

大学课程
辅导与应试
系列丛书

● 南北名校联合 ● 四方名师打造 ● 天下名品汇粹

线性代数

释疑解难

曹永林 徐绥 游宏 编著

- 专题讲解
- 重点阐释
- 例题精析
- 答疑解惑



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS



线性代数 线性代数 线性代数

线性代数

释疑解难

王长坤 编著

- 线性代数
- 线性代数
- 线性代数
- 线性代数

清华大学出版社

线性代数释疑解难

曹永林 徐绥 游宏 编著



天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数释疑解难/曹永林,徐绥,游宏编著. —天津:天津大学出版社,2005.1

ISBN 7-5618-2089-5

I. 线... II. ①曹...②徐...③游... III. 线性代数—高等学校—教学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 004650 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
网 址 www.tjup.com
电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印 刷 永清县晔盛亚胶印有限公司
经 销 全国各地新华书店
开 本 170mm × 240mm
印 张 11.5
字 数 252 千
版 次 2005 年 1 月第 1 版
印 次 2005 年 1 月第 1 次
印 数 1 - 3 000
定 价 15.00 元

大学课程辅导与应试系列丛书

编纂指导委员会

(按姓氏笔画排列)

马继刚 (四川大学)

王绵森 (西安交通大学)

文小西 (高等教育出版社)

田 铮 (西北工业大学)

齐植兰 (天津大学)

刘 晓 (北方交通大学)

张庆灵 (东北大学)

杨秀雯 (天津大学出版社)

季文铎 (北方交通大学)

赵达夫 (北方交通大学)

郝志峰 (华南理工大学)

谢国瑞 (华东理工大学)

游 宏 (哈尔滨工业大学)

蔡高厅 (天津大学)

前 言

线性代数是高等学校理工科及经济、管理等学科普遍开设的一门重要课程,这门课程不仅是继续学习其他数学课程的基础,更是学生学习相关专业课程的重要语言和工具.瑞典数学家 L. 戈丁在《数学概观》中指出:“如果不熟悉线性代数的概念,如线性性质、向量、线性空间、矩阵等等,要去学习自然科学,现在看来就和文盲差不多,甚至学习社会科学也是如此.”另一方面,由于计算机技术的飞速发展与广泛应用,使大量工程与科研中的问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决,这就使得以处理离散量为主的线性代数课程占有越来越重要的地位,成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础.

线性代数课程的特点是概念多、符号多、运算规律多、定理多,内容纵横交错,知识联系紧密.学生只有充分理解概念,熟悉各种运算规律、计算方法,掌握定理的条件、结论和应用,善于总结经验,了解各章节间的内部联系,才能使所学知识融会贯通,真正学好这门课程.本书就是为了帮助读者实现上述目标而编写的.

本书围绕学生学习过程中的疑惑问题,非数学专业学生应掌握的重点和难点问题以及解题时常见的错误,以“问题—解答”的形式通过一般性的阐述和典型例题的讲解帮助读者把线性代数的基本理论、方法和技巧进行了梳理、归纳和总结.本书有些例题选自历届非数学专业研究生入学试题.一个原因是这些题目比较灵活,综合运用知识的特点比较明显;另一个原因是不少学生将来要报考研究生,熟悉这些题型大有好处.为了让读者能够将前后知识融会贯通,我们在解题时并没有严格考虑内容前后的逻辑顺序.

目前,有些大学将线性代数与解析几何融为一门课程,有利于代数与几何的相互渗透,相互支撑.考虑到国内大多数院校目前仍将线性代数作为一门独立课程现状,本书没有将解析几何的内容吸纳进来.

本书可供大专院校、电大、职大和函大等广大学生学习线性代数时阅读和参考;对从事线性代数教学的教师也有一定的参考价值.

本书受天津大学出版社委托编写,山东理工大学曹永林教授为各章拟定初稿,并对最后的文稿作了部分修改;天津大学徐绥教授在此基础上加工、整理,并执笔成文;哈尔滨工业大学游宏教授对该书作了策划、补充、审核.

本书在编写过程中参考了大量线性代数辅导、解题类书籍,在此向这些书籍的编者一并致谢.限于作者水平,书中不当之处在所难免,敬请读者批评指正.

编者

2004 年 1 月

目 录

第 1 章 行列式 (1)

问题 1.1 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 是 n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 展开式中的一项的条件是什么? 若 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 是 n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 展开式中的一项, 它前面所带的符号如何确定? (1)

问题 1.2 为什么当 $n \geq 4$ 时, n 阶行列式没有“对角线展开法则”? (1)

问题 1.3 计算行列式时, 行列式定义所起的作用是什么? (2)

问题 1.4 计算 n 阶行列式的基本思路、策略、常用技巧及方法有哪些? ... (3)

第 2 章 矩阵 (17)

问题 2.1 方阵 A 与其行列式 $|A|$ 有什么关系? (17)

问题 2.2 矩阵的子式与其行列式有何区别和联系? (17)

问题 2.3 用性质计算行列式与对矩阵施行初等变换有哪些异同? (17)

问题 2.4 矩阵的运算性质与方阵的行列式、数的运算性质有何区别? (18)

问题 2.5 对于给定的方阵 A , 如何计算 A 的高次方幂 A^n ? (20)

问题 2.6 与矩阵可逆性相关的判定条件有哪些? (24)

问题 2.7 如何利用可逆矩阵的定义和性质解题? (24)

问题 2.8 关于 n 阶方阵 A 的伴随矩阵 A^* 有哪些基本结论? (26)

问题 2.9 判别“若 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, A, B, C, D 均为 n 阶方阵, 则 $M^* = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}$ ”是否正确. (27)

问题 2.10 对于 m 阶方阵 A , n 阶方阵 B , 如何求 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵? (27)

问题 2.11 如何计算方阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 的行列式? (28)

问题 2.12 若分块矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 满足 $|M| \neq 0$, A, B, C, D 都是方阵, 如何用分块矩阵的形式求 M^{-1} ? (29)

问题 2.13 已知方阵 A , 计算 A^{-1} 有哪些基本方法? (31)

问题 2.14	已知与方阵 M 有关的等式或表达式,如何判定 M 是否可逆并求 M^{-1} ?	(34)
问题 2.15	如何求解简单的矩阵方程?	(38)
问题 2.16	矩阵的秩有哪些基本性质? 如何解与矩阵秩有关的问题?	(39)
问题 2.17	如何解与矩阵运算有关的方阵的行列式问题?	(46)
问题 2.18	矩阵的初等变换、初等矩阵、可逆矩阵及矩阵的(行、列)等价之间有何关系?	(48)
问题 2.19	为什么对矩阵 A 施行初等行变换不改变 A 的列向量组间的线性关系?	(50)
问题 2.20	判别“设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵,则 A 一定可以经过有限次初等行变换变为 B ”这一结论是否正确.	(50)
第 3 章	n 维向量	(52)
问题 3.1	在 n 维向量组的线性相关和线性无关的定义中应注意什么?	(52)
问题 3.2	由向量组的线性相关性定义可直接得出哪些结论?	(52)
问题 3.3	应用向量组的线性相关性的概念时有哪些常见的错误?	(53)
问题 3.4	如何应用向量组线性相关性的定义判别已给向量组的线性相关性?	(56)
问题 3.5	向量组的线性相关性与极大无关组、向量组的秩、方阵 A 的行列式、两向量组的等价等概念有何关系? 如何应用这些概念及理论判别或证明给定向量组的线性相关性?	(58)
问题 3.6	向量组的秩与矩阵的秩有何关系? 它们在研究向量组的线性相关性及向量组的初等变换等问题时,扮演什么角色?	(61)
问题 3.7	判别向量组线性相关性的方法有哪些?	(64)
问题 3.8	如何将已知向量表示为给定向量组的线性组合?	(67)
问题 3.9	如何求已知向量组的秩、极大无关组,并将其余向量表示为该极大无关组的线性组合?	(69)
问题 3.10	如何解决与向量组理论有关的证明题?	(72)
第 4 章	线性方程组	(78)
问题 4.1	如何判定齐次线性方程组有唯一解,还是有无穷多解?	(78)
问题 4.2	如何判定非齐次线性方程组无解,有唯一解,有无穷多解?	(79)
问题 4.3	如何证明线性方程组是否同解?	(83)
问题 4.4	判别“设矩阵 $A_{m \times n}, B_{n \times s}, r(A) = r$. 若 $AB = O$ 且 $r(B) = n - r$, 则矩阵 B 的列向量组一定是 $AX = 0$ 的基础解系”这一说法是否正确.	(84)
问题 4.5	解线性方程组有哪些基本方法?	(85)
问题 4.6	求解含参数的线性方程组有哪些基本方法?	(89)
问题 4.7	怎样求两个线性方程组的公共解?	(97)
问题 4.8	如何判定两个线性方程组同解?	(101)

问题 4.9	如何判定或证明给定的向量组是某齐次线性方程组的基础解系? ...	(102)
问题 4.10	如何利用线性方程组的不同表达形式解题?	(105)
问题 4.11	非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 有解时,其通解能通过 $AX = \beta$ 自己的一组线性无关的解向量表达出来吗? 如何表达?	(110)
问题 4.12	如何应用线性方程组理论解决矩阵问题?	(110)
问题 4.13	平面上 n 个点 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n), n \geq 3$, 位于一条直线上的充分必要条件是什么?	(112)
问题 4.14	平面上 n 条直线 $a_i x + b_i y + c_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n) (n \geq 2)$ 共点的充分必要条件是什么?	(112)
第 5 章	矩阵的特征值与特征向量、相似矩阵	(114)
问题 5.1	何谓矩阵的特征值、特征向量? 它们有哪些性质?	(114)
问题 5.2	如何计算 n 阶矩阵 A 的特征值及其特征向量? A 的属于不同特征值的线性无关的特征向量组间有何关系?	(117)
问题 5.3	何谓二方阵相似? 在什么条件下 A 与对角形矩阵相似?	(119)
问题 5.4	n 阶矩阵 A 的秩等于 A 的非零特征值的个数吗?	(122)
问题 5.5	若 λ_0 是矩阵 A 的 s 重特征值,为什么 A 的属于 λ_0 的线性无关的特征向量组至多含 s 个向量?	(122)
问题 5.6	对于 n 阶矩阵 A 和多项式 $f(x)$,若 $f(A) = O$,则 $f(x) = 0$ 的根与 A 的特征值有何关系?	(123)
问题 5.7	求给定矩阵的特征值有哪些基本方法?	(124)
问题 5.8	如何确定 n 阶矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量?	(129)
问题 5.9	给定矩阵 A ,如何求可逆矩阵 P ,使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵? ...	(132)
问题 5.10	给定 n 阶实对称矩阵 A ,如何求正交矩阵 T ,使 $T^T AT$ 为对角形矩阵?	(135)
问题 5.11	已知矩阵 A 的某些特征值和特征向量,如何求矩阵 A 或与 A 有关的一些矩阵?	(137)
问题 5.12	如何利用 n 阶矩阵 A 的相似对角形矩阵解决与 A 有关的问题? ...	(142)
第 6 章	二次型	(146)
问题 6.1	何谓二次型? 何谓二次型的矩阵? 二次型的秩?	(146)
问题 6.2	实二次型经不同的可逆线性变换得到的标准形唯一吗? 如经正交变换,得到的标准形唯一吗?	(147)
问题 6.3	什么是实二次型的规范形? 其规范形唯一吗?	(148)
问题 6.4	两矩阵等价、相似、合同之间有何关系? 它们与二次型有何联系? ...	(149)

问题 6.5	已知实对称矩阵 B 合同于 A , 如何求可逆矩阵 P , 使 $P^T A P = B$? ...	(150)
问题 6.6	化实二次型为标准形常用的方法有哪些?	(153)
问题 6.7	什么是实二次型的等价分类?	(157)
问题 6.8	如何求正交变换化实二次型为标准形, 并求解与此相关的问题?	(158)
问题 6.9	如何利用实二次型在正交变换下的标准形解决相关问题?	(164)
问题 6.10	何种二次型(矩阵)为正定二次型(正定矩阵)? 正定二次型(矩阵)有哪些判别法?	(166)

第1章 行列式

行列式理论是由于解线性方程组的需要建立起来的,它在数学本身或其他科学分支中都有广泛的应用.我们试图结合行列式的概念、基本性质及计算方法中经常出现的疑难探讨以下几个问题.

问题 1.1 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 是 n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 展开式中的一项的条件是什么? 若 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 是 n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 展开式中的一项,它前面所带的符号如何确定?

答: 因为 n 阶行列式展开式中的每一项都是行列式中位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积,所以当且仅当 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 $1, 2, \cdots, n$ 的全排列时, $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 是行列式 $|a_{ij}|_n$ 展开式中的一项.

例如,令 $D = |a_{ij}|_6$, $a_{21} a_{13} a_{42} a_{35} a_{64} a_{56}$ 是 D 的展开式中的项;而 $a_{16} a_{62} a_{31} a_{55} a_{34} a_{43}$ 和 $a_{34} a_{62} a_{51} a_{14} a_{26} a_{43}$ 均不是 D 的展开式中的项.

确定行列式 $|a_{ij}|_n$ 展开式中的项 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 前面所带符号的方法有三种.

(1) 将给定项中的 n 个元素按行足标的自然顺序排列好后,算出此时 n 个元素的列足标所组成的排列的逆序数 s ,则该项所带符号为 $(-1)^s$.

(2) 将给定项中的 n 个元素按列足标的自然顺序排列好后,算出此时 n 个元素的行足标所组成的排列的逆序数 t ,则该项所带符号为 $(-1)^t$.

(3) 计算 $r = \tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$,则该项所带符号为 $(-1)^r$.

例如:确定 6 阶行列式 $|a_{ij}|_6$ 展开式中的项 $a_{21} a_{13} a_{42} a_{35} a_{64} a_{56}$ 前所带的符号.

解 1 原项 $= a_{13} a_{21} a_{35} a_{42} a_{56} a_{64}$, 此时列足标组成的排列的逆序数 $\tau(315264) = 5$, 故该项所带符号为 $(-1)^5$, 为“-”号.

解 2 原项 $= a_{21} a_{42} a_{13} a_{64} a_{35} a_{56}$, 此时行足标组成的排列的逆序数 $\tau(241635) = 5$, 故该项所带符号为“-”号.

解 3 因为 $\tau(214365) + \tau(132546) = 5$, 故该项所带符号为“-”号.

问题 1.2 为什么当 $n \geq 4$ 时, n 阶行列式没有“对角线展开法”?

答: 首先根据行列式的定义, n 阶行列式的展开式是 $n!$ 项的代数和,而按照 2 阶、3 阶行列式展开的对角线法则那样展开 n 阶行列式只得到 $2n$ 项的代数和. 当 $n \geq 4$ 时, $n! \neq 2n$. 另外,在 2 阶、3 阶行列式的对角线展开法则中,斜对角线(右上角到左下角)上所有元素乘积这一项前带的符号总是负的. 但当 $n \geq 4$ 时, n 阶行列式斜对角线上 n 个元素乘积这一项所带符号并不总是负的.

例如,
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & e \\ 0 & b & f & 0 \\ 0 & g & c & 0 \\ h & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd + efgh - ebch - afgd.$$

其中项 $efgh$ 前带“+”号; $ebch$ 和 $afgd$ 在按“对角线展开法”展开时不会出现.

因此, 当 $n \geq 4$ 时, 对 n 阶行列式不能按所谓的“对角线法则”展开.

问题 1.3 计算行列式时, 行列式定义所起的作用是什么?

答: 对于很多计算题, 只要我们熟悉行列式的基本性质和一些特殊行列式(如上、下三角形和对角形行列式)的计算公式, 即使不知道(或忘记了)行列式的定义, 照样可以解决问题.

【例 1.3.1】 计算:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解: 先将 D 的第 n 行元素依次与第 $n-1, n-2, \cdots, 2, 1$ 行交换, 再将所得新行列式的第 n 行与 $n-1, n-2, \cdots, 2$ 行交换, 如此继续下去, 直至第 n 行与第 $n-1$ 行交换, 共交换了

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ 次}.$$

因此

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!.$$

事实上, 行列式的基本性质再添加对角形行列式的计算公式与行列式的定义是等价的. 这样看来, 行列式的定义在解题时岂不是真的没有用了? 事实并非如此, 有些问题还是需要利用行列式的定义才能快捷地解决.

【例 1.3.2】 证明下面的 2 001 阶行列式 D 非零, 这里

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2\,000 & 2\,001 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & 2\,001^2 & 2\,002^2 \\ 3^2 & 4^3 & \cdots & 2\,002^3 & 2\,002^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2\,001^{2\,001} & 2\,002^{2\,001} & \cdots & 2\,002^{2\,001} & 2\,002^{2\,001} \end{vmatrix}.$$

证: 根据行列式的定义, 在 D 的展开式中, 除去斜对角线上元素的积

$$2\,001 \cdot 2\,001^2 \cdots 2\,001^{2\,001}$$

为奇数外, 其余各项都至少含有一个斜对角线下方的元素作为因子, 而斜对角线下方的元素都是 2 002 的方幂, 为偶数, 所以 D 的值必为奇数. 因此 $D \neq 0$.

【例 1.3.3】 在一个 n 阶行列式中, 等于零的元素如果多于 $(n^2 - n)$ 个, 那么这个

n 阶行列式必为零.

证: 因为

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

由 n 阶行列式的定义知行列式 D_n 的值是 $n!$ 项代数和, 而其中每一项都是 n 个元素的乘积, 这 n 个元素又需取自不同行不同列.

又 n 阶行列式 D_n 中一共有 n^2 个元素, 如果等于零的元素比 $(n^2 - n)$ 还多, 那么其中不等于零的元素一定比 $n^2 - (n^2 - n) = n$ 还少, 也就是说 D_n 中最多有 $(n - 1)$ 个元素不等于零, 所以 D_n 的 $n!$ 项中每一项的 n 个元素中必有零元素出现. 即 $n!$ 项的每一项都是零, 故 $D_n = 0$.

【例 1.3.4】用行列式的定义证明:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

证: 考虑展开式中的一般乘积项 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$, 其中 a_{3j_3} 、 a_{4j_4} 、 a_{5j_5} 分别取自第 3、4、5 行, 它们又不能取自相同的列, 故这 3 个数中最多有 2 个分别取自第 1 列和第 2 列, 因而至少有 1 个取自后 3 列, 从而至少有 1 个数为零.

问题 1.4 计算 n 阶行列式的基本思路、策略、常用技巧及方法有哪些?

答: 通过下面例题说明常用的计算 n 阶行列式的基本思路、策略、技巧和方法.

1. 三角化

将给定的行列式化成上(下)三角形行列式. 一般地, 下列形式的行列式均可考虑三角化.

$$\begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \text{ 或 } \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

【例 1.4.1】计算行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & x_n \end{vmatrix}.$$

解: 所给行列式属于 $\begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & / \\ & & & / \\ 0 & & & \end{vmatrix}$ 形式.

(1) 当 $x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$ 时, 先将第 $n+1$ 列的 $\frac{a_n}{x_n}$ 倍加到第 n 列, 再将第 n 列的 $\frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}$ 倍加到第 $n-1$ 列, 如此进行下去, 最后将第 2 列的 $\frac{a_1}{x_1}$ 倍加到第 1 列得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_1 a_2}{x_1 x_2} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{x_1 x_2 \cdots x_n} & * & * & \cdots & 1 + \frac{a_n}{x_n} & 1 \\ & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(1 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_1 a_2}{x_1 x_2} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{x_1 x_2 \cdots x_n} \right) x_1 x_2 \cdots x_n$$

$$= \prod_{i=1}^n x_i + a_1 x_2 x_3 \cdots x_n + a_1 a_2 x_3 \cdots x_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} x_n + \prod_{i=1}^n a_i.$$

(2) 当 $x_1 x_2 \cdots x_n = 0$ 时, 由多项式函数的连续性可知也有

$$D_{n+1} = \prod_{i=1}^n x_i + a_1 x_2 x_3 \cdots x_n + a_1 a_2 x_3 \cdots x_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} x_n + \prod_{i=1}^n a_i.$$

【例 1.4.2】 计算行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & & & \\ -1 & 1-b_1 & & b_2 & \\ & -1 & & 1-b_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & b_n \\ & & & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

解: 所给行列式属于 $\begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & / \\ & & & / \\ 0 & & & \end{vmatrix}$ 形式.

先将第 1 行加到第 2 行, 再将第 2 行加到第 3 行, 如此进行下去, 最后将第 n 行加到第 $n+1$ 行得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & & & \\ 0 & 1 & b_2 & & \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & b_n \\ & & & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

【例 1.4.3】 计算:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n).$$

解: 将第 2, 3, $\cdots$, $n+1$ 列分别乘以 $-\frac{c_1}{a_1}, -\frac{c_2}{a_2}, \cdots, -\frac{c_n}{a_n}$ 后都加到第 1 列得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{a_i} \right) a_1 a_2 \cdots a_n.$$

【例 1.4.4】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & a_2 + x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & a_n + x_n \end{vmatrix}.$$

解: 先将各位位置上的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 设法尽可能多地化为零, 第 1 行乘以 -1 后分别加到第 2, $\cdots$, n 行, 得

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad \left(\text{属于} \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & \diagdown & & \\ & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \text{形式} \right).$$

(1) 当 $a_2 a_3 \cdots a_n \neq 0$ 时, 将第 2, 3, $\cdots$, n 列分别乘以 $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{a_3}, \cdots, \frac{a_1}{a_n}$ 后都加到第 1 列得

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + x_1 + \frac{a_1 x_2}{a_2} + \cdots + \frac{a_1 x_n}{a_n} & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix} \\ = \left(a_1 + x_1 + \frac{a_1 x_2}{a_2} + \cdots + \frac{a_1 x_n}{a_n} \right) a_2 a_3 \cdots a_n$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n + x_1 a_2 \cdots a_n + a_1 x_2 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} x_n.$$

(2) 当 $a_2 a_3 \cdots a_n = 0$ 时, 由多项式函数的连续性知也有

$$D = a_1 a_2 \cdots a_n + x_1 a_2 \cdots a_n + a_1 x_2 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} x_n.$$

注: 此例题的结论很重要, 很多习题或考题中的行列式都是其特例.

1° 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = b$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a - b$ 时,

$$D = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a - b)^{n-1} [a + (n - 1)b],$$

这是一个需要记住的结果(公式).

2° 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 时,

$$D = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 + a_n \end{vmatrix} \\ = a_1 a_2 \cdots a_n + a_2 a_3 \cdots a_n + a_1 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}.$$

3° 当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = -m$ 时,

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} = (x_1 + \cdots + x_n - m)(-m)^{n-1}.$$

4° 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 2$, $a_i = i - 2$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 时,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} = (n - 2)! (-2).$$

当然, 对于 1°、2°、3° 和 4° 的行列式不一定要用例 1.4.4 中的方法计算, 因为它们比例 1.4.4 中的行列式特殊(简单), 可以有更简单的方法.

2. 简化

利用行列式的性质将多数位置上的元素化为零, 再处理简化后的行列式. 当 n 阶行列式各行(列)元素之和全相等时, 可将 $n - 1$ 列(行)元素都加到选定的一列(行)上, 再提出公因子可达到初步简化行列式的目的. 当行列式相邻两行(列)间元素相差不大(或有规律)时, 可采用逐行(列)相减的方法将行列式简化.

【例 1.4.5】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

解: 先将第 2, 3, $\cdots$, n 列元素都加到第 1 列得

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}n(n+1) & 2 & 3 & \cdots & n \\ \frac{1}{2}n(n+1) & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2}n(n+1) & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{再自第 } n \text{ 行开始“下减上”逐行相减得}} \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按第 1 列展开}} \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{换行}} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{例 1.4.4 之注}} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \frac{1}{2}n(n+1) [(1-n) - 1]^{n-2} [(1-n) + n - 2]$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{1}{2}(n+1)n^{n-1}.$$

3. 降阶法和递推法

该法是将高阶行列式的计算转化为较低阶的行列式的计算. 例如, 按某一行(列)展开, 把给定的 n 阶行列式 D_n 用同样形式的 $n-1$ 阶(以及更低阶)行列式表达出来, 得到递推关系式, 再由递推关系式求出 D_n .

【例 1.4.6】 计算行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$