



注册工程师考试系列图书

注册土木工程师(岩土)执业资格考试

基础考试复习教程

(2004年·第二版)

北京市注册工程师管理委员会(结构) 编



人民交通出版社

China Communications Press

TU4-43

C150

注册土木工程师(岩土)执业资格考试

基础考试复习教程

(2004年·第二版)

北京市注册工程师管理委员会(结构) 编

QAS 84/04



人民交通出版社

China Communications Press

内 容 提 要

本书由北京市注册工程师管理委员会(结构)组织编写,其编写人员全部是从从事近几年注册岩土工程师基础考试培训工作的专家、教授。本书内容吸取了注册结构工程师基础考试培训教材和注册岩土工程师基础考试培训的经验,在上一版的基础上修订再版,以满足应考和培训之用。

本教程以考试大纲为依据,以现行规范、教材为基础进行编写,目的是为了指导考生复习,因此力求简明扼要,联系实际,着重于对概念和规范的理解运用,并注意突出重点概念。教程的每章后均附有参考习题,同时书后附模拟试题一份,可作为考生检验复习效果和准备考试之用。

本书适合参加注册岩土工程师基础考试的人员使用,是一本优秀的复习备考用书。

图书在版编目(CIP)数据

注册土木工程师(岩土)执业资格考试基础考试复习
教程/北京市注册工程师管理委员会编. —2版. —北
京:人民交通出版社, 2004.3
ISBN 7-114-04992-7

I. 注... II. 北... III. ①土木工程—工程技术人
员—资格考核—自学参考资料②岩土工程—工程技术人
员—资格考核—自学参考资料 IV. TU

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 017739 号

Zhuce Tumu Gongchengshi(Yantu) Zhiye Zige Kaoshi Jichu Kaoshi Fuxi Jiaocheng

注册土木工程师(岩土)执业资格考试基础考试复习教程

(2004 年·第二版)

北京市注册工程师管理委员会(结构) 编

正文设计:姚亚妮 责任校对:尹 静 责任印制:张 恺

人民交通出版社出版发行

(100013 北京和平里东街 10 号 010 64216602)

各地新华书店经销

北京鑫正大印刷有限公司印刷

开本:787×1092 1/16 印张:86 字数:2174 千

2003 年 1 月 第 1 版

2004 年 2 月 第 2 版

2004 年 2 月 第 2 版 第 1 次印刷 总第 3 次印刷

印数:7001—12000 册 定价:135.00 元

ISBN 7-114-04992-7

注册土木工程师(岩土)执业资格考试基础考试复习教程
编 委 会

主任委员 魏成林

副主任委员 于春普

主 编 曹纬浚

编 委 (以姓氏笔画为序)

于春普 刘世奎 乔春生 陈向东

钱民刚 曹纬浚 魏成林

第 二 版 前 言

建设部和人事部决定自 2002 年起实施注册岩土工程师执业资格考试制度。

为了帮助岩土工程师们准备考试,北京市注册工程师管理委员会(结构)两年中委托组织了有关注册岩土工程师的考试辅导工作。注册岩土工程师基础考试辅导的教师都是本专业有较深造诣的教授和高级工程师,分别来自北京建筑工程学院、北京工业大学、北京交通大学、北京工商大学和北京市建筑设计研究院。教师们以考试大纲为依据,以现行规范、教材为基础,为学员们编写了《教程》。《教程》的目的是为了指导复习,因此力求简明扼要,联系实际,着重对概念和规范的理解应用,并注意突出重点概念。

本《教程》是在北京市注册工程师管理委员会(结构)的组织下,严格按考试大纲编写的,《教程》吸收了注册结构工程师基础考试复习教程多年的教学实践经验,深受广大考生的欢迎。为满足更多应试考生复习的需要,今年我们又组织教师对《教程》进行了全面修订,并在每章中增加一节“复习指导”,主要帮助自学本《教程》的考生能更好地掌握重点,提高学习效果。参加本《教程》编写的教师如下:每一章微积分部分吴昌泽,线性代数部分贾玲华;第二章程学平;第三章毛怀珍;第四章刘燕;第五章钱民刚;第六章李兆年;第七章许小重;第八章许怡生;第九章陈向东;第十章朋改非;第十一章杨松林;第十二章李魁元;第十三章刘宝生;第十四章刘世奎;第十五章冯东;第十六章王健;第十七章吴景坤;第十八章乔春生。

本《教程》第一至第九章,为上午考试段内容;第十至第十八章,为下午考试段内容。考生在复习本《教程》时,应结合阅读相应的教材、规范。本《教程》每章后均附有参考习题,今年我们又组织教师编写了一本《注册土木工程师(岩土)执业资格考试基础考试复习题集》,编制试题 2600 多道,相当于每年考试试题量的 14 倍以上,绝大多数试题均附有提示和答案。建议考生在复习《教程》的同时,多做习题,这将对巩固和检验复习效果大有好处。

北京市注册工程师管理委员会(结构)

2004 年 2 月

主 编 致 考 生

一、注册岩土工程师在专业考试之前进行基础考试是和国外接轨的做法。通过基础考试并达到职业实践年限后就可以申请参加专业考试。基础考试是考大学中的基础课程,按考试大纲的安排,上午考试段考9科,120道题,4个小时,每题1分,共120分;下午考试段考8科,60道题,4个小时,每题2分,共120分;上下午共240分。试题均为4选1的单选题,平均每题时间2至4分钟,因此不会有复杂的论证和计算,主要是检验考生的基本概念和基本知识。考生在复习时不要偏重难度大或过于复杂的知识,而应将复习的主要注意力放在弄清基本概念和基本知识方面。

二、考生在复习本《教程》之前,应认真阅读“考试大纲”,清楚地了解考试的内容和范围,以便合理制订自己的复习计划。复习时一定要紧扣“考试大纲”的内容,将全面复习与突出重点相结合。着重对“考试大纲”要求掌握的基本概念、基本理论、基本计算方法、计算公式和步骤,以及基本知识的应用等内容有系统、有条理地重点掌握,明白其中的道理和关系,掌握分析问题的方法。同时还应会使用为减少计算工作量或简化、方便计算所制作的表格等。《教程》中每章后均有一节“复习指导”,具体说明本章的复习重点、难点和复习中要注意的问题,建议考生认真阅读每章的“复习指导”,参考“复习指导”的意见进行复习。在对基本概念、基本原理和基本知识有一个整体把握的基础上,对每章节的重点、难点进行重点复习和重点掌握。

三、注册岩土工程师基础考试上、下午试卷共计240分,上、下午不分段计算成绩,这几年及格线都是55%,也就是说上下午试卷总分达到132分就可以通过。因此,考生在准备考试时应注意扬长避短。从道理上讲,自己较弱的科目更应该努力复习,但毕竟时间和精力有限。如有的考生在学校时《电工与电子技术》没有学好,短时间内要掌握好比较困难,而《电工与电子技术》总共只有12分,只占总分的5%,也就是说,即使《电工与电子技术》一分未得,其他科目也还有228分,从228分中考132分是完全可以做到的。因此考生可以根据考试分科题量、分数分配和自己的具体情况,计划自己的复习重点和主要得分科目。当然一些主要得分科目是不能放松的,如《高等数学》24题(上午段)24分;《结构力学与结构设计》12题(下午段)24分;《工程地质》10题(下午段)20分;《岩体工程与基础工程》10题(下午段)20分,都是不能放松的。其他科目则可根据自己过去对课程的掌握情况有所侧重,争取在自己过去学得好的课程中多得分。

四、在考试中拿到试卷时,建议考生不要顺着题序顺次往下做。因为有的题会比较难,有的题你不很熟悉,耽误时间会比较多,以致到最后时间不够,题做不完,有些题你会做但时间来不及了,这就得不偿失了。建议考生做题过程分三遍来做:

1. 首先用15~20分钟将题从头到尾看一遍,一是将自己很熟悉很有把握的题答下来;二是将那些需要稍加思考估计能在平均答题时间里做出的题做个记号。这里说的平均答题时间是指,上午段4个小时考120道题,平均每小时30道题,每题2分钟;下午段4个小时考60道题,平均每小时15道题,每题4分钟,这个2分钟(上午)、4分钟(下午)就是平均答题时间。将估计在这个时间里能做出来的题做上记号。

2. 第二遍就做这些做了记号的题,这些题应该在考试时间里能做完,做完了这些题,可以说就考出了你的基本水平,不管你基础如何,复习得怎么样,考得如何,至少不会因为题没做完而遗憾了。

3. 这些自己会做或基本会做的题做完以后,如果还有时间,就做那些需要稍多花费时间的题,能做几个算几个,并适当抽时间检查一下已答题的答案。

4. 考试时间将尽时比如还剩 5 分钟要收卷了,这时你就应看看还有多少道题没有答,这些题确实不会了,建议你也不要放弃。既然是单选答案,那也不妨估个答案,答对了也是有分的。建议你回头看看已经答了的答案,A、B、C、D 各有多少,虽然整个卷子四种答案的数量并不一定是平均的,但还是可以这样考虑,看看已经答了的题 A、B、C、D 中哪个答案最少,然后将不会做没有答的题按这个前边最少的答案通填,这样其中会有 $1/4$ 可能还会多于 $1/4$ 的题能得分,如果你前边答对的题离及格正好差几分,这样一补充就能及格了。

五、基础考试是不允许带书和资料的,考试时发给一本《考试手册》,考后收回。考试中需要用到的公式和图表手册上都有,但翻手册是需要时间的,因此,常用的公式和数据还是应该记住。另外也要善于翻手册,要能很快地找到需要的公式和图表,这样才能加快答题速度。

六、《教程》每章后均附有参考习题和答案。另外,我们 2004 年还专门为考生编制了一本《注册土木工程师(岩土)执业资格考试基础考试复习题集》,题集编入习题 2600 多道,绝大多数试题均提供了解题提示和答案。建议考生在复习好《教程》内容的基础上,多做习题。多做习题能帮助巩固已学的概念、理论、方法和公式等,并能发现自己的不足,哪些地方理解得不正确,哪些地方没有掌握好;同时熟能生巧,多做题能提高解题速度。本《教程》在最后提供了一套模拟试题,建议考生在复习完《教程》以后,集中时间,排除干扰,模拟考试气氛,将模拟试题全部做一遍,以接近实战地检验一下自己的复习效果。

相信这本《教程》和《复习题集》能帮助大家准备好考试。

最后,祝愿各位考生取得好成绩!

曹纬浚
2004 年 2 月

目 录

第一章 高等数学	1
第一节 一元函数微分学.....	1
第二节 一元函数积分学.....	5
第三节 空间解析几何与向量代数	26
第四节 多元函数微分学	33
第五节 多元函数积分学	40
第六节 级数	50
第七节 常微分方程	57
第八节 矩阵计算	62
第九节 概率论与数理统计	70
第十节 矢量分析	85
第十一节 复习指导	86
参考习题及答案	92
第二章 普通物理	105
第一节 热学.....	105
第二节 波动学.....	116
第三节 光学.....	123
第四节 复习指导.....	136
参考习题及答案	137
第三章 普通化学	143
第一节 物质结构与物质状态.....	143
第二节 溶液.....	160
第三节 化学反应方程式、化学反应速率与化学平衡	168
第四节 氧化还原与电化学.....	175
第五节 有机化合物	83
第六节 复习指导.....	199
参考习题及答案.....	202
第四章 理论力学	208
第一节 静力学.....	208
第二节 运动学.....	232
第三节 动力学.....	249
第四节 复习指导.....	274
参考习题及答案.....	276
第五章 材料力学	293
第一节 概论.....	293

第二节	内力计算与内力图	299
第三节	应力计算与强度条件	304
第四节	变形计算与刚度条件	311
第五节	变形比较法解超静定问题	315
第六节	应力状态与强度理论	318
第七节	组合变形	324
第八节	压杆稳定	329
第九节	能量法简介	332
第十节	复习指导	334
	参考习题及答案	336
第六章	流体力学	353
第一节	流体力学定义及连续介质假设	353
第二节	流体的主要物理性质	353
第三节	流体静力学	358
第四节	流体动力学	368
第五节	流动阻力和能量损失	382
第六节	孔口、管嘴及有压管流	391
第七节	明渠均匀流	403
第八节	渗流定律、井和集水廊道	408
第九节	量纲分析和相似原理	414
第十节	流体运动参数的测量	420
第十一节	复习指导	425
	参考习题及答案	426
第七章	计算机应用基础	432
第一节	计算机基础知识	432
第二节	中文 Windows 98 操作系统	435
第三节	FORTRAN 语言程序设计	441
第四节	复习指导	455
	参考习题及答案	457
第八章	电工电子技术	464
第一节	电场与磁场	464
第二节	电路的基本概念和基本定律	468
第三节	直流电路的解题方法	474
第四节	正弦交流电路的解题方法	476
第五节	电路的暂态过程	489
第六节	变压器、电动机及继电器接触控制	492
第七节	二极管、稳压管	502
第八节	直流电源	504
第九节	三极管	507
第十节	基本放大电路	509

第十一节 集成运算放大器	517
第十二节 门电路和触发器	521
第十三节 复习指导	529
参考习题及答案	531
第九章 工程经济	542
第一节 现金流量构成与资金等值计算	542
第二节 投资经济效果评价方法和参数	555
第三节 不确定性分析	564
第四节 投资项目的财务评价	567
第五节 价值工程	573
第六节 复习指导	577
参考习题及答案	578
第十章 土木工程材料	583
第一节 材料科学与物质结构基础知识	583
第二节 气硬性无机胶凝材料	591
第三节 水泥	594
第四节 混凝土	605
第五节 沥青及改性沥青	621
第六节 建筑钢材	627
第七节 木材	636
第八节 石材	638
第九节 粘土	639
第十节 复习指导	641
参考习题及答案	645
第十一章 工程测量	651
第一节 测量基本概念	651
第二节 水准测量	653
第三节 角度测量	657
第四节 距离测量及直线定向	661
第五节 测量误差的基本知识	666
第六节 控制测量	671
第七节 地形图测绘	678
第八节 地形图应用	680
第九节 建筑工程测量	682
第十节 全球定位系统(GPS)简介	687
第十一节 复习指导	688
参考习题及答案	690
第十二章 职业法规	702
第一节 法规基本体系	702
第二节 与工程设计有关的法规	703

第三节	设计文件编制的有关规定	707
第四节	工程建设强制性标准的有关规定	708
第五节	注册建筑师的权利、义务及注册、执业等方面的规定	710
第六节	房地产开发程序	712
第七节	工程监理的有关规定	715
第八节	建设工程招投标方面的法律制度	717
第九节	勘察设计行业职业道德准则	723
第十节	复习指导	724
	参考习题及答案	725
第十三章	土木工程施工与管理	730
第一节	土石方工程与桩基础工程	730
第二节	钢筋混凝土工程与预应力混凝土工程	744
第三节	结构吊装工程与砌体工程	754
第四节	施工组织设计	762
第五节	流水施工原理	765
第六节	网络计划技术	770
第七节	施工管理	777
第八节	复习指导	781
	参考习题及答案	784
第十四章	结构力学	789
第一节	平面体系的几何组成分析	789
第二节	静定结构的受力分析与特性	791
第三节	结构的位移计算	804
第四节	超静定结构的受力分析与特性	811
第五节	结构的动力特性与动力反应	829
第六节	复习指导	835
	参考习题及答案	857
第十五章	结构设计	875
第一节	钢筋混凝土结构材料性能	875
第二节	基本设计原则	880
第三节	钢筋混凝土构件承载能力极限状态计算	888
第四节	正常使用极限状态验算	908
第五节	预应力混凝土	912
第六节	构造要求	925
第七节	单层厂房	925
第八节	钢筋混凝土多层及高层房屋	926
第九节	抗震设计要点	939
第十节	钢结构钢材性能	950
第十一节	钢结构基本构件	952
第十二节	钢结构的连接设计计算	958

第十三节	砌体结构材料性能	964
第十四节	砌体结构设计基本原则	967
第十五节	砌体墙、柱的承载力计算	967
第十六节	混合结构房屋设计	972
第十七节	砌体结构房屋部件	986
第十八节	砌体结构抗震设计要点	993
第十九节	复习指导	998
	参考习题及答案	998
第十六章	土力学与基础工程	1008
第一节	土的物理性质和工程分类	1008
第二节	地基中的应力	1015
第三节	土的压缩性与地基沉降	1020
第四节	土的抗剪强度	1027
第五节	地基承载力	1029
第六节	土压力	1034
第七节	边坡稳定	1039
第八节	地基勘察	1042
第九节	浅基础	1044
第十节	深基础	1064
第十一节	特殊性土	1074
第十二节	地基处理	1080
第十三节	复习指导	1085
	参考习题及答案	1089
第十七章	工程地质	1096
第一节	岩石的成因和分类	1096
第二节	地质构造	1103
第三节	地貌和第四纪地质	1110
第四节	岩体结构和稳定分析	1127
第五节	动力地质	1134
第六节	地下水	1151
第七节	岩土工程勘察	1163
第八节	原位测试技术	1182
第九节	复习指导	1194
	参考习题及答案	1197
第十八章	岩体力学与岩体工程	1206
第一节	岩石的基本物理、力学性质及试验方法	1206
第二节	岩体工程分类	1245
第三节	岩体的初始地应力状态	1258
第四节	岩体力学在边坡工程中的应用	1275
第五节	岩基的应力与稳定性分析	1299

第六节 复习指导	1312
参考习题及答案	1315
模拟试题	1322
附录一 注册土木工程师(岩土)执业资格考试基础考试大纲	1346
附录二 注册土木工程师(岩土)执业资格考试基础考试参考书目	1356
附录三 注册土木工程师(岩土)执业资格考试基础考试分科题量、时间、分数分配表 ...	1359

第一章 高等数学

第一节 一元函数微分学

一、函数

(一) 函数定义

设 X 与 Y 是实数的两个集合, 若按照某规律(法则)对于每一个 $x \in X$, 有惟一的数 $y \in Y$ 与之对应, 则称在集合 X 上定义了一个单值函数, 记为 $y = f(x)$ 。如果对于 x 的每一个值对应着多个 y 值, 则称这种函数为多值函数。对应规律和定义域是函数的两大要素。函数定义域的确定: 解析式表示的函数的定义域是使解析式中每一种运算都有意义的自变量 x 取值范围; 实际问题可根据实际问题的性质来确定。

(二) 基本初等函数, 初等函数, 分段函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数及常数称基本初等函数。

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合且用一个式子所表示的函数称为初等函数。

分段函数也满足函数定义, 只不过它是用几个式子表示的, 当自变量取一部分值时, 函数用一个式子表示, 当自变量取另一部分值时, 函数用另一个式子表示。对分段函数的研究是研究函数的不可缺少的部分。

常用的函数的几何特性有: 单调性、有界性、奇偶性和周期性。

二、极限

极限是用来描述变量的变化趋势的, 分为数列的极限、函数的极限。函数的极限又可根据 x 的变化趋势分为 $x \rightarrow x_0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 两种。

(一) 数列极限定义

数列 $\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 是指 $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon)$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立。

(二) 函数极限定义

函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 是指 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 成立。

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 是指 $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 成立。

(三) 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的左右极限

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限; 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, 称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限。

函数在一点的极限与其左右极限有如下关系:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad (1-1)$$

(四) 无穷大量、无穷小量

若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (\text{或 } x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小量。

在同一极限过程中, 函数的极限与无穷小量有如下关系:

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x) \quad (1-2)$$

其中 $\alpha(x)$ 为该极限过程中的无穷小量。

若 $\lim_{x \rightarrow x_0 (\text{或 } x \rightarrow \infty)} f(x) = \infty$, 则称 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大量。无穷大量与无穷小

量的关系: 在同一变化过程中, 若 $\lim f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)} = \infty$; 若 $\lim f(x) = \infty$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)} = 0$ 。

(五) 无穷小比较

1. 若在自变量的某一变化过程中 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$, 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 就称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$; 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 就称 β 是比 α 低阶的无穷小; 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 就称 β 与 α 是同阶无穷小; 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$, 就称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小; 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 就称 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$ 。

2. 无穷小量在求极限中的应用

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 。求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母都可用等价无穷小来代替, 如果用来代替的无穷小选得适当, 可以使计算简化。

3. 在计算极限时常用的等价无穷小有, 在 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x, \tan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$ 。

(六) 在同一极限过程中有极限的量具有的运算性质

设 $\lim f(x) = a, \lim g(x) = b$, 则

$$1. \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = a \pm b;$$

$$2. \lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = a \cdot b;$$

$$\lim kf(x) = k \lim f(x) \quad (k \text{ 为常数});$$

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = a^n \quad (n \text{ 为正整数});$$

$$3. \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0);$$

$$4. \text{若 } f(x) \geq 0, \text{ 则 } \lim f(x) = a \geq 0;$$

5. 有极限的量在该极限过程中有界。

(七) 常用的求极限的方法

1. 利用极限的定义, 特别是求分段函数在分界点处的极限。

2. 利用四则运算法则。

3. 利用极限存在准则: 夹逼定理、单调有界数列必有极限。

4. 运用等价无穷小代替。

5. 利用无穷大量与无穷小量的关系。

6. 利用两个重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 。

7. 利用公式

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & n = m \\ \infty & n > m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

其中 m, n 为正整数, a_0, b_0 不等于零, 并且 a_0, b_0 没有公因数。

8. 利用变量替换。

9. 利用初等函数的连续性。

10. 利用若 $\lim f(x) = A > 0, \lim g(x) = B$, 则 $\lim f(x)^{g(x)} = A^B$ 。

11. 运用罗必达法则求不定型的极限。

三、函数的连续性

(一) 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点连续的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果对于 $\forall \epsilon > 0$, 都 $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续。经常用下面的定义, 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域有定义, 若有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 成立, 称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续。

还可以用增量来描述在一点 x_0 的连续性, 若有 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 其中 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x) - f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

(二) 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点左、右连续性

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续或左连续。若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点均连续(对区间端点应理解为左连续或右连续), 则称 $f(x)$ 在 I 上连续。

由基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合, 并且用一个式子表示的函数, 称初等函数。初等函数在定义域内连续。

(三) 函数的间断点及间断点的类型

若 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点, 当 $f(x)$ 在间断点 x_0 处有左、右极限时, 称 x_0 为第一类间断点。并称左右极限存在且相等的第一类间断点为可去间断点; 当 $f(x)$ 在间断点 x_0 处左右极限至少有一个不存在时, 称 x_0 为第二类间断点。

(四) 闭区间 $[a, b]$ 上连续函数的性质

1. 根存在定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使 $f(x_0) = 0$ 。

2. 介值定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(a) \neq f(b)$, 则 $\forall c, \min\{f(a), f(b)\} < c < \max\{f(a), f(b)\}$, 则至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = c$ 。

3. 最值定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 一定在 $[a, b]$ 上取得最大值和最小值。

【例 1-1】 判定函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的奇偶性

解 利用函数奇偶性定义判定

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})^{-1} \\
&= -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x) \\
\therefore f(-x) &= -f(x) \quad \text{由定义可知函数是奇函数。}
\end{aligned}$$

【例 1-2】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

解 在计算中容易出现下面错误

①利用乘积极限法则出现的错误

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$$

②第一重要极限使用出错

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

正确的解法如下:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} \\
\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x &= 0, x \text{ 为 } x \rightarrow 0 \text{ 的无穷小量} \\
x \rightarrow 0, \left| \sin \frac{1}{x} \right| &\leq 1 \text{ 为有界函数} \\
\therefore \text{乘积极限为零}
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

【例 1-3】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 \sin n!}}{n+1}$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 \sin n!}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n+1} \cdot \sin n!$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n+1} \rightarrow 0, |\sin n!| \leq 1$

$\therefore$ 原式 = 0

【例 1-4】 确定 c 值使 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4$ 。

解 注意第二重要极限的使用, 由第二重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$, 推出 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k$, 可在计算中直接应用

$$\begin{aligned}
\text{左} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{c}{x}}{1 - \frac{c}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{c}{x} \right)^x}{\left(1 - \frac{c}{x} \right)^x} \\
&= \frac{e^c}{e^{-c}} = e^{2c}
\end{aligned}$$

$$\text{右} = 4$$