随机过程理论与应用

樊平毅　编著

清华大学出版社

随机过程理论与应用

樊平毅　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书参考了国际一流大学相关的研究生课程的教学内容，增加了许多近年来随机过程理论与应用方面的研究新成果. 围绕现代随机过程的理论、方法及其工程应用背景和发展前景作了深入细致的讨论，着重论述了基本理论及其应用潜力，强化计算与编程方面的理论分析，力求在内容的广度和深度上与国际水平接轨.

本书内容包括：随机过程的基本概念和分类、平稳过程与二阶矩过程、离散鞅论、Poisson 过程与更新过程、Brown 运动、Markov 链与连接参数 Markov 过程等. 同时在内容的处理上通过讨论和注解的方式使之层次分明，以适应不同类型读者的需求.

本书是现代应用随机过程理论的入门教材，可作为高年级本科生及研究生的必修课教材，也可作为本科生、研究生、教师、科研与工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

随机过程理论与应用／樊平毅编著. —北京：清华大学出版社，2005.8
ISBN 7-302-11423-4

Ⅰ. 随…　Ⅱ. 樊…　Ⅲ. 随机过程—高等学校—教材　Ⅳ. O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 082166 号

出 版 者：清华大学出版社　　地　　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
责任编辑：刘　颖
印 装 者：北京市昌平环球印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×230　印张：15.5　字数：330 千字
版　　次：2005 年 8 月第 1 版　2005 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-11423-4/O・488
印　　数：1～3000
定　　价：23.00 元

前言

本书是作者在清华大学为电子工程、计算机科学与技术、自动化和生物医学与工程等系的研究生授课的讲稿基础上加以整理、扩充和完善的结果.

本书的特点在于：

(1) 对读者所需的数学基础要求的起点较低：读者只需具备微积分、概率论和线性代数的基本知识.

(2) 着重揭示一些基本概念的来源及背景，加强了对基本理论应用潜力的探讨.

(3) 在每一章中，力求能够反映基本理论的概貌和在工程中可能的使用模式，加深读者对相关知识的理解.

(4) 结合应用，加强了计算与编程方面的理论分析，给出相关的矩阵算法和统一的编程模式.

(5) 本书的内容要点致力于反映本学科在现代科学技术应用中所必须具备的基础知识和基本技巧，有助于开展相关学科领域的科学研究.

(6) 内容的选材和设置以国际一流大学（如 MIT, Berkeley, Cornell, Gatech, Caltech 等）同类专业或相近专业的研究生课程为参考，力求在内容上呈现同等的广度和深度.

(7) 展示了现代随机过程基础理论研究和应用最为活跃的一些领域的基本思想和方法.

本书是现代应用随机过程理论的入门教材，可作为高年级本科生及研究生的必修课教材，也可作为本科生、研究生、教师、科研与工程技术人员的参考书.

本书的撰写原则是，强调理论的背景与思路，从应用的角度，力求内容的广度和深度与国际先进水平接轨. 对于命题与定理的处理，强调了证明的思路，不追究数学上的严格性. 对于一些重要的概念与定理的理解，采用了讨论和注解模式，进一步揭示了其理论内涵和潜在的应用方式，例如对 Markov 链转移概率基本关系式，我们从 5 个方面加以讨论，解释它的应用；对于 Metropolis 算法，我们从 3 个方面进行了理论分析. 深刻体会和

理解如何灵活运用随机过程理论是本书撰写中反复强调的重点. 作者希望通过这些讨论和注解使读者能更深刻地体会随机过程理论的实质. 此外,这些注解和讨论也使本书在内容的层次化处理上更具灵活性,对于那些只强调理论应用的读者,可以跳过一些繁琐的理论证明,通过阅读有关定理、注解及讨论就可体会其本质. 而对于那些追求理论分析技巧的读者,可以通过仔细阅读本书提供的引理和理论证明,提高其数学分析的能力.

本书的内容组织如下:第 1 章在介绍随机过程基本概念的基础上,强调了随机过程的二重性:随机性和函数特性,并简述了随机过程所研究问题的范畴与分类. 第 2 章讨论了平稳过程和二阶矩过程,通过引入线性系统,解释了功率谱与时域平均的关系;重点讨论了过程特征参数的遍历性理论;在谱分解理论和随机预测的证明与讨论中,采用了线性代数的方法而非测度论的方法. 第 3 章讨论了离散鞅论与应用. 通过许多示例解释了鞅的概念,并给出了构造鞅的一些基本方法. 通过对停时的讨论,解释了停时定理在平均时间估计和首达概率计算方面的应用. 此外,本章的重点在于强调鞅论的应用,如上穿不等式、极大值不等式、Doob 估值定理、Azuma 不等式和推广的 Azuma 不等式等及其在拖尾概率估计中的应用. 第 4 章在阐述 Poisson 过程和更新过程的基本理论的基础上,重点介绍了 Poisson 过程的分流和非时齐 Poisson 过程的应用、复合 Poisson 恒等式以及 Wald 恒等式. 第 5 章,在讨论 Brown 运动之前,对正态分布的有关理论从 8 个方面如:Cauchy 分布、区域分布与互相关系数的关系、条件分布、联合分布的条件边缘分布、反正弦率、零交叉、拖尾概率的 Mill 比值估计等进行了总结分析,在此基础上讨论了 Brown 运动的 8 个特性以及过零点的反正弦定理,并对 Brown 运动的变形、带漂移的 Brown 运动以及 Brown 桥的性质与应用进行了讨论,部分证明和事例分析采用了鞅论的方法. 值得一提的是对首中时的 Laplace 变换给出了一个相对简洁的证明. 第 6 章,在阐述 Markov 链基本理论的基础上,给出了计算平稳分布的矩阵算法,吸收概率的矩阵计算理论以及近年提出的用于系统仿真的 Metropolis 算法与其理论分析. 第 7 章以时间齐次连续 Markov 链的定义为基础,讨论了 Kolmogorov 前后向方程与应用,给出了平稳分布的矩阵计算方法. 通过对生灭过程的讨论,解释了平衡方程、详细平衡方程在网络性能分析中的应用方法. 本章的另一个重点是系统地讨论了嵌入 Markov 链、半 Markov 过程、Q 过程的内在联系以及系统仿真的一致性理论. 关于平稳分布与时间可逆性理论,通过排队论中 Burke 定理解释了它的应用方法,展示了它在网络分析方面的应用前景.

本书的内容选取和设置得到了清华大学研究生精品课建设基金的支持. 在本书的编写与修改过程中,作者的博士生导师冯重熙教授给予了大量的鼓励、关心和支持,在此表示衷心的感谢. 同时感谢清华大学电子工程系陆大绘教授、张颢博士、清华大学数学科学系葛余博教授,中国矿业大学北京校区数学系高运良主任,与他们有益的讨论,使本书的内容更加充实、丰富. 感谢曹志刚教授、陆建华教授、林孝康教授及电子工程系教务科罗淑云教授等同事的大力支持和帮助. 同时也感谢参加听课的研究生们及我所在的微波与数

字通信技术国家重点实验室的同事们;他们对更新工科学生“随机过程”课程内容的建议和要求,促使作者加快了编写和整理本书的进度.本书的出版得到清华大学出版社的大力支持,特别是刘颖编辑对稿件认真细致的审阅和校对.最后,感谢我的妻子和孩子对我的支持、鼓励和帮助.

樊平毅

2005年1月

目 录

第1章　概　论

随机过程理论作为一门基础数学课在通信、自动控制、经济预测、医学工程等领域有着广泛的应用. 在本章中，将着重介绍有关随机过程的一些基本概念和随机过程的分类，同时介绍一些特殊的随机过程，并通过一些示例使读者对随机过程有一些初步的认识.

1.1　随机过程的基本特点

在学习随机过程理论之前，先复习一下有关随机变量的定义. 通常将取值具有不确定性（随机性）的变量称为**随机变量**. 随机过程是随机变量概念的推广. 在随机过程的定义中引入了空间的概念，即在空间中每个位置上它都呈现为一个随机变量. 如果空间取为时间域，那么它在每一个时刻都呈现为一个随机变量. 如无特别说明，在本书中所讨论的空间一般定义为时间域（简称时域）. 如果从时间域上看，它是时间 t 的一个函数，反映了随时间的变化过程，随机过程的定义来源于此.

从上述讨论中可以看出随机过程 $\xi(t)$ 具有以下特点：

(1) $\xi(t)$ 在 $t=t_0$ 时刻的单个样本值 $\xi(t_0)$ 是一随机变量.

(2) $\xi(t_0)$ 的数学期望 $s(t_0)=E(\xi(t_0))$ 是确定的，其中 $E()$ 表示统计平均运算.

(3) $s(t)=E(\xi(t))$ 是关于 t 的函数，此时呈现了函数的特性，因此 $\xi(t)$ 可以看作是一随机函数.

因此，我们说随机过程具有二重性：

(1) 随机性：对任何单个样本值 $\xi(t_0)$ 而言，它是一随机变量.

(2) 函数特性：在整个时域空间上，$\xi(t)$ 是一随机函数.

值得注意的是随机过程的二重性是讨论随机过程性质的基础，在后继的章节中，这一特点将被反复地应用.

1.2 随机过程的研究范围

根据随机过程的基本特点，我们可以预见有关随机过程的研究范围.

(1) 依据随机过程单样本值为随机变量的特点，相应的研究内容包括：连续型随机过程和离散型随机过程，具体的研究对象包括：均值、方差、协方差、有限维联合分布等.

(2) 依据随机过程的函数特性，相应的研究内容应包括：时间上的相关性、连续性与离散性、随机过程的导数、微分、积分、卷积、级数展开、微分方程与积分方程等.

(3) 依据随机过程的二重性的联合特征，相应的研究内容应包括：互相关函数、空间的遍历性、时域平均与集总平均的关系、随机抽样定理、滤波理论、估计与预测方法等.

为了更加客观地描述随机过程，在此给出随机过程的数学定义.

定义 1.1 设(Ω,F,P)是一概率空间，其中Ω是一个集合，F是由Ω的某些子集所组成的一个σ代数，P是在可测空间(Ω,F)上定义的一个概率测度. T是一个指标集，若对每一个$t\in T$，$\xi(t,w)$是一随机变量，则称$\xi(t,w)=\xi_t(w)$为该概率空间上的**随机过程**. 为方便起见，通常记为$\xi(t)$.

1.3 随机过程的分类方法(1)

随机过程的一种简单的分类方法就是按指标集T的属性进行分类. 指标集T可以分为离散和连续两类：

(1) T为一有限集或可列集（离散的情况），如

$$T=\{0,1,2,\cdots,n\},\quad T=\{0,1,2,\cdots\}.$$

这类随机过程称为**离散参数的随机过程**或**随机序列**.

(2) T为不可列集(连续的情况)，如

$$T=\{t:\ t\geqslant 0\},\quad T=\{t:\ t\in[0,1]\}.$$

这类随机过程称为**连续参数的随机过程**.

综合随机变量类型和指标集类型，随机过程可以分为以下 4 类：

T	变量	
(1) 离散参数	离散型	随机过程
(2) 连续参数	离散型	随机过程
(3) 离散参数	连续型	随机过程
(4) 连续参数	连续型	随机过程

1.4 随机过程的示例

例 1.1 随机游动(离散参数离散型随机过程).

假设每隔 Ts,抛掷硬币一次,在每次抛掷后,依据硬币出现的正、反面,在一条直线上移动一格.具体移动规则如下:如硬币出现正面向右移;如硬币出现反面向左移.假设在 $t=0$ 时,位于起始点,相应的位置记为 $X(0)=0$.经时间 nTs 后,偏离原点的距离为 $X(nT)$.于是,随机游动可以用一个离散参数离散型随机过程描述.

假设在前 n 次抛掷中出现 k 次正面.这意味着,在时刻 $t=nT$,已经向右移动了 k 格,向左移动了 $n-k$ 格.因此

$$X(nT)=k-(n-k)=2k-n,$$

若记 $X(nT)=r$,于是有

$$k=\frac{r+n}{2}.$$

因此

$$P\{X(nT)=r\}=\mathrm{C}_n^{\frac{n+r}{2}}(1/2)^{\frac{r+n}{2}}(1/2)^{\frac{n-r}{2}},$$

其中,C_n^m 表示 n 个不同的元素中任选 m 个元素组成一组的组合数.

值得注意的是 n 和 r 的奇偶性是相同的.

注 如果要求计算经过 nTs 后返回到原点的概率,则有

(1) 当 n 为偶数时,$P\{X(nT)=0\}=\mathrm{C}_n^{n/2}(1/2)^n$;

(2) 当 n 为奇数时,$P\{X(nT)=0\}=0$.

在上述计算过程中,忽略了状态转移的具体路径,只考虑最终的结果和左右移动的次数.事实上,如果考虑每一条具体的转移路径,问题的分析会变得非常复杂,然而从统计的角度看,每一条可能的具体的转移路径出现的概率是相同的.

例 1.2 AM 调制系统(连续参数离散型随机过程).

在数字通信系统中,有一种调制方式是利用信号的幅度高低区分信号的.假定传送的信号是脉宽为 T_0 的脉冲信号,每隔 T_0 送出一个脉冲,脉冲幅度 $\xi(t)$ 为一随机变量.若以等概率取值$\{-3,-1,1,3\}$,且不同周期内脉冲幅度是相互独立的,脉冲的起始时间相对于原点($t=0$)的时间差 U 为均匀分布在$[0,T_0]$内的随机变量.于是,$\xi(t)$ 的表达式为

$$\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nF(t-nT_0-U),$$

其中

$$a_n\in\{-3,-1,1,3\},$$

$$F(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<T_0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$0\leqslant U<T_0$ 为一常数.

例 1.3(离散参数连续型随机过程)

设某通信系统,它的信号为脉冲信号,脉宽为 T,脉冲信号的周期也假定为 T. 如果脉冲幅度是随机的,幅度服从参数为 λ 负指数分布(Rayleigh 衰落信道),且不同周期内的幅度 $\xi_i,\xi_k(i\neq k)$ 是相互统计独立的,脉冲起始时间设为 $t=0$. 相应的信号幅度表达式为

$$\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n F(t-nT),$$

其中

$$F(t)=\begin{cases}1, & t=kT,k=0,1,2,\cdots,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

ξ_n 服从参数为 λ 的负指数分布.

例 1.4(连续参数连续型随机过程)

在载波通信系统中,发送端的载波信号通常为如下形式:

$$\xi(t)=V\cos(\omega t+\theta),$$

其中 V,ω 为常数,θ 为 $(0,2\pi)$ 内均匀分布的随机变量. 此时 $\xi(t)$ 为一连续参数连续型随机过程.

1.5　随机过程的数字特征及基本概念

本节主要介绍有关随机过程的一些数字特征,即有关的统计量. 事实上,许多随机过程的数字特征可从随机变量的数字特征推广得到,大致包括:

(1) 均值;

(2) 方差;

(3) 同一随机过程的二阶混合原点矩;

(4) 同一随机过程的二阶混合中心矩;

(5) 不同随机过程的二阶混合原点矩、中心矩.

假设 $\xi(t)$ 为一随机过程,$t_1\in T$, 则

(1) **均值**定义为　$\mu_\xi(t_1)=E(\xi(t_1))$.

(2) **方差**定义为　$\sigma_\xi^2(t_1)=D(\xi(t_1))=E(\xi(t_1)-\mu_\xi(t_1))^2$.

(3) **二阶混合原点矩**定义为　对任意的 $t_1,t_2\in T$, $R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=E(\xi(t_1)\xi(t_2))$.

(4) **二阶混合中心矩**定义为　对任意的 $t_1,t_2\in T$,

$$C_{\xi\xi}(t_1,t_2)=E((\xi(t_1)-\mu_\xi(t_1))(\xi(t_2)-\mu_\xi(t_2))).$$

(5) 两个或两个以上随机过程的分布和数字特征: 假设 $\xi(t),\eta(t)$ 为两个随机过程,对任意的 $t_1,t_2\in T$, 则**二阶混合原点矩**定义为

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=E(\xi(t_1)\eta(t_2)).$$

相应的**二阶混合中心矩**定义为

$$C_{\xi\eta}(t_1,t_2)=E((\xi(t_1)-\mu_\xi(t_1))(\eta(t_2)-\mu_\eta(t_2))).$$

如果对于任意的两个参量 t_1 和 t_2 都有 $C_{\xi\eta}(t_1,t_2)=0$,则称随机过程 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 是**统计无关的**.

多个随机过程的和仍为一随机过程,其相应的统计特性的讨论与两个随机过程的和组成的随机过程类似.下面以三个随机过程的和组成的随机过程为例加以讨论.

设 $\xi(t)$、$\eta(t)$ 和 $\zeta(t)$ 为三个随机过程,且 $\omega(t)=\xi(t)+\eta(t)+\zeta(t)$,则 $\omega(t)$ 的均值为

$$E(\omega(t))=E(\xi(t))+E(\eta(t))+E(\zeta(t)),$$

$\omega(t)$ 的相关函数为

$$\begin{aligned}R_{\omega\omega}(t_1,t_2)&=E(\omega(t_1)w(t_2))\\&=R_{\xi\xi}(t_1,t_2)+R_{\eta\eta}(t_1,t_2)+R_{\zeta\zeta}(t_1,t_2)\\&\quad+R_{\xi\eta}(t_1,t_2)+R_{\xi\zeta}(t_1,t_2)+R_{\eta\xi}(t_1,t_2)\\&\quad+R_{\eta\zeta}(t_1,t_2)+R_{\zeta\xi}(t_1,t_2)+R_{\zeta\eta}(t_1,t_2).\end{aligned}$$

如果上述三个随机过程是互不相关的,且各自的均值都为零,则过程 $\omega(t)$ 的均值为

$$\mu_\omega(t_1)=E(\omega(t_1))=0.$$

且

$$\begin{aligned}&R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=E(\xi(t_1)\eta(t_2))=\mu_\xi(t_1)\mu_\eta(t_2)=0,\\&R_{\eta\xi}(t_1,t_2)=0,\quad R_{\xi\zeta}(t_1,t_2)=0,\quad R_{\zeta\xi}(t_1,t_2)=0,\\&R_{\eta\zeta}(t_1,t_2)=0,\quad R_{\zeta\eta}(t_1,t_2)=0,\\&R_{\omega\omega}(t_1,t_2)=R_{\xi\xi}(t_1,t_2)+R_{\eta\eta}(t_1,t_2)+R_{\zeta\zeta}(t_1,t_2).\end{aligned}$$

在上述的讨论中,通常假定所讨论的随机过程为实过程.下面就给出有关复随机过程的定义.

定义 1.2 设 ξ、η 为同一概率空间 (Ω,F,P) 上的两个取实数值的随机变量,并设 $\zeta=\xi+\mathrm{j}\eta$,其中 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$,则称 ζ 为该概率空间上的一个**复随机变量**.

如果 ξ、η 的一阶矩和二阶矩存在,则相应的**均值**为

$$E(\zeta)=E(\xi)+\mathrm{j}E(\eta),$$

方差为

$$D(\zeta)=E(|\zeta-E\zeta|^2)=E((\xi-E\xi)^2)+E((\eta-E\eta)^2).$$

定义 1.3 设 $\xi(t)$、$\eta(t)$ 是一对随机过程,并具有相同的参数,$\xi(t)$、$\eta(t)$ 具有相同的概率空间,则 $\zeta(t)=\xi(t)+\mathrm{j}\eta(t)$ 称为**复随机过程**.

若 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的数学期望和二阶矩都存在,则定义

$$E(\zeta(t))=E(\xi(t))+\mathrm{j}E(\eta(t))$$

为 $\zeta(t)$ 的**均值函数**,定义