中国科学院研究生教学丛书

有限元方法的数学基础

王烈衡　许学军　编著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书为《中国科学院研究生教学丛书》之一.

本书是作者最近十多年为中国科学院研究生院、北京大学以及中国科学技术大学（合肥）研究生开设课程的讲稿基础上发展起来的，试图提供有限元方法比较完整的数学基础，主要包括变分原理、Sobolev 空间、椭圆边值问题、有限元离散、协调有限元方法的误差分析、数值积分影响、等参数有限元、非协调有限元、混合有限元法、多重网格法、多水平方法、区域分解法等内容. 本书内容全面，材料丰富，深入浅出，用尽可能初等的方法论述一些理论结果.

本书适合高等院校计算数学和应用数学专业的研究生及高年级本科生，也可作为有兴趣于数学理论方面的工程师的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

有限元方法的数学基础/王烈衡，许学军编著.— 北京：科学出版社，2004
（中国科学院研究生教学丛书/白春礼主编）
ISBN 7-03-013478-8

Ⅰ. 有… Ⅱ. ①王…②许… Ⅲ. 有限元方法 - 研究生 - 教材 Ⅳ.O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 050293 号

责任编辑：杨　波　姚莉丽 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：安春生 / 封面设计：陈　敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2004 年 12 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32
2004 年 12 月第一次印刷　　印张：11 1/2
印数：1—3 000　　字数：296 000

定价：20.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

《中国科学院研究生教学丛书》序

在 21 世纪曙光初露, 中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际,《中国科学院研究生教学丛书》—— 这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了. 相信这套丛书的出版, 会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难, 对提高研究生教育质量起着积极的推动作用.

21 世纪将是科学技术日新月异、迅猛发展的新世纪, 科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力, 成为经济和社会发展的首要推动力量. 世界各国之间综合国力的竞争, 实质上是科技实力的竞争. 而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量. 我国要想在 21 世纪顺利地实施 "科教兴国" 和 "可持续发展" 战略, 实现邓小平同志规划的第三步战略目标 —— 把我国建设成为中等发达国家, 关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理、有能力参与国际竞争与合作的科技大军, 这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务.

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心, 在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨, 长期坚持走科研与教育相结合的道路, 发挥了高级科技专家多, 科研条件好, 科研水平高的优势, 结合科研工作, 积极培养研究生. 当前, 中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好 "三个基地" 的指示, 在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时, 加强研究生教育, 努力建设好高级人才培养基地, 在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业发展重任的同时, 为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才.

质量是研究生教育的生命, 全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务. 研究生教材建设是提高研究生培养质量

的一项重要的基础性工作. 由于各种原因, 目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展. 为了改变这种情况, 中国科学院组织了一批在科学前沿工作, 同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材, 并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版. 希望通过数年努力, 出版一套面向 21 世纪科技发展、体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书. 本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性, 同时也兼顾前沿性, 使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识, 也能被引导进入当代科学研究的前沿. 这套研究生教学丛书, 不仅适合于在校研究生学习使用, 也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书.

"桃李不言, 下自成蹊." 我相信, 通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘,《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花, 也将似润物春雨, 滋养莘莘学子的心田, 把他们引向科学的殿堂, 不仅为科学院, 也为全国研究生教育的发展作出重要贡献.

路甬祥

序　言

本书是作者最近十多年为中国科学院研究生院、北京大学以及中国科学技术大学 (合肥) 研究生开设课程的讲稿基础上发展起来的. 教学实践表明, 凡是具有大学本科泛函分析、数理方程及线性代数基础的学生, 都能很好地理解本书的内容. 书中凡是超越大学课程的内容, 我们给出较为详细的论述. 比如本书中需要用到的关于 Sobolev 空间理论及非线性泛函分析方面的材料, 我们给出定理, 但一般不给出全面的证明; 然而在某些特殊情形下, 我们将给出定理较为初等的证明, 以此来加强读者对这些结果的理解. 当然我们也给出了主要的参考文献, 有兴趣的读者可以在其中找到更为全面的证明.

本书的结构如下. 引言部分给出有限元方法的一个大概的轮廓. 第 1 章论述抽象变分原理, 这是有限元方法数学理论的出发点. 第 2 章是关于 Sobolev 空间的内容, 这是有限元方法数学分析的基本工具. 第 3 章介绍某些椭圆边值问题, 只考虑它们的存在及唯一性, 基本上不涉及正则性问题. 这是有限元方法的主要应用领域. 第 4 章涉及有限元离散, 主要讨论单元的构造. 第 5 章是协调有限元逼近, 这是有限元方法数学理论的主要基础. 第 6 章到第 8 章讨论违反势能极小变分原理情形下的有限元方法. 其中第 6 章关于数值积分影响及等参数有限元; 第 7 章涉及非协调有限元; 第 8 章讨论混合有限元, 包括二阶问题及 Stokes 问题的混合有限元方法. 第 9 章到第 11 章讨论有限元离散问题的高效率算法. 其中第 9 章介绍多重网格方法, 详细给出该方法的收敛性分析; 第 10 章介绍基于预处理共轭梯度法的多水平方法, 主要包括分层基多水平方法和多水平节点基方法 (即 BPX 多水平方法); 第 11 章介绍区域分解法. 本书前 7 章由王烈衡负责编写, 后 4 章由许学军负责编写.

至今国内外已有大量关于有限元方法的专著及教材. 本书主要

参考冯康和石钟慈的《弹性结构的数学理论》(1981 年), P. G. Ciarlet 的 *The Finite Element Method for Elliptic Problems* (1978 年) 及 *Basic Error Estimates for Elliptic Problems* (Ciarlet 和 Lions 编的 *Handbook of Numerical Analysis,* Vol II, 1991 年). 另外 S. C. Brenner 和 L. R. Scott 的 *The Mathematical Theory of Finite Element Methods* (1994 年) 是一本很有特色的教材. 最后 5 章, 我们只给出了相应论题的初步介绍, 其详细的论述可分别参考石钟慈和王鸣的《非标准有限元方法》(即将出版), Brezzi 和 Fortin 的 *Mixed and Hybrid Finite Element Methods* (1991 年), Bramble 的 *Multigrid Methods* (1993 年) 以及 B. F. Smith 等的 *Domain Decomposition* (1996 年).

有许多重要的内容未写入本书, 也有大量的有关文献未列入参考文献, 其中有些可能已为作者参考过, 在此一并致歉并表示感谢.

编著者

于北京

目　录

引　论

有限元方法是数值求解椭圆边值问题的一种方法. 此法首先于 20 世纪 50 年代初由工程师们提出, 并用于求解简单的结构问题. 有限元方法作为一种系统的数值方法, 并奠定其数学基础, 则是在 60 年代中期, 以冯康先生为代表的中国学者与西方学者独立并行地完成的. 从历史上来看, 还应该提到 Courant, 他在 1943 年已经提出过在三角形网格上用逐片线性函数去逼近 Dirichlet 问题, 这是有限元方法最原始的思想.

有限元方法不同于 20 世纪 40 年代二战后发明的数值求解偏微分方程的差分方法. 主要有下述三大特点:(i) 从数学物理问题的变分原理出发, 而不是从微分方程出发, 因此是从问题的整体描述而不是从问题的局部描述出发;(ii) 对所考虑问题的区域 (以二维情形为例) 作三角形 (或其他简单多边形) 剖分, 而不是仅仅作矩形剖分;(iii) 用剖分区域上的简单函数 (例如分片多项式) 去逼近原问题之解, 而不是只在剖分节点上的数值逼近.

至今有限元方法已为工程力学界广泛地应用于各种定常结构问题的数值求解上; 同时, 在数学上已建立了一套完整的理论, 成为计算数学、应用数学研究者、工程师 (为加深理论修养) 的学习和研究科目. 有限元方法以及与它有关的各种新的计算方法的构造及分析, 仍在不断地涌现, 目前尚未见穷期.

变分方法, 泛函分析, 特别是 Sobolev 空间的理论, 当然还有椭圆边值问题的现代理论为有限元方法的理论研究提供了基础.

现在用一个简单的模型问题, 来说明有限元方法的具体实现. 考虑下述 Laplace 方程的齐次 Dirichlet 问题:

$$-\Delta u = f \quad 在\ \Omega\ 中, \quad u = 0 \quad 在\ \partial\Omega\ 上, \tag{0.1}$$

其中 Ω 是平面 R^2 中的一个有界区域, $\partial\Omega$ 为其边界, f 是 Ω 中给定的光滑函数. 从经典意义上讲, $f \in C^0(\Omega)$, 解函数 $u \in C^2(\Omega)$. 这个问题的力学意义是, 假定有一弹性薄膜 (不计厚度), 其材料性能常数均归一, 将它蒙在一平面区域 Ω 上, 且在边界 $\partial\Omega$ 上固定. 当此薄膜受外力 (比如重力) 作用, 达到平衡状态时, 其位移 u 满足的方程为 (0.1). 因此 (0.1) 是薄膜平衡状态时的微分方程形式的描述, 力学上即为作用力与反作用力平衡的描述, 即牛顿第三定律. 力学上描述此问题还有另一种形式, 即势能最小原理. 假定薄膜有一位移 v, 其势能可写成

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathrm{grad}v|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \tag{0.2}$$

则平衡态位移 u 应满足

$$J(u) \le J(v), \quad \forall v \in V, \tag{0.3}$$

其中 V 表示 “容许位移集合”. 这是一个泛函 $J(v)$ 的极小问题, 与其相应的变分问题是

$$\begin{cases} \text{求}u \in V, \text{使得} \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{0.4}$$

为确定所谓 “容许位移集合”V, 考察一下问题 (0.3) 或 (0.4) 即可发现, 此时并未要求解 $u \in C^2(\Omega)$, 而只需 u 及 $\mathrm{grad}u$ 均属于 $L^2(\Omega)$, 同时也只要求 $f \in L^2(\Omega)$, 当然 $u = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上. 这样的函数组成的集合 (空间) 记为 $H_0^1(\Omega)$, 即为 V.

以后将会看到. 问题 (0.3) 等价于 (0.4), 而且在某种意义下等价于问题 (0.1). 有限元方法正是基于变分形式 (0.4) 上的一种数值方法.

为简单计, 假定 Ω 是一个多边形. 将 Ω 作三角形剖分 $\mathcal{T}_h$, h 为单元 $\tau \in \mathcal{T}_h$ 的最大直径. 设 V_h 是由在边界 $\partial\Omega$ 上为 0 的分片一次多项式所组成的集合 (空间). 由于剖分固定后, V_h 即为一个有限维

空间, 它具有有限个基函数, 例如在某个节点 P 处为 1, 而在其余节点处为 0 的分片一次函数 (称为屋顶函数)(见图 0.1).

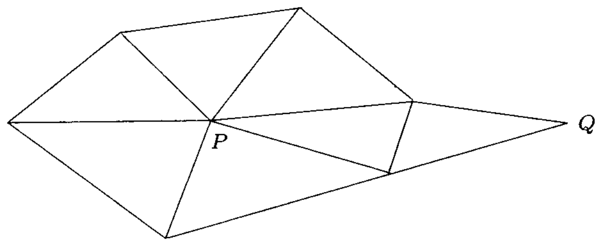

图 0.1

现设 $\dim V_h = N_h$, 其基函数为 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N_h}$, 则问题 (0.4) 的有限元逼近为

$$\begin{cases} \text{求} u_h \in V_h, \text{使得} \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{grad} u_h \cdot \mathrm{grad} v_h \mathrm{d}x = \int_\Omega f v_h \mathrm{d}x, \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \tag{0.5}$$

它等价于

$$\begin{cases} \text{求} u_h \in V_h, \text{使得} \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{grad} u_h \cdot \mathrm{grad} \varphi_i \mathrm{d}x = \int_\Omega f \varphi_i \mathrm{d}x, \quad i = 1, 2, \cdots, N_h. \end{cases} \tag{0.6}$$

而令

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j(x), \tag{0.7}$$

则 (0.6) 可写成

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j \int_\Omega \mathrm{grad} \varphi_j \cdot \mathrm{grad} \varphi_i \mathrm{d}x = \int_\Omega f \varphi_i \mathrm{d}x, \quad i = 1, 2, \cdots, N_h. \tag{0.8}$$

或写成

$$\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F}, \tag{0.9}$$

其中 $\boldsymbol{U} = (u_1, \cdots, u_{N_h})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F} = \left(\int_\Omega f\varphi_1 \mathrm{d}x, \ \cdots, \int_\Omega f\varphi_{N_h} \mathrm{d}x\right)^{\mathrm{T}}$, $K = (k_{ij})_{1 \le i,j \le N_h}$, $k_{ij} = \int_\Omega \mathrm{grad}\varphi_i \cdot \mathrm{grad}\varphi_j \mathrm{d}x$. 因此用有限元方法逼近问题 (0.4), 最终是求解线性方程组 (0.8).

由有限元方法导出的线性方程组 (0.8), 其系数矩阵 K 是对称的, 正定的 (这以后会看到). 而且 K 是稀疏的, 即 K 中大量元素为 0, 这从下述事实即可看出. 设 φ_i 是对应于节点 P 的基函数, 而 φ_j 是对应于节点 Q 的基函数, 则只当 P, Q 为相邻节点, 即属于同一个三角形单元时, $k_{ij} \neq 0$, 否则为 0. 方程 (0.8) 的这些性质给数值求解带来了极大的方便, 这也是有限元方法为广大工程、力学界所欢迎的重要原因.

第 1 章　变分原理

本章考虑抽象变分问题. 首先约定记号如下.

- V : 赋范向量空间, 范数记为 $\|\cdot\|$,
- $a(\cdot,\cdot): V\times V \to \mathbf{R}$ 的双线性型, 即 $\forall \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in \mathbf{R}$,

$$\begin{cases} a(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 a(u_1,v)+\alpha_2 a(u_2,v), \forall u_1,u_2,v \in N, \\ a(u,\beta_1 v_1+\beta_2 v_2) = \beta_1 a(u,v_1)+\beta_2 a(u,v_2), \quad \forall u,v_1,v_2 \in V, \end{cases} \tag{1.0.1}$$

- 称双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续的, 如果存在 $M=\text{const}>0$, 使得

$$|a(u,v)| \le M\|u\|\cdot\|v\|, \quad \forall u,v \in V.$$

- $l: V\to \mathbf{R}$ 连续线性泛函, 或记作 $l\in V'$, 其中 V' 是 V 的对偶空间, 对应的对偶积记作 $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
- $K: K\subset V$ 非空子集.

1.1　可微二次凸泛函的极小化问题

考虑问题

$$\begin{cases} \text{求 } u\in K, & \text{使得} \\ J(u)\le J(v), & \forall v\in K, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle l,v\rangle. \tag{1.1.2}$$

定理 1.1.1　假定 (i) 空间 V 是完备的, 即 V 是 Banach 空间, (ii) K 是 V 的非空闭凸子集, (iii) 双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续的, 对称