# Dirichlet级数与随机Dirichlet级数的值分布

余家荣 丁晓庆 田范基 著

对于Dirichlet级数与随机Dirichlet级数，本书按收敛域是半平面及全平面两种情形，分别讨论了它们的收敛性、增长性及其值的分布。

武汉大学学术丛书
WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY
全国优秀出版社 武汉大学出版社

武汉大学学术丛书

# Dirichlet 级数与随机 Dirichlet级数的值分布

余家荣 丁晓庆 田范基 著

武汉大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

Dirichlet 级数与随机 Dirichlet 级数的值分布/余家荣,丁晓庆,田范基著. —武汉：武汉大学出版社,2004.5
武汉大学学术丛书
ISBN 7-307-04173-1

Ⅰ.D… Ⅱ.①余… ②丁… ③田… Ⅲ.级数—值分布论 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 022701 号

**责任编辑：顾素萍　　责任校对：王　建　　版式设计：支　笛**

---

**出版发行：武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
**印刷：湖北省通山县印刷厂**
**开本：**850×1168　1/32　**印张：**8　**字数：**204 千字　**插页：**3
**版次：**2004 年 5 月第 1 版　　2004 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-04173-1/O·292　　**定价：**18.00 元

---

**版权所有，不得翻印；凡购我社的图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请与当地图书销售部门联系调换。**

**余家荣** 教授。1920年11月生，湖北武汉市人。1944年在重庆中央大学数学系获理学学士学位，1950年在巴黎获法国国家数学科学博士学位。1949~1951年任法国国家科学研究中心研究人员，1980~1994年负责武汉大学中法数学交流工作。曾于1988年获国家教委高校优秀教材一等奖及科技进步二等奖，1997年及2001年分别获国家级教学成果一等奖及二等奖，1990年获法国政府棕榈勋章（一级教育勋章）。

**丁晓庆** 教授。1958年10月生，陕西礼泉人。1985年在西北工业大学应用数学系获理学硕士学位，1999年在武汉大学数学系获理学博士学位。在本研究领域发表论文十余篇；编著教材《工科数学分析》一部。

**田范基** 副教授，硕士生导师。1962年12月生，湖北崇阳人。1988年获武汉大学数学系理学硕士学位，1998年获理学博士学位，并进入中国科学院武汉分院物理数学研究所从事博士后研究工作。

# 序

Dirichlet 级数所定义的整函数的值分布是由 S. Mandelbrojt, J. Gergen (1931 年)[13],[15]及 G. Valiron (1934 年)[80]首先研究的. 本书作者之一于 1948 年及 1949 年先后承 G. Valiron 先生及 S. Mandelbrojt 先生指导进行了有关研究, 并在 R. E. A. C. Paley 及 A. Zygmund 论文[57]的启发下对随机 Dirichlet 级数作了初步探讨. J. E. Littlewood 及 A. C. Offord[49]关于随机 Taylor 级数所定义的整函数的重要成果也是承 G. Valiron 先生于 1950 年亲切指出的.

20 世纪 50 至 70 年代, 中外数学工作者在 Dirichlet 级数及有关方面, 在随机 Taylor 级数及随机 Dirichlet 级数方面, 取得了许多重要成果.

20 世纪 70 年代, 开始了对 Dirichlet 级数在收敛半平面内值分布的研究, 并受到 J.-P. Kahane[10]及 L. Arnold[25]~[28]工作的启发, 对随机 Dirichlet 级数的值分布, 作了进一步的探讨. 从 20 世纪 80 年代起, 主要由我国数学工作者对有关问题进行了多方面研究, 取得了一系列成果. 虽然如此, 仍然有不少问题有待解决.

本书对 Dirichlet 级数与随机 Dirichlet 级数的值分布作了初步介绍, 希望由此促进圆满解决已存在的问题, 并且由此促进引出新的问题, 进一步拓展有关研究领域.

本书第一卷及第二卷 5.5,6.1 与 7.3 节是余家荣撰写的; 第二卷 6.6,6.7 与 7.4 节是田范基撰写的; 第二卷其余部分、附录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

以及补充说明的绝大部分是丁晓庆撰写的.

本书作者深深感激 G. Valiron 先生和 S. Mandelbrojt 先生过去对有关研究的指导. 本书作者余家荣对先妻涂光重女士在教学、科学研究、行政和生活方面无微不至的关心和帮助, 另两位作者对涂女士的亲切关怀和大力支持, 永志不忘. 谨以本书作为对 G. Valiron 先生、S. Mandelbrojt 先生以及涂光重女士的纪念.

著　者

2004 年 3 月

# 目　录



## 第一卷　Dirichlet 级数

# 第二卷 随机 Dirichlet 级数

# 引　言

**Dirichlet 级数**是下列形式的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{0.1}$$

其中，$s=\sigma+\mathrm{i}t$ 表示复变量，$\{a_n\}$是一列复数，

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n\uparrow+\infty.$$

当级数(0.1)收敛时，用 $f(s)$表示它的和.

这种级数是 Dirichlet 在研究数论时引进的. 事实上，他引进的是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{0.2}$$

即级数(0.1)在 $\lambda_n=\ln n$ 时的情形. 特别当所有 $a_n=1$ 时，级数(0.2)成为 **Riemann $\zeta$ 函数**. 级数(0.2)在解析数论中有重要的应用.

另外，当 $\lambda_n=n$，$e^{-s}=z$ 时，级数(0.1)就变成了 **Taylor 级数**. 于是 Dirichlet 级数可以看成 Taylor 级数的推广，从而可研究它与 Taylor 级数相应的性质. 顺便指出，**Laplace-Stieltijes 变换**

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} d\alpha(\lambda)$$

可以看成 Dirichlet 级数的推广，这里 $\alpha(\lambda)$是区间$[0,+\infty)$上的测度.

我们还要考虑与级数(0.1)相应的**随机 Dirichlet 级数**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z_n(\omega) e^{-\lambda_n s}, \tag{0.3}$$

其中，$\{Z_n(\omega)\}$是定义在某个完备概率空间$(\Omega,\mathscr{A},P)$上的随机变量序列. 当级数(0.3)收敛时，用 $f_\omega(s)$表示它的和.

本书分两个部分，分别讲述 Dirichlet 级数和随机 Dirichlet 级数值分布理论的一些成果；为此，讲述了有关这些级数收敛性和增长性方面的成果. 本书所需要的 Nevanlinna 值分布论和概率论的有关结果，列入本书附录.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 第　一　卷

# Dirichlet 级数

# 第一章 收 敛 性

## 1.1 收 敛 域

为了研究 Taylor 级数的收敛性，需要建立 Abel 定理. 为了研究 Dirichlet 级数的收敛性，也需要建立 Abel 型定理. 为此先引进两个引理.

**引理 1.1.1** 设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个复数列. 那么对于任意的自然数$k$和$n$,

$$\sum_{j=0}^{k} a_{n+j} b_{n+j} = \sum_{j=0}^{k-1} A_{nj}(b_{n+j} - b_{n+j+1}) + A_{nk} b_{n+k},$$

其中,

$$A_{nj} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+j}.$$

**证** 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k} a_{n+j} b_{n+j} &= A_{n0} b_n + \sum_{j=1}^{k} (A_{nj} - A_{n,j-1}) b_{n+j} \\ &= A_{n0} b_n + \sum_{j=1}^{k} A_{nj} b_{n+j} - \sum_{j=0}^{k-1} A_{nj} b_{n+j+1}.\end{aligned}$$

由此即可得到要证的结果. □

**引理 1.1.2** 如果 $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$, 那么

$$|e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}| \leqslant \frac{|s|}{\sigma}(e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1}\sigma}).$$

**证** 我们有

$$|e^{-\lambda_n s}-e^{-\lambda_{n+1}s}|=\left|\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} s e^{-us}\mathrm{d}u\right|\leqslant|s|\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u\sigma}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{|s|}{\sigma}(e^{-\lambda_n\sigma}-e^{-\lambda_{n+1}\sigma}).$$ □

下述 **Abel-Stolz 型定理**是 Cahen 得到的：

**定理 1.1.1** 如果级数(0.1)在 $s_0=\sigma_0+it_0$ 处收敛，那么

1) $\forall\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，级数(0.1)在集合

$$E_\alpha=\{s:|\arg(s-s_0)|\leqslant\alpha\}$$

上一致收敛；

2) 级数(0.1)在半平面 $\operatorname{Re}s>\sigma_0$ 内收敛，而且在其中的任何紧集上一致收敛.

**证** 先证 1). 把级数(0.1)改写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n s_0}e^{-\lambda_n(s-s_0)},$$

并且令

$$A_{nj}=a_n e^{-\lambda_n s_0}+a_{n+1}e^{-\lambda_{n+1}s_0}+\cdots+a_{n+j}e^{-\lambda_{n+j}s_0}.$$

根据引理 1.1.1，对于任意的自然数 $k$ 和 $n$，

$$\sum_{j=0}^{k}a_{n+j}e^{-\lambda_{n+j}s}=\sum_{j=0}^{k-1}A_{nj}(e^{-\lambda_{n+j}(s-s_0)}-e^{-\lambda_{n+j+1}(s-s_0)})$$
$$+A_{nk}e^{-\lambda_{n+k}(s-s_0)}.$$

因此

$$\left|\sum_{j=0}^{k}a_{n+j}e^{-\lambda_{n+j}s}\right|\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}|A_{nj}|\left|e^{-\lambda_{n+j}(s-s_0)}-e^{-\lambda_{n+j+1}(s-s_0)}\right|$$
$$+|A_{nk}|e^{-\lambda_{n+k}(\sigma-\sigma_0)}. \tag{1.1.1}$$

由引理 1.1.2，当 $s\in E_\alpha$ 时，

$$|e^{-\lambda_{n+j}(s-s_0)}-e^{-\lambda_{n+j+1}(s-s_0)}|$$
$$\leqslant\frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}(e^{-\lambda_{n+j}(\sigma-\sigma_0)}-e^{-\lambda_{n+j+1}(\sigma-\sigma_0)})$$

$$\leqslant \frac{1}{\cos\alpha}\left(e^{-\lambda_{n+j}(\sigma-\sigma_0)}-e^{-\lambda_{n+j+1}(\sigma-\sigma_0)}\right). \qquad (1.1.2)$$

因为级数(0.1)在 $s=s_0$ 处收敛，所以 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N>0$，使得

$$|A_{nj}|<\varepsilon \quad (\forall\, n>N,\ \forall\, j\in\mathbf{N}).$$

于是由(1.1.1)和(1.1.2)，$\forall\, n>N$，$\forall\, k\in\mathbf{N}$，$\forall\, s\in E_\alpha$，都有

$$\left|\sum_{j=0}^{k}a_{n+j}e^{-\lambda_{n+j}s}\right|\leqslant\varepsilon\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left(e^{-\lambda_{n+j}(\sigma-\sigma_0)}-e^{-\lambda_{n+j+1}(\sigma-\sigma_0)}\right)\cdot\frac{1}{\cos\alpha}+1\right)$$
$$\leqslant\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\varepsilon.$$

结论 1)得证. 结论 2)不难由 1)得出. □

对于 Taylor 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，由 Abel 定理，存在着收敛半径 $R\in[0,+\infty]$. 当 $R>0$ 时，级数在收敛圆盘 $|z|<R$ 内收敛、绝对收敛，并且在其中的任一紧集以及任一闭圆盘 $|z|\leqslant R_0(<R)$ 内一致收敛；在集合 $\{z:\ |z|>R\}$ 内发散. 因此我们可以说，对 Taylor 级数而言，收敛半径就是“绝对收敛半径”，也是“一致收敛半径”；收敛圆盘就是“绝对收敛圆盘”，也是“一致收敛圆盘”. 可是对于 Dirichlet 级数，却没有完全相仿的结果. 例如，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

在 $s=\sigma\in(0,1]$ 时收敛，因此由引理 1.1.2，这个级数在半平面 $\operatorname{Re}s>0$ 内收敛；但当 $s=\sigma\in(0,1]$ 时，这个级数并不绝对收敛.

为了研究 Dirichlet 级数的绝对收敛性及一致收敛性，还需要下面 **Abel 型定理**：

**定理 1.1.2** 1) 如果级数(0.1)在 $s_0=\sigma_0+\mathrm{i}t_0$ 处绝对收敛，那么它在闭半平面 $\operatorname{Re}s\geqslant\sigma_0$ 上绝对收敛.

2) 如果级数(0.1)在直线 $\operatorname{Re}s=\sigma_0$ 上一致收敛，那么它在闭半平面 $\operatorname{Re}s\geqslant\sigma_0$ 上一致收敛.

**证** 1)是显然的. 现证2). 由假设, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n(\sigma_0+\mathrm{i}t)}$$

对 $t\in\mathbf{R}$ 一致收敛. 现在令

$$A_{nj}=a_n\mathrm{e}^{-\lambda_n(\sigma_0+\mathrm{i}t)}+a_{n+1}\mathrm{e}^{-\lambda_{n+1}(\sigma_0+\mathrm{i}t)}+\cdots+a_{n+j}\mathrm{e}^{-\lambda_{n+j}(\sigma_0+\mathrm{i}t)}.$$

那么 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 使得 $\forall n>N$, $\forall j\in\mathbf{N}$, $\forall t\in\mathbf{R}$, 都有

$$|A_{nj}|<\varepsilon. \tag{1.1.3}$$

由引理1.1.1, $\forall\sigma_1>\sigma_0$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k} a_{n+j}\mathrm{e}^{-\lambda_{n+j}(\sigma_1+\mathrm{i}t)} &= \sum_{j=0}^{k} a_{n+j}\mathrm{e}^{-\lambda_{n+j}(\sigma_0+\mathrm{i}t)}\mathrm{e}^{-\lambda_{n+j}(\sigma_1-\sigma_0)}\\ &= \sum_{j=0}^{k-1} A_{nj}(\mathrm{e}^{-\lambda_{n+j}(\sigma_1-\sigma_0)}-\mathrm{e}^{-\lambda_{n+j+1}(\sigma_1-\sigma_0)})\\ &\quad + A_{nk}\mathrm{e}^{-\lambda_{n+k}(\sigma_1-\sigma_0)}.\end{aligned}$$

于是由(1.1.3), $\forall n>N$, $\forall k\in\mathbf{N}$, $\forall t\in\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{j=0}^{k} a_{n+j}\mathrm{e}^{-\lambda_{n+j}(\sigma_1+\mathrm{i}t)}\right|\\ &\quad<\varepsilon\left[\sum_{j=0}^{k-1}(\mathrm{e}^{-\lambda_{n+j}(\sigma_1-\sigma_0)}-\mathrm{e}^{-\lambda_{n+j+1}(\sigma_1-\sigma_0)})+\mathrm{e}^{-\lambda_{n+k}(\sigma_1-\sigma_0)}\right]\\ &\quad=\varepsilon\mathrm{e}^{-\lambda_n(\sigma_1-\sigma_0)}<\varepsilon.\end{aligned}$$

证毕. □

由定理1.1.1及定理1.1.2, 可以定义级数(0.1)的**收敛横坐标** $\sigma_c$、**一致收敛横坐标** $\sigma_u$ 及**绝对收敛横坐标** $\sigma_a$ 如下:

$\sigma_c=\inf\{\sigma_0$: 级数(0.1)在 $\mathrm{Re}\,s>\sigma_0$ 内收敛, $\sigma_0\in\mathbf{R}\}$,

$\sigma_u=\inf\{\sigma_1$: 级数(0.1)在 $\mathrm{Re}\,s\geqslant\sigma_1$ 上一致收敛, $\sigma_1\in\mathbf{R}\}$,

$\sigma_a=\inf\{\sigma_2$: 级数(0.1)在 $\mathrm{Re}\,s\geqslant\sigma_2$ 上绝对收敛, $\sigma_2\in\mathbf{R}\}$.

如果级数(0.1)在 $s_2=\sigma_2+\mathrm{i}t_2$ 处绝对收敛, 那么它显然在 $\mathrm{Re}\,s\geqslant\sigma_2$ 上绝对收敛并且一致收敛. 于是我们有

$$\sigma_c\leqslant\sigma_u\leqslant\sigma_a. \tag{1.1.4}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com