

赵国生 著

磁滞数学模型及 考虑磁滞时磁场数值计算



黄河水利出版社

磁滞数学模型及考虑磁滞时 磁场数值计算

赵国生 著

黄河水利出版社

内 容 提 要

本书首先对磁滞的数学模型及考虑磁滞时磁场数值计算方面的研究状况进行了综述,然后介绍了一些典型的标量及矢量 Preisach 磁滞模型,对这些数学模型中涉及的一些概念进行了详细的讨论,同时也对作者提出的非线性矢量磁滞模型及动态矢量磁滞模型作了介绍,在此基础上,提出了考虑磁滞效应时磁场的数值计算方法以及磁滞电机的数值计算方法,最后探讨了磁滞多值性的人工神经网络模拟方法。

本书可作为从事磁记录、电机及电器的磁场数值计算等领域的广大科研人员及在校研究生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

磁滞数学模型及考虑磁滞时磁场数值计算/赵国生著.

郑州:黄河水利出版社,2004.8

ISBN 7-80621-814-9

I. 磁… II. 赵… III. ①磁滞-数学模型②磁场-数值计算 IV. 0482.53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 082715 号

出版社:黄河水利出版社

地址:河南省郑州市金水路 11 号

邮政编码:450003

发行单位:黄河水利出版社

发行部电话及传真:0371-6022620

E-mail:yrp@public.zz.ha.cn

承印单位:黄河水利委员会印刷厂

开本:850 mm×1 168 mm 1/32

印张:4.625

字数:114 千字

印数:1—1 000

版次:2004 年 8 月第 1 版

印次:2004 年 8 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7-80621-814-9/O·12

定价:15.00 元

前 言

磁滞现象存在于磁记录、电机、变压器、控制电器及各种电磁设备中,然而在这些设备的传统的磁场数值计算中,并不考虑磁性材料的磁滞,这样就给这些设备的运行特性的精确计算、优化设计等方面带来计算误差,如电机、变压器的瞬变运行特性分析中忽略磁滞效应会带来不少的计算误差。迄今为止,还未曾出版过关于磁滞模型及考虑磁滞时磁场数值计算方法的书籍。

本书首先对磁滞的数学模型及考虑磁滞时磁场数值计算方面的研究状况进行了综述,然后介绍了一些典型的标量及矢量 Preisach 磁滞模型,对这些数学模型中涉及的一些概念进行了详细的讨论,同时也对作者提出的非线性矢量磁滞模型及动态矢量磁滞模型作了介绍,在此基础上,提出了考虑磁滞效应时磁场的数值计算方法以及磁滞电机的数值计算方法,最后探讨了磁滞多值性的人工神经网络模拟方法。

本书是本人在原博士论文的基础上改编而成的。博士论文是在导师李朗如教授的悉心指导下完成的,从论文的选题直到最后完成都倾注了导师的大量心血。李教授严谨的治学风范、渊博的知识、敏锐的洞察力,给本人以极大的启迪;导师献身祖国科学与教育事业的崇高品质和高度责任感,是本人成长道路上的楷模,在此谨向导师表示深深的感谢并致以崇高的敬意。

本书可作为从事磁记录、电机及电器的磁场数值计算等领域广大科研人员及在校研究生的参考书。本书在章节安排、内容阐述等方面会存在不少问题和缺点,希望读者能给予支持和帮助,并欢迎大家批评指正。

作 者

2004 年 5 月

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 磁滞数学模型的研究概况	(1)
1.2 磁滞媒质中磁场数值计算的研究概况	(9)
1.3 磁滞回线的模拟方法研究概况	(13)
1.4 主要研究工作	(14)
第 2 章 磁滞的数学模型	(15)
2.1 标量磁滞模型	(15)
2.2 矢量磁滞模型	(25)
2.3 几种特殊情况的 Preisach 模型	(30)
2.4 小结	(33)
第 3 章 Preisach 磁滞模型的分析与研究	(34)
3.1 Preisach 图(平面)	(34)
3.2 Preisach 分布函数	(36)
3.3 Preisach 模型的可逆性	(38)
3.4 考虑磁滞可逆性的一种非线性矢量 Preisach 模型	(42)
3.5 Preisach 模型的同余特性	(49)
3.6 小结	(51)
第 4 章 考虑媒质磁滞效应时二维静磁场的分析与计算	(53)
4.1 非线性方程组求解的不动点方法	(53)
4.2 考虑媒质磁滞效应时二维静磁场的分析方法	(57)
4.3 伽辽金有限单元法	(61)

4.4	磁场有限元方程的求解方法·····	(64)
4.5	计算示例·····	(68)
4.6	磁滞损耗的计算·····	(70)
4.7	算例·····	(74)
4.8	小结·····	(77)
第5章	旋转磁滞问题和交变磁滞问题的研究 ·····	(78)
5.1	旋转磁滞问题·····	(78)
5.2	交变磁滞模型·····	(83)
5.3	一个新的动态矢量 Preisach 模型·····	(89)
5.4	小结·····	(96)
第6章	磁滞电机的分析与计算 ·····	(98)
6.1	引言·····	(98)
6.2	磁滞电机参数的有限元计算·····	(98)
6.3	方波驱动电容分相磁滞电动机性能的解析计算 ·····	(104)
6.4	磁滞电机的二维有限元计算·····	(108)
6.5	计算实例·····	(112)
6.6	小结·····	(116)
第7章	人工神经网络在磁场数值计算中的应用 ·····	(118)
7.1	引言·····	(118)
7.2	磁滞多值性的人工神经网络模拟·····	(119)
7.3	小结·····	(124)
第8章	总结 ·····	(125)
	参考文献 ·····	(127)

第 1 章 绪 论

几十年来,磁滞数学模型的研究一直是磁学界对磁滞现象研究的焦点问题。本章首先阐述了标量磁滞、矢量磁滞、交变磁滞及旋转磁滞数学模型的研究情况,指出了存在的一些问题;然后对磁滞媒质中磁场的数值计算、磁滞损耗计算以及磁滞回线的模拟等问题的研究情况进行了介绍;最后提出了本书的主要研究工作。

1.1 磁滞数学模型的研究概况

1.1.1 标量磁滞模型的研究概况

滞后现象存在于科学研究领域的许多方面,它一直吸引着众多研究者的关注。如磁滞、介电电滞、机械滞后、吸收滞后、光学滞后、电子束滞后等。因此,建立一个通用的描述滞后现象的数学模型将有着重要的理论和工程实际意义,它 will 具有广阔的应用范围。

1935 年,德国物理学家 F. Preisach 提出了一个标量磁滞模型^[1],后来称为 Preisach 模型,该模型成了以后几十年来磁学界研究的焦点问题,并得到了进一步的改进与发展,取得了一些有价值的结果^[2-6]。如瑞利提出的在弱磁场的可逆磁化区域,磁化规律可以由瑞利磁滞回线表示,L. Neel 从微磁学出发提出了 Neel 模型;D. H. Everett 提出在两个相邻回转点之间的那段单值磁化曲线,磁化强度的增量可以由 Everett 函数表示等。但经典的 Preisach 模型中存在着一些缺点,一些实验现象不能成功地进行解释。如磁致伸缩效应(magnetostrictive),非同余性(noncongruency)及调节性(accomodation)等。同时经典的 Preisach 模型仅仅具有标量

性质,而且施加了一些不必要的限制。

在 20 世纪 70 年代,苏联数学家 M. Krasnoselskii 认为 Preisach 模型中包含着一个通用的思想^[7]。他从这个模型中摒弃掉具体的物理意义,用一种纯数学的形式表示,这样就得到了一种描述任何物理过程的滞后现象的新的通用数学工具。同时, M. Krasnoselskii 方法也深刻地揭示了 Preisach 模型的唯象特性;相应地又提出了另一个问题,即在什么条件下,这个模型才能描述真实的滞后非线性问题。

经典 Preisach 模型的数学描述中包含擦除特性(Wiping out property)和同余特性(Congruency Property)两个特性,这两个特性构成了用经典 Preisach 模型描述真实滞后非线性现象的充分必要条件^[8]。然而,该充分必要条件却构成了对经典 Preisach 模型的应用范围的限制。擦除特性或多或少是成立的(对于不同物理背景的滞后现象),而同余特性则过于严格,大大地减小了经典 Preisach 模型的应用范围。同时,经典 Preisach 模型中的单元磁滞算子只有两种可能取值。因此,它不能对磁滞的可逆性进行有效的描述(虽然有人在特定情况下也在一定程度上对经典 Preisach 模型的可逆性给予描述和进行了论证^[9])。

为了放宽经典 Preisach 数学模型的一些限制条件,以便利用经典 Preisach 数学模型来处理实际问题,许多学者对此进行了深入的研究,提出了不少描述磁滞现象的数学模型。研究领域涉及到铁磁材料、磁记录材料,且考虑到了磁致伸缩现象及磁滞效应,从静磁场到交变磁场、从标量模型到矢量模型、从各向同性材料到各向异性材料都予以了考虑。

I. D. Mayergoyz 对磁滞数学模型的研究最为深入,他从对经典 Preisach 数学模型的分布函数 $\mu(\alpha, \beta)$ 的改进入手,提出函数 $\mu(\alpha, \beta)$ 应依赖于目前的输入值(或外加输入的过去极值)。从分布函数依赖于外加输入的极值出发,推出了约束 Preisach 模型

(The Restricted Preisach Model)^[10];从分布函数依赖于目前的输入值出发,提出了非线性 Preisach 模型(The Non-Linear Preisach Model)的两种表示方式。通常将这两种模型统称为输入依赖关系模型(The Input-Dependent Preisach Model)^[11]。这两种模型对经典 Preisach 模型的擦除特性没作修改,而修改了其同余特性,从而大大地放宽了其适用范围。在标量情况下可以证明非线性 Preisach 模型的两种表示方式^[12]是等价的。由于非线性 Preisach 模型的分布函数的确定需要拟合一阶、二阶回转曲线上的测试值,而经典的 Preisach 模型只需拟合一阶回转曲线上的测试值,因此非线性 Preisach 模型在预计高阶回转曲线上的准确性大大地提高了,这一点也为实验所证实^[10,11],同时,由于非线性 Preisach 模型中增加了一项描述可逆磁化过程贡献的项,这改变了经典模型中的零初始磁化率的限制,使它对磁滞过程的描述更接近于实际。同时,实验上验证了采用约束 Preisach 模型和非线性 Preisach 模型的所谓“平均”模型效果更好^[13]。

M. L. Hodgdon 等人提出了一种标量磁滞模型^[14],该模型认为 H 和 B 之间的本构关系由一微分方程来描述。选用不同的参数,可以描述不同铁磁材料的磁滞回线。Hodgdon 模型的一个有趣的特性在于它能够解释微小回线的调节现象。F. Ossart 和 T. A. Phung 对非线性 Preisach 模型和 Hodgdon 模型进行了实验上的比较研究,虽然 Hodgdon 模型易于理解和实现,但精度较差,且需要数值积分计算,而且参数的选择具有一定的经验性。而非线性 Preisach 模型难于理解,需要大量的实验数据及插值运算,局部极大值和极小值必须予以记录,但该法最后的计算公式简单,而且结果精度较高^[15]。为了能够对磁致伸缩现象及磁滞效应进行描述,Mayergoyz 进一步将其非线性模型加以推广,通过在其分布函数中引入与应力相关的项,而提出了描述磁致伸缩现象的 Preisach 模型^[16]。同时又通过非线性 Preisach 模型中引入区域

指示函数,在恒定输入信号上加一个微扰信号,把非线性 Preisach 模型中的输出作为一个随机过程来描述磁滞效应,提出了考虑磁滞效应时的随机输入的输入依赖 Preisach 模型^[17],并对联合密度函数的计算方法予以描述,其后 Mayergoyz 又将其磁滞模型扩充到超导情况^[12]。此外,其他一些学者也从不同的角度提出了一些标量磁滞模型^[18]。

E. Della Torre 提出了两个具有代表性的标量磁滞模型,它们是 Moving 模型和 Product 模型,这两个模型常被称为磁化强度依赖关系模型(Magnetization-Dependent Preisach Model)或输出依赖关系模型(Output-Dependent Preisach Model)^[19,20]。在 Moving 模型中,认为剩磁不仅与外加场有关,而且也与磁化强度有关。它是通过把 Preisach 模型中的两个参数都加上一项 αM 而得出的。Moving 模型考虑到了粒子相互作用的影响,修改了经典模型对同余性的限制^[21],同时把可逆分量单独建模,并把其加在不可逆分量中。在 Product 模型中也修改了对经典模型的同余性限制,把它变为非线性同余特性。该模型引入了一项可逆磁化分量,因此它包含了对可逆磁化过程的处理。Torre 又通过进一步将 Product 模型中的残余 Preisach 函数分解为两个相同单变量函数的乘积的形式而提出其双线性 Product 模型^[22]。

1.1.2 矢量磁滞模型的研究概况

前面讨论了标量磁滞模型,在许多工程应用领域中,使用标量磁滞模型就可以满足要求,但在有些情况下,它们并不足以描述材料的磁滞特性,取而代之的是必须考虑矢量磁滞模型。

最早的矢量磁滞模型是 Stoner-Wohlfarth(S - W)模型^[23],该模型是从微磁学的角度出发,认为磁化过程的平衡状态应为其能量的最小值状态。磁化强度的方向应由所谓的“星形规则”来确定,该模型经过进一步的发展后应用于磁记录材料领域^[24]。但由于 S - W 模型是由具有对称回线的粒子的集合体组成的,它没有描

述粒子之间的相互作用,因此不能描述非对称的微小回线,而且在计算上也是比较慢的,该模型也未考虑到过去历史上的哪一部分会对未来产生影响。后来发展起来的矢量磁滞模型有一些是对 S - W 模型的算法加以修改而得出来的^[25,26]。

I. D. Mayergoyz 则从经典的标量 Preisach 模型出发,把矢量模型看成是标量模型在各个方向上的叠加,以经典的标量 Preisach 模型作为主要的构成模型,提出了二维、三维矢量 Preisach 模型^[27],并讨论了矢量模型中分布函数的确定方法,但由于 Mayergoyz 的矢量磁滞模型是从经典 Preisach 模型推出的,因此它不能有效地描述矢量磁滞的可逆过程。不过,该模型由于涉及需要确定的参数较少,用它来计算矢量磁滞行为还是比较切实可行的。

G. Friedman 认为 S - W 模型和 Mayergoyz 的矢量磁滞模型是一个更加通用的矢量磁滞模型的两种特殊情况,对两个模型的统一性进行了论证,从而提出了一个通用的矢量 Preisach 磁滞模型^[28]。

为了能够描述磁滞的矢量特征,E. Della Torre 又把自己提出的 Moving 模型和 Product 模型扩充到了矢量情况^[29],在其矢量 Moving 模型中,采用了多维空间的概念,将标量算子 D 变成了矢量算子 $\vec{D}$,分布函数也相应地采用矢量形式。矢量 Moving 模型考虑到了粒子之间的矢量相互作用,它能够描述矢量可逆过程,是一个比较完善的矢量模型。在其矢量 Product 模型中,也包含了对磁化过程可逆分量的描述。此外,E. Della Torre 和 I. A. Beardsley 也分别对磁记录过程进行了矢量建模^[30,31]。同时,A. Bergqvist 又把描述铁磁磁滞的 Jile-Atherton 模型^[70]推广到矢量情况^[71]。

1.1.3 交变磁滞模型的研究概况

经典 Preisach 模型及其推广的各种模型虽然在对磁滞的描述上有很多优点,但它们仅仅是一个静态模型,模型中的磁化强度仅仅由外加场的变化历史决定,而不是由外加场的变化速率决定。

因此,在这些模型中并没有考虑到外加场的频率对输出产生的影响。而我们经常使用的是交流电,材料所经历的是交变场。在交变情况下的磁滞回线不同于静态磁滞回线,这一点已为实验所证实。因此,建立交变情况下的动态磁滞模型在工程技术中具有重要的实际意义和应用价值。但交变情况下的动态磁滞特性的研究相对比较复杂,它的影响因素较多,不仅取决于材料的电导率、磁导率,而且与外加磁场的变化频率及其波形(正弦波、方波或三角波)、磁矩向外加磁场方向旋转的速度相关,因此要考虑到磁畴的动态行为。

D. C. Jiles 对非导电材料的动态磁化特性进行了研究。他把直流(静态)情况下的磁化曲线或磁滞回线看做是总磁化强度的一个平衡位置。在时态场作用下发生的微观过程可以看做是与该平衡位置具有一个偏差 ΔM 。研究表明: ΔM 满足一个带阻尼的简谐运动方程,即位移磁化强度是磁场波形的 Laplace 变换^[32]。

G. Bertotti 等对非导电材料在交变场的情况下,考虑金属铁磁材料的涡流影响时的磁化特性进行了研究。他通过一种统计方法,假定软磁材料的磁化过程由某些统计上独立的关联区域(叫做磁体)来描述涡流的影响^[33],从单个磁体时变场中的行为方程推出了磁化场随时间变化的方程^[34],并通过对动态磁滞回线及功率损耗的实验测定研究,指出了在每一点处的动态回线的宽度按磁化强度的瞬时变化率的开方规律而增加^[35],提出了一个描述运动的磁滞模型^[69]。

S. Hayano, M. Namiki 和 Y. Saito 根据磁畴理论,提出了描述动态磁化行为的 Chua-type 磁化模型^[36],并指出 Hodgdon 模型也是一种 Chua-type 模型,Chua-type 模型可以从考虑磁滞效应时的模型推出。

Mayergoyz 又分别从其非线性 Preisach 模型及他的矢量 Preisach 模型出发,通过在分布函数中引入与输出随时间变化率

相关联的项而得出了时变场中的标量及矢量 Preisach^[37,38]。但这两个模型中由于仅保留了幂级数展开式中的线性项,因而就形成了它对描述磁滞动态行为时的精度的限制。同时,由于这两个模型中的弛豫时间常数的测定比较困难,而且其动态矢量磁滞模型是从经典的 Preisach 模型出发而推出的,因此在实际的工程计算中还没有得到普遍使用。它保留了经典 Preisach 模型在描述磁滞非线性行为时的缺陷,该模型仅是一个描述各向同性媒质的动态矢量模型。

1.1.4 旋转磁化问题的数学模型研究概况

在磁头下通过的磁记录媒质所受的激励场不仅大小发生变化,其方向也不断地改变,而这种激励场的主要部分为旋转磁化场。在旋转磁通激励下,三相变压器及旋转电机的铁磁材料内部产生的磁滞不仅包含有交变磁滞,而且含有旋转磁滞。为了能够对电磁设备进行精确的分析与计算,以及电磁设备最优化设计的需要,旋转磁化问题必须予以考虑。

在旋转磁化场的激励下(无论大小是否改变),磁化强度也发生相应的旋转,但它的方向与外加磁场的方向并不在一条直线上,而是有一个滞后角。因此,仅用传统的标量磁滞模型不能够描述旋转磁化情况下的磁性材料的磁特性。由于经典 Preisach 模型有很多优点,Mayergoyz 等人将其扩展为矢量磁滞模型,但这些矢量磁滞模型仍不能很好地描述磁性材料的旋转磁化特性,有的甚至对旋转磁化问题并未予以考虑^[71]。如在强旋转磁场情况下,所有的标量磁滞模型都描述一个完整的磁滞回线,计算的旋转磁滞损耗是一个非零值,而在强磁场作用下由于磁化强度和磁场之间的夹角接近于零,旋转磁滞损耗应为零。因此,迫切需要建立一个考虑旋转磁化问题的矢量磁滞模型。

K. C. Wiesen 和 S. H. Charap 首先对旋转磁化问题进行了研究^[34],他们针对无晶粒取向的媒质提出了一个旋转磁滞模型。该

模型为 Preisach 单元的二分量响应增加了一个旋转自由度,同时用一个单密度函数来进行矢量磁滞计算。而先前的矢量 Preisach 模型都用两个或更多的密度函数来进行计算。同时他们指出,在旋转磁化情况下,Preisach 平面的构造也发生变化,此时,该平面可分解为可逆磁化区域(磁化强度与磁场强度保持相同的旋转方向)、不可逆磁化区域(磁化强度与磁场之间有一滞后角)及保持以前取向的区域。总的磁化强度应为密度函数在各个区域的积分后再进行矢量叠加,但该模型仅适用于外加场的量值为恒定值的旋转磁化问题。

Sunki Hong 提出了一个无晶粒取向媒质的旋转磁滞模型(Hong 模型),在该模型中,矢量磁滞算子已不再是仅有两种取向,它具有旋转能力并能记忆它们的方向,即该算子可以取任意的方向,这取决于总的磁化场的历史。同时也把 Preisach 平面分为可逆、不可逆及标量模型相关区域,并指出在旋转磁化场的量值发生变化时(椭圆磁化场),各个区域的形状也将发生相应的改变。该模型可以用来计算在磁化场大小发生变化情况下的旋转磁滞问题^[40,41]。

1.1.5 磁滞数学模型研究中存在的一些问题

擦除特性和同余特性是 Preisach 模型描述真实滞后非线性问题的充分必要条件,而经典 Preisach 模型对同余特性要求过于严格,Preisach 模型应该对粒子间的相互作用及可逆磁化过程予以描述,而经典 Preisach 模型对这一点却没有予以描述。以经典 Preisach 模型为基础而提出的一些改进的数学模型虽然在以上各方面进行了改进,但还是不够完善的。其中较为完善的模型有 Mayergoyz 的非线性模型及 E. Della Torre 的 Moving 模型及 Product 模型。

Preisach 平面技术是 Preisach 模型用来描述磁滞现象的基础,它的最重要的贡献在于它把一维多值问题转变成了用其上、下开

场来表示的二维平面内的单值问题, Preisach 平面内的点和磁化曲线上的点一一对应。但并不是所有材料的磁化过程都可以用 Preisach 平面来描述。Woodward 和 E. Della Torre 认为只有统计上稳定的材料才能用 Preisach 平面来描述^[42]。统计上稳定意味着, 如果磁滞算子的特征场 β 和 α 变为 β' 和 α' , 则一定存在一个磁滞算子, 其特征场由 β' 和 α' 分别变为 β 和 α 。

Preisach 模型中的分布函数的选择将直接影响到 Preisach 模型描述真实滞后现象的准确性及 Preisach 模型的各种特性。现有的各种 Preisach 模型中, 分布函数的确定通常要利用实验测定的主回线及一阶、二阶回转曲线的数据来进行大量的、比较复杂的插值运算而求得。而 Preisach 模型对微小回线的预计上的准确性则取决于它所拟合的回转曲线的阶数, 目前还没有建立可以很好地预计任意阶回转曲线的磁滞模型。并且由于 Preisach 分布函数是一个非稳定的量, 这个非稳定量的确定问题目前还未找到很好的解决方法。

由于交变情况下磁滞行为的复杂性, 目前提出的交变磁滞模型都考虑到了单个磁畴的变化行为, 因而涉及到很多需要由实验测定的微观参数, 而其他一些不涉及微观参量的模型(如 Mayergoyz 的动态模型), 其参数确定的方法也比较困难。因此, 利用交变情况下的动态磁滞模型来解决实际的工程计算问题还有一定的难度。

1.2 磁滞媒质中磁场数值计算的研究概况

在传统的磁场的数值计算中, 通常并未考虑媒质的磁滞效应, 磁密 $\vec{B}$ 和磁场 $\vec{H}$ 之间用一个单值函数来表示, 即使在高精度的数值计算中也仅仅是利用到了磁性材料的主磁滞回线, 而对于磁性材料的微小回线并未予以考虑。这虽然在一般的情况下能够满足

计算精度的要求,但为了更进一步提高其计算精度及优化设计的需要,必须借助于 Preisach 模型来处理考虑煤质磁滞效应时的磁场计算问题。对于依赖磁滞效应作为工作基础的电磁器件运行行为分析,则更加有赖于磁滞效应的计算的准确性。

1.2.1 磁场的分析与计算上的研究进展

在 Mayergoyz 之前, K. Suzuki 和 I. A. Beardsley 等人^[43,44]曾用矢量 Stoner-Wolofarth(S - W)模型,利用积分方程法对考虑磁滞效应时的静磁场问题在数值计算上做了一些成功的尝试。但由于 S - W 模型具有一些内在的缺陷(如不能描述非对称的微小回线,需要对几个变量积分,求解缓慢等),为了克服了这些缺陷, Mayergoyz 利用其提出的矢量 Preisach 模型,采用时间步长技术(time-stepping technique)来追踪磁化过程历史,建立了磁化强度之间的局部单值行为关系式,对考虑磁滞效应时各向同性媒质的二维、三维问题的积分方程法进行了讨论^[45,46]。

J. F. Ostiguy 和 P. P. Silvester 采用变分有限元方法,从能量或余能的泛函表达式出发,通过求泛函极值的方法对静磁场问题的求解方法进行了讨论,其方法是通过将整个变化过程的磁滞回线分成一系列的单值 $B - H$ 曲线,对每一段曲线引入该段的剩磁及导磁率,通过标量磁位来求解考虑磁滞时的磁场问题^[47]。此外, P. J. Leonard 和 D. Rodger 等也提出了采用分段单值函数,利用标量磁位的磁滞静磁场问题的非线性求解方案^[48]。采用分段单值函数来进行求解时,需要对整个磁场过程中对应于各段的剩磁进行实验上的测定,但采用标量磁位求解磁场问题有其局限性。

Piergiorgio Alotto 等从磁场的基本关系式出发,推出了考虑磁滞效应时求解静磁场问题的主控方程,并采用伽辽金有限元法来处理各向同性媒质中的静磁场的计算问题^[49],在其提出的计算方法中,引入了所谓“Preisach engines”的概念,并讨论了保证迭代过程收敛性的方法。

T. R. Koehler 和 D. R. Fredkin 则从微磁学上自由能的基本表达式出发,讨论了利用有限元法来处理微磁学中一些问题的方法,并提出了一个数字求解方法^[50]。

在交变场的数值计算上, O. Bottauscio 等提出了用标量 Preisach 模型及有限单元法来处理周期性磁场的方法^[51],它是通过将非线性函数 $H = \xi(B)$ 分解为线性项与非线性项的叠加,然后通过简单的迭代方法求解,但该方法求解起来较为困难。Y. Okada 和 H. Inoune 针对磁记录过程,采用 $\overline{T} - \Omega$ 法进行了考虑磁滞时的三维交变场进行了分析^[52]。该法没有采用 Preisach 模型,而是采用从磁畴概念出发的卷积模型理论来进行分析,由于在求解卷积模型理论方程中的一些困难而采用了坐标变换技术,并把有限元法与卷积模型理论有效地结合起来进行分析。但由于卷积模型理论在处理磁滞问题上的一些缺陷,因此它不能很有效地处理磁滞计算问题。

A. G. Jack 和 B. C. Mecrow 对于考虑磁滞和涡流效应时低频情况下的三维问题进行了分析^[53]。他们考虑了谐波产生的影响,但没有考虑磁滞微小回线的特性且假定磁滞的 $B - H$ 回线不随频率而改变(这与实际情况并不相符),并对时间步长法和时间周期近似法进行了比较,指出在周期性变化的问题上,时间周期近似法可减小计算的工作量,优于时间步长法。

此外, Sunki Hong 等人则利用了磁化强度依赖的 Preisach 磁滞模型,用有限单元法计算了磁滞电机内的磁场分布及转子上产生的平均转矩。

1.2.2 磁滞损耗的计算的研究进展

磁性媒质中的磁滞现象必然会伴随着损耗,磁滞损耗起源于媒质的不均匀及掺杂所引起的不可逆磁化,可逆磁化不会引起损耗。磁滞损耗的计算问题是一个很经典的问题,对该问题的求解一直局限于周期性变化的磁场情况。在该情况下,磁滞损耗等于