大学课程
辅导与应试
系列丛书

●南北名校联合 ●四方名师打造 ●天下名品汇粹

线性代数
释疑解难

曹永林 徐绥 游宏 编著

- 专题讲解
- 重点阐释
- 例题精析
- 答疑解惑

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

线性代数

释疑解难

线性代数释疑解难

曹永林　　徐绥　　游宏　编著

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数释疑解难/曹永林,徐绥,游宏编著.—天津:天津大学出版社,2005.1

ISBN 7-5618-2089-5

Ⅰ.线... Ⅱ.①曹...②徐...③游... Ⅲ.线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 004650 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
网　　址 www.tjup.com
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷 永清县晔盛亚胶印有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 170mm×240mm
印　　张 11.5
字　　数 252 千
版　　次 2005 年 1 月第 1 版
印　　次 2005 年 1 月第 1 次
印　　数 1－3 000
定　　价 15.00 元

大学课程辅导与应试系列丛书
编纂指导委员会

（按姓氏笔画排列）

前　言

线性代数是高等学校理工科及经济、管理等学科普遍开设的一门重要课程，这门课程不仅是继续学习其他数学课程的基础，更是学生学习相关专业课程的重要语言和工具．瑞典数学家L．戈丁在《数学概观》中指出："如果不熟悉线性代数的概念，如线性性质、向量、线性空间、矩阵等等，要去学习自然科学，现在看来就和文盲差不多，甚至学习社会科学也是如此．"另一方面，由于计算机技术的飞速发展与广泛应用，使大量工程与科研中的问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，这就使得以处理离散量为主的线性代数课程占有越来越重要的地位，成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础．

线性代数课程的特点是概念多、符号多、运算规律多、定理多，内容纵横交错，知识联系紧密．学生只有充分理解概念，熟悉各种运算规律、计算方法，掌握定理的条件、结论和应用，善于总结经验，了解各章节间的内部联系，才能使所学知识融会贯通，真正学好这门课程．本书就是为了帮助读者实现上述目标而编写的．

本书围绕学生学习过程中的疑惑问题，非数学专业学生应掌握的重点和难点问题以及解题时常见的错误，以"问题—解答"的形式通过一般性的阐述和典型例题的讲解帮助读者把线性代数的基本理论、方法和技巧进行了梳理、归纳和总结．本书有些例题选自历届非数学专业研究生入学试题．一个原因是这些题目比较灵活，综合运用知识的特点比较明显；另一个原因是不少学生将来要报考研究生，熟悉这些题型大有好处．为了让读者能够将前后知识融会贯通，我们在解题时并没有严格考虑内容前后的逻辑顺序．

目前，有些大学将线性代数与解析几何融为一门课程，有利于代数与几何的相互渗透，相互支撑．考虑到国内大多数院校目前仍将线性代数作为一门独立课程的现状，本书没有将解析几何的内容吸纳进来．

本书可供大专院校、电大、职大和函大等广大学生学习线性代数时阅读和参考；对从事线性代数教学的教师也有一定的参考价值．

本书受天津大学出版社委托编写，山东理工大学曹永林教授为各章拟定初稿，并对最后的文稿作了部分修改；天津大学徐绥教授在此基础上加工、整理，并执笔成文；哈尔滨工业大学游宏教授对该书作了策划、补充、审核．

本书在编写过程中参考了大量线性代数辅导、解题类书籍，在此向这些书籍的编者们一并致谢．限于作者水平，书中不当之处在所难免，敬请读者批评指正．

编者
2004年1月

目　录

第1章 行 列 式

行列式理论是由于解线性方程组的需要建立起来的，它在数学本身或其他科学分支中都有广泛的应用.我们试图结合行列式的概念、基本性质及计算方法中经常出现的疑难探讨以下几个问题.

问题1.1 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$是$n$阶行列式$|a_{ij}|_n$展开式中的一项的条件是什么？若$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$是$n$阶行列式$|a_{ij}|_n$展开式中的一项，它前面所带的符号如何确定？

答： 因为n阶行列式展开式中的每一项都是行列式中位于不同行、不同列的n个元素的乘积，所以当且仅当$i_1i_2\cdots i_n$和$j_1j_2\cdots j_n$都是$1,2,\cdots,n$的全排列时，$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$是行列式$|a_{ij}|_n$展开式中的一项.

例如，令$D=|a_{ij}|_6$，$a_{21}a_{13}a_{42}a_{35}a_{64}a_{56}$是$D$的展开式中的项；而$a_{16}a_{62}a_{31}a_{55}a_{34}a_{43}$和$a_{34}a_{62}a_{51}a_{14}a_{26}a_{43}$均不是$D$的展开式中的项.

确定行列式$|a_{ij}|_n$展开式中的项$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$前面所带符号的方法有三种.

(1)将给定项中的n个元素按行足标的自然顺序排列好后，算出此时n个元素的列足标所组成的排列的逆序数s，则该项所带符号为$(-1)^s$.

(2)将给定项中的n个元素按列足标的自然顺序排列好后，算出此时n个元素的行足标所组成的排列的逆序数t，则该项所带符号为$(-1)^t$.

(3)计算$r=\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$，则该项所带符号为$(-1)^r$.

例如：确定6阶行列式$|a_{ij}|_6$展开式中的项$a_{21}a_{13}a_{42}a_{35}a_{64}a_{56}$前所带的符号.

解1 原项$=a_{13}a_{21}a_{35}a_{42}a_{56}a_{64}$，此时列足标组成的排列的逆序数$\tau(315264)=5$，故该项所带符号为$(-1)^5$，为“$-$”号.

解2 原项$=a_{21}a_{42}a_{13}a_{64}a_{35}a_{56}$，此时行足标组成的排列的逆序数$\tau(241635)=5$，故该项所带符号为“$-$”号.

解3 因为$\tau(214365)+\tau(132546)=5$，故该项所带符号为“$-$”号.

问题1.2 为什么当$n\geqslant 4$时，n阶行列式没有“对角线展开法则”？

答： 首先根据行列式的定义，n阶行列式的展开式是$n!$项的代数和，而按照2阶、3阶行列式展开的对角线法则那样展开n阶行列式只得到$2n$项的代数和.当$n\geqslant 4$时，$n!\neq 2n$.另外，在2阶、3阶行列式的对角线展开法则中，斜对角线（右上角到左下角）上所有元素乘积这一项前带的符号总是负的.但当$n\geqslant 4$时，n阶行列式斜对角线上n个元素乘积这一项所带符号并不总是负的.

例如，$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & e \\ 0 & b & f & 0 \\ 0 & g & c & 0 \\ h & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=abcd+efgh-ebch-afgd.$

其中项 $efgh$ 前带“+”号；$ebch$ 和 $afgd$ 在按“对角线展开法则”展开时不会出现.

因此，当 $n\geq 4$ 时，对 n 阶行列式不能按所谓的“对角线法则”展开.

问题 1.3 计算行列式时，行列式定义所起的作用是什么？

答： 对于很多计算题，只要我们熟悉行列式的基本性质和一些特殊行列式(如上、下三角形和对角形行列式)的计算公式，即使不知道(或忘记了)行列式的定义，照样可以解决问题.

【例 1.3.1】 计算：

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解： 先将 D 的第 n 行元素依次与第 $n-1,n-2,\cdots,2,1$ 行交换，再将所得新行列式的第 n 行与 $n-1,n-2,\cdots,2$ 行交换，如此继续下去，直至第 n 行与第 $n-1$ 行交换，共交换了

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}\text{次}.$$

因此

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}=\begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!.$$

事实上，行列式的基本性质再添加对角形行列式的计算公式与行列式的定义是等价的.这样看来，行列式的定义在解题时岂不是真的没有用了？事实并非如此，有些问题还是需要利用行列式的定义才能快捷地解决.

【例 1.3.2】 证明下面的 2 001 阶行列式 D 非零，这里

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2\,000 & 2\,001 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & 2\,001^2 & 2\,002^2 \\ 3^2 & 4^3 & \cdots & 2\,002^3 & 2\,002^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2\,001^{2\,001} & 2\,002^{2\,001} & \cdots & 2\,002^{2\,001} & 2\,002^{2\,001} \end{vmatrix}.$$

证： 根据行列式的定义，在 D 的展开式中，除去斜对角线上元素的积

$$2\,001\cdot 2\,001^2\cdots 2\,001^{2\,001}$$

为奇数外，其余各项都至少含有一个斜对角线下方的元素作为因子，而斜对角线下方的元素都是 2 002 的方幂，为偶数，所以 D 的值必为奇数.因此 $D\neq 0$.

【例 1.3.3】 在一个 n 阶行列式中，等于零的元素如果多于 (n^2-n) 个，那么这个

n 阶行列式必为零.

证： 因为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

由 n 阶行列式的定义知行列式 D_n 的值是 $n!$ 项代数和，而其中每一项都是 n 个元素的乘积，这 n 个元素又需取自不同行不同列.

又 n 阶行列式 D_n 中一共有 n^2 个元素，如果等于零的元素比 (n^2-n) 还多，那么其中不等于零的元素一定比 $n^2-(n^2-n)=n$ 还少，也就是说 D_n 中最多有 $(n-1)$ 个元素不等于零，所以 D_n 的 $n!$ 项中每一项的 n 个元素中必有零元素出现. 即 $n!$ 项的每一项都是零，故 $D_n=0$.

【例 1.3.4】 用行列式的定义证明：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

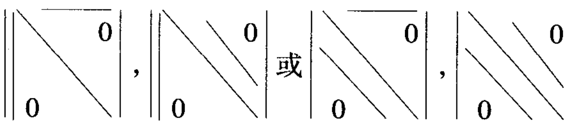
证： 考虑展开式中的一般乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，其中 a_{3j_3}、a_{4j_4}、a_{5j_5} 分别取自第 3、4、5 行，它们又不能取自相同的列，故这 3 个数中最多有 2 个分别取自第 1 列和第 2 列，因而至少有 1 个取自后 3 列，从而至少有 1 个数为零.

问题 1.4 计算 n 阶行列式的基本思路、策略、常用技巧及方法有哪些?

答： 通过下面例题说明常用的计算 n 阶行列式的基本思路、策略、技巧和方法.

1. 三角化

将给定的行列式化成上(下)三角形行列式. 一般地，下列形式的行列式均可考虑三角化.



【例 1.4.1】 计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & x_n \end{vmatrix}.$$

解： 所给行列式属于 $\begin{vmatrix} \diagdown\diagdown & 0 \\ 0 & \diagdown \end{vmatrix}$ 形式.

(1) 当 $x_1x_2\cdots x_n\neq 0$ 时，先将第 $n+1$ 列的 $\frac{a_n}{x_n}$ 倍加到第 n 列，再将第 n 列的 $\frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}$ 倍加到第 $n-1$ 列，如此进行下去，最后将第 2 列的 $\frac{a_1}{x_1}$ 倍加到第 1 列得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_1a_2}{x_1x_2}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{x_1x_2\cdots x_n} & * & * & \cdots & 1+\frac{a_n}{x_n} & 1 \\ 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_1a_2}{x_1x_2}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{x_1x_2\cdots x_n}\right)x_1x_2\cdots x_n$$

$$=\prod_{i=1}^{n}x_i+a_1x_2x_3\cdots x_n+a_1a_2x_3\cdots x_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1}x_n+\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

(2) 当 $x_1x_2\cdots x_n=0$ 时，由多项式函数的连续性可知也有

$$D_{n+1}=\prod_{i=1}^{n}x_i+a_1x_2x_3\cdots x_n+a_1a_2x_3\cdots x_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1}x_n+\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

【例 1.4.2】 计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & & & \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & & \\ & -1 & 1-b_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_n \\ & & & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

解： 所给行列式属于 $\begin{vmatrix} \diagdown\diagdown & 0 \\ 0 & \diagdown\diagdown \end{vmatrix}$ 形式.

先将第 1 行加到第 2 行，再将第 2 行加到第 3 行，如此进行下去，最后将第 n 行加到第 $n+1$ 行得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & & & \\ 0 & 1 & b_2 & & \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & b_n \\ & & & 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

【例 1.4.3】 计算：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n).$$

解: 将第 $2,3,\cdots n+1$ 列分别乘以 $-\frac{c_1}{a_1},-\frac{c_2}{a_2},\cdots,-\frac{c_n}{a_n}$ 后都加到第 1 列得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n.$$

【例 1.4.4】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1+x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & a_2+x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & a_n+x_n \end{vmatrix}.$$

解: 先将各位置上的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 设法尽可能多地化为零,第 1 行乘以 -1 后分别加到第 $2,\cdots,n$ 行,得

$$D=\begin{vmatrix} a_1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad \left(属于\begin{vmatrix} \diagdown & & 0 \\ & \diagdown & \\ 0 & & \diagdown \end{vmatrix}形式\right).$$

(1) 当 $a_2a_3\cdots a_n\neq 0$ 时,将第 $2,3,\cdots,n$ 列分别乘以 $\frac{a_1}{a_2},\frac{a_1}{a_3},\cdots,\frac{a_1}{a_n}$ 后都加到第 1 列得

$$D=\begin{vmatrix} a_1+x_1+\frac{a_1x_2}{a_2}+\cdots+\frac{a_1x_n}{a_n} & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1+x_1+\frac{a_1x_2}{a_2}+\cdots+\frac{a_1x_n}{a_n}\right)a_2a_3\cdots a_n$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n + x_1 a_2 \cdots a_n + a_1 x_2 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} x_n .$$

(2) 当 $a_2 a_3 \cdots a_n = 0$ 时，由多项式函数的连续性知也有

$$D = a_1 a_2 \cdots a_n + x_1 a_2 \cdots a_n + a_1 x_2 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} x_n .$$

注： 此例题的结论很重要，很多习题或考题中的行列式都是其特例.

1° 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = b, a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a - b$ 时，

$$D = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}[a+(n-1)b],$$

这是一个需要记住的结果（公式）.

2° 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 时，

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n + a_2 a_3 \cdots a_n + a_1 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} .$$

3° 当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = -m$ 时，

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} = (x_1 + \cdots + x_n - m)(-m)^{n-1} .$$

4° 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 2, a_i = i - 2, i = 1, 2, \cdots, n$ 时，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} = (n-2)!\ (-2) .$$

当然，对于 1°、2°、3°和 4°的行列式不一定要用例 1.4.4 中的方法计算，因为它们比例 1.4.4 中的行列式特殊（简单），可以有更简单的方法.

2. 简化

利用行列式的性质将多数位置上的元素化为零，再处理简化后的行列式. 当 n 阶行列式各行（列）元素之和全相等时，可将 $n-1$ 列（行）元素都加到选定的一列（行）上，再提出公因子可达到初步简化行列式的目的. 当行列式相邻两行（列）间元素相差不大（或有规律）时，可采用逐行（列）相减的方法将行列式简化.

【例 1.4.5】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

解： 先将第 2,3,…,n 列元素都加到第 1 列得

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{2}n(n+1) & 2 & 3 & \cdots & n \\ \frac{1}{2}n(n+1) & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2}n(n+1) & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{再自第 } n \text{ 行开始“下减上”逐行相减得}}\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{换行}}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{例 1.4.4 之注}}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\frac{1}{2}n(n+1)[(1-n)-1]^{n-2}[(1-n)+n-2]$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{1}{2}(n+1)n^{n-1}.$$

3. 降阶法和递推法

该法是将高阶行列式的计算转化为较低阶的行列式的计算.例如,按某一行(列)展开,把给定的 n 阶行列式 D_n 用同样形式的 $n-1$ 阶(以及更低阶)行列式表达出来,得到递推关系式,再由递推关系式求出 D_n.

【例 1.4.6】 计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$