动，例如电子在电磁场中的螺旋形运动，采用柱坐标系比较简单. 柱坐标系由极坐标 ρ 和 φ 和与它们垂直的第三个直线坐标 z 组成，基本矢量是 $\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 且 $\boldsymbol{e}_\rho \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_z$，如图 1-7 所示. 位矢、速度和加速度的表达式很容易得到，分别为

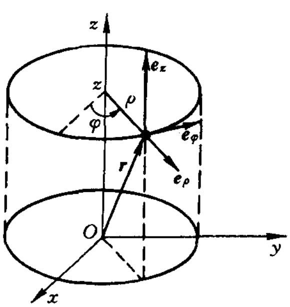


图 1-7　柱坐标系

$$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z, \tag{1.1.26}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\,\boldsymbol{e}_z, \tag{1.1.27}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi + \ddot{z}\,\boldsymbol{e}_z.\end{aligned} \tag{1.1.28}$$

4. 自然坐标系

当质点的运动轨迹（即轨迹曲线）已知时，采用自然坐标系比较简单. 自然坐标系的基本矢量是轨迹曲线上沿 P 点的切线方向的单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$（以质点的实际运动方向为正）、主法线方向（在密切圆所在平面即密切面内，并且指向曲线的凹侧）的单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 和次法线方向单位矢量 $\boldsymbol{e}_s$，且 $\boldsymbol{e}_s = \boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n$，如图 1-8 所示. 显然，在自然坐标系中，基本矢量随质点的运动而变化. 质点的位置可用其与轨迹曲线上一固定点的曲线距离 $s = s(t)$ 来描述. 在时间微元 $\mathrm{d}t$ 内，质点的位移为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，其大小为 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$，方向沿该点的切线方向，所以有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}s\boldsymbol{e}_t.$$

速度也沿切线方向，为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t = v\boldsymbol{e}_t, \tag{1.1.29}$$

其中 $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 为速率. 加速度则为

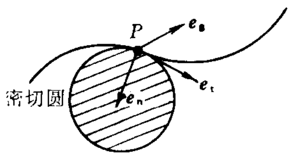


图1-8　自然坐标系中的基本矢量

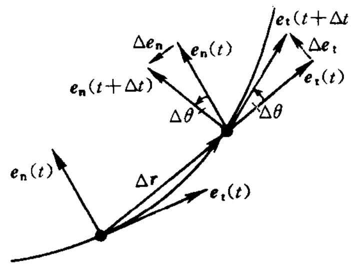


图 1-9　自然坐标系中基本矢量随时间的变化

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t},\tag{1.1.30}$$

其中涉及到基本矢量的微商$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}$. 从图 1-9 中不难看出

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}.\tag{1.1.31}$$

引入曲率半径

$$\rho_\mathrm{c}=\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right|,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}=\frac{v}{\rho_\mathrm{c}}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}.\tag{1.1.32}$$

将上式代入式(1.1.30)可得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}+\frac{v^2}{\rho_\mathrm{c}}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}.\tag{1.1.33}$$

加速度的大小为

$$a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho_\mathrm{c}}\right)^2},\tag{1.1.34}$$

各分量为

$$a_\mathrm{t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\quad a_\mathrm{n}=\frac{v^2}{\rho_\mathrm{c}},\quad a_\mathrm{s}=0,\tag{1.1.35}$$

其中切向加速度 a_t 表示速率的变化率,主法向加速度 a_n 表示速度方向的变化,称为法向加速度,次法向加速度 a_s 恒为零,这是因为速度及其变化都在密切面内.

请读者思考:既然速度及其变化都在密切面内,质点为何能作空间曲线运动呢?

当轨迹曲线由方程 $y=y(x)$ 给出时，不难证明

$$\rho_c=\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right|=\frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}}{\left|\mathrm{d}\left[\arctan\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right]\right|}=\frac{(1+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\ddot{y}|}. \tag{1.1.36}$$

可以证明，当轨迹曲线由参数方程 $\begin{cases}x=x(\lambda),\\ y=y(\lambda)\end{cases}$ 给出时，曲率半径为

$$\rho_c=\frac{(x_\lambda'^2+y_\lambda'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x_\lambda' y_\lambda''-x_\lambda'' y_\lambda'|}; \tag{1.1.37}$$

当轨迹曲线由极坐标方程 $\rho=\rho(\varphi)$ 给出时，曲率半径为

$$\rho_c=\frac{(\rho^2+\rho_\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\rho^2+2\rho_\varphi'^2-\rho\rho_\varphi''|}. \tag{1.1.38}$$

1.1.3 曲线坐标系

本小节将从普遍的曲线坐标系出发，导出速度、加速度在各常用坐标系中的表达式.

1. 曲线坐标系的基本概念

前面我们介绍的直角坐标系、柱坐标系和球坐标系等实际上是特殊的曲线坐标系. 下面，先分析这些特殊曲线坐标系的结构特点，然后总结出一般的曲线坐标系.

在直角坐标系中，任一点 P 的位置由三个坐标 x_0，y_0 和 z_0 表示，如图 1-10 所示. 该点可看做三个平面(即 $x=x_0$，$y=y_0$ 和 $z=z_0$)所形成的三条直线 $\left(\text{即 } C_1:\begin{cases}y=y_0,\\ z=z_0,\end{cases} C_2:\begin{cases}z=z_0,\\ x=x_0,\end{cases}\text{和 } C_3:\begin{cases}x=x_0,\\ y=y_0\end{cases}\right)$ 的交点. 从这个观点来看，直角坐标系就是最简单的曲线(直线)坐标系. 当质点在某一直线上运动时，只有一个坐标发生变化，其他两个坐标保持不变，而且该坐标增加的切线方向就是相应坐标轴的基本矢量方向. 例如当质点在直线 C_1 上运动时，只有 x 变化，y 和 z 保持不变，其位移 $\Delta\boldsymbol{r}|_{y,z\text{不变}}$ 平行于 $\boldsymbol{e}_x$，在数学上可表示为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}|_{y,z\text{不变}}}{\Delta x}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}=\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}\right|\boldsymbol{e}_x$. 类似地，有 $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}=\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}\right|\boldsymbol{e}_y$ 和 $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}=\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}\right|\boldsymbol{e}_z$.