高中数学

题源

TIYUAN

与各种版本的高中课程教材配套使用

三角函数

GAOZHONGSHUXUE

丛书主编：傅荣强

本册主编：任政忠

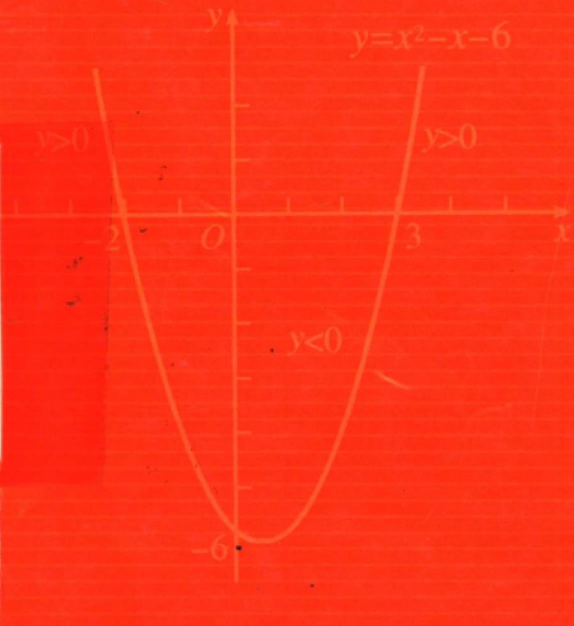
按 专 题 分 册

按 知 识 划 块

按 题 型 归 类

按 方 法 总 结

按 梯 度 训 练



河北教育出版社

责任编辑：赵毅蔚
封面设计：比目鱼工作室

高中数学

- 集合与简易逻辑 • 函数 • 数列 • 三角函数 • 平面向量 • 不等式
- 直线和圆的方程 • 圆锥曲线方程 • 立体几何 • 排列·组合·概率

高中物理

- 力学（上） • 力学（下） • 电学（上） • 电学（下）
- 热学·光学·原子物理 • 高中物理实验

高中化学

- 氧化还原反应 • 物质结构·元素周期律 • 电解质溶液
- 化学反应速率与化学平衡 • 物质的量·化学反应中的能量变化
- 元素及其化合物 • 有机化学 • 高中化学实验

三角函数

GAOZHONGSHUXUE

与各种版本的高中课程教材配套使用

ISBN 7-5434-1965-3

9 787543 419650 >

ISBN 7－5434－1965 －3
G・1657 定价：8.50 元

题源 三角函数

高中数学

丛书主编：傅荣强　本册主编：任政忠

河北教育出版社

本书作者

主编：任政忠

编者：韩丽云　孙吉利

责任编辑：赵毅蔚

装帧设计：比目鱼工作室

题源 高中数学 三角函数

出版发行	河北教育出版社 （石家庄市友谊北大街 330 号　http://www.hbep.com）
印　　刷	保定市印刷厂
开　　本	880 × 1230　1/32
印　　张	7.25
字　　数	208 千字
版　　次	2003 年 12 月第 1 版
印　　次	2003 年 12 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7－5434－1965－3/G・1657
定　　价	8.50 元

前　言

本书名曰“题源”，有两层含义：一是“题”；二是“源”。这里的“题”是指精选的例题、习题，题目讲解的角度新颖独特，避免题海战术；“源“是指出处、源头，即题目的来龙去脉。“题源”即通过追溯源头来了解数以万计的“题”为何抽象成了有限的“题型”，各种“题型”如何提炼出具体的解决“方法”，各种“方法”又如何再落实到具体应用。

目前的教材改革提倡由具体到抽象、由特殊到一般的教育理念，由具体入手，通过具体操作，体会方法延伸，以提高其实用价值。

本套书从实战操作入手，从“题”的角度切入，每本书224页的内容，足以让你领略“题”的意境；从“源”的角度着重，讲求“题型”、“方法”归纳的简练，提纲挈领，充分让你体会“源”的韵味。

本套书的设计思路：

1．按专题分册　本套书以现有的各种版本教材为基础，取材于各种教材的交汇处，按专题分册编写，可与各种版本的教科书配套使用。全套书共计52册，包含初、高中的数学、物理、化学、三个学科的40个专题，计40册；另有按册编写的初、高中语文各6册。

2．按知识划块　每册书的内容即一个专题内容，全书按知识点分成若干讲，使你对本部分知识的脉络框架一目了然。

3．按题型归类　每一讲按具体内容分成若干题型，使你对本部分知识都包含哪些题型心中有数，避免因不清楚自己对本部分知识掌握的深浅程度而浪费精力。

4．按方法总结　每个题型都有相应总结出的方法作为解题指导，使你能知其然，还能知其所以然。

5．按梯度训练　每一讲的例题及习题都是精选的与题型相关的经典题、创新题，其中创新题篇幅约占30%，大多从具体问题入手，以

探究问题的发展趋势为主，由易到难，循序渐进。

全书栏目设计简单、清晰，具体包括：

1. **题型归纳**　每一讲内容按知识点分布结构归纳成若干题型；

2. **方法概述**　每一个题型后紧随针对此题型的具体解题方法；

3. **例题设计**　每一个方法后是阐述此方法应用的经典例题；

4. **解法点评**　每组例题后相应都有关于此方法适用程度的点评；

5. **要点提示**　解题过程中间或有插入提示指点迷津；

6. **习题配备**　每讲后都配有为巩固本讲知识内容而设置的习题，后附答案与提示。

书由“越学越厚”到“越学越薄”，表明接受知识由难到易的进程，本书教你“越学越薄”的办法。俗语说“万变不离其宗”，宗在哪儿？本书旨在告诉大家如何从源头找到解决各种复杂问题的思路，体味什么是真正的“举一反三”。

“问渠哪得清如许，为有源头活水来”。最近几年的中、高考命题，向综合性、多元化、实用性方向发展，如何把握命题方向，从最简单的角度切入复杂问题当中，从而把复杂问题分解、简化，逐一解决，这是本书要着意顾及的。愿本套书的编写模式，能使你不再不知道学得是否到位，不再对新题型懵懵懂懂，不再对难题发怵。

本套书经过近百位一线教师近一年的努力，终于功成。使我们感到欣慰的是本书从整体框架设计、题型结构设计，到例题、习题选取、讲解梯度，都达到了我们设想的最佳水准。当然，因为种种原因，书中还有一些不尽如人意之处，欢迎广大读者提出宝贵意见。

2004年元月

目 录

第一讲　角的概念的推广

本讲题型

序　号	题　　型
1	终边相同的角
2	象限角
3	轴线角
4	各类角的概念的辨别

题型 1　终边相同的角

(1)写出与角 α 终边相同的角

方法　所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可以构成一个集合,即

$$S=\{\beta \mid \beta=\alpha+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}.$$

【例 1】　写出与角 α 终边相同的角的集合.

(1)$\alpha=2004^\circ$;

(2)$\alpha=-2005^\circ$;

(3)$\alpha=\dfrac{\beta}{2}, \beta=4020^\circ$;

(4)$\triangle ABC$ 中,$AB=1, BC=\sqrt{3}, AC=2, \alpha=\angle C$.

解　(1)$\{\beta \mid \beta=2004^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$.

(2)$\{\beta \mid \beta=k\cdot 360^\circ-2005^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$.

(3)由 $\alpha=\dfrac{\beta}{2}, \beta=4020^\circ$,可得

$$\alpha = 2010°,$$

所以,与角 α 终边相同的角的集合是

$$\{\gamma \mid \gamma = k \cdot 360° + 2010°, k \in \mathbf{Z}\}.$$

(4)如图 1-1,由已知可知,$\triangle ABC$ 中,$AB=1$,$BC=\sqrt{3}$,$AC=2$,

所以 $AB^2 + BC^2 = AC^2$,

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形,其中 $\angle C = 30°$.

由题设,$\alpha = \angle C$,

所以 $\alpha = 30°$,

所以,与角 α 终边相同的角的集合是

$$\{\beta \mid \beta = 30° + k \cdot 360°, k \in \mathbf{Z}\}.$$

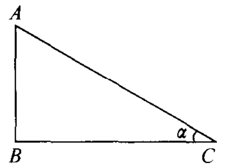


图 1-1

(2)写出与角 α 终边相同的角的集合 S,并写出 S 中适合不等式 $m° \leqslant \beta < n°$ 的元素 β

方法 $S = \{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360°, k \in \mathbf{Z}\}$;

给 k 赋值,使不等式 $m° \leqslant \alpha + k \cdot 360° < n°, k \in \mathbf{Z}$ 成立.

【例 2】 写出与 $-70°$ 的角终边相同的角的集合 S,并把 S 中适合不等式 $-90° \leqslant \frac{\beta}{2} < 180°$ 的元素 β 写出来.

解 与 $-70°$ 的角终边相同的角的集合是

$$S = \{\beta \mid \beta = k \cdot 360° - 70°, k \in \mathbf{Z}\}.$$

由 $-90° \leqslant \frac{\beta}{2} < 180°$,得

$$-180° \leqslant \beta < 360°.$$

S 中适合 $-180° \leqslant \beta < 360°$ 的元素是

$$-180° \leqslant k \cdot 360° - 70° < 360°. \quad (*)$$

在(*)中依次令 $k=0,1$,得

$$-180° \leqslant -70° < 360°,$$
$$-180° \leqslant 290° < 360°.$$

$\therefore$ S 中适合不等式 $-90° \leqslant \frac{\beta}{2} < 180°$ 的元素是 $-70°, 290°$.

题型 2 象限角

(1)已知角 α 是某个象限的角,判断由角 α 演变出来的角是第几象限的角

方法 第一、二、三、四象限的角依次满足

$$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ < \alpha < k\cdot 360^\circ + 90^\circ, k\in \mathbf{Z}\};$$
$$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k\cdot 360^\circ + 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\};$$
$$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k\cdot 360^\circ + 270^\circ, k\in \mathbf{Z}\};$$
$$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ + 270^\circ < \alpha < k\cdot 360^\circ + 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}.$$

【例 3】 已知角 α 是第二象限的角,判断角 $\beta=2\alpha$ 是第几象限的角,或其终边的位置.

解 ∵ 角 α 是第二象限的角,

∴ $$k\cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k\cdot 360^\circ + 180^\circ, k\in \mathbf{Z}.$$

由 $\beta=2\alpha$,得

$$k\cdot 720^\circ + 180^\circ < \beta < k\cdot 720^\circ + 360^\circ, k\in \mathbf{Z}. \qquad ⊛$$

∵ $k\cdot 720^\circ$的角的终边落在 x 轴的非负半轴上,

∴ $k\cdot 720^\circ + 180^\circ$的角的终边落在 x 轴的非正半轴上.

同样可以分析出 $k\cdot 720^\circ + 360^\circ$的角的终边落在 x 轴的非负半轴上.

以上 $k\in \mathbf{Z}$.

这是最容易出错的地方

由⊛式,可知

角 β 是第三、四象限的角;或角 β 的终边落在 y 轴的非正半轴上.

(2)已知角 α 所在的象限或它的终边位置,判断角 $\frac{\alpha}{k}$ 的终边所在的位置. $k=2,3,\cdots$

方法 第一,写出 α 满足的等式或不等式;其次,写出$\frac{\alpha}{k}$;第三,要掌握对于 $m,n\in \mathbf{Z}, k\in \mathbf{N}^*$,且 $k\geqslant 2$,$\frac{n}{k}$中的 n 总能满足:$n=km, km+1, \cdots, km+(k-1)$.

【例 4】 已知角 α 是第一象限的角，判断角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在的位置.

解 由角 α 是第一象限的角，知

$$n\cdot 360^\circ < \alpha < n\cdot 360^\circ + 90^\circ, n\in \mathbf{Z}.$$

两边都除以 3，得

$$\frac{n}{3}\cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{3} < \frac{n}{3}\cdot 360^\circ + 30^\circ, n\in \mathbf{Z}. \quad ①$$

对于 $m, n\in \mathbf{Z}$，n 总可表示成如下三种形式：

对 n 分类

$$n = 3m,$$
$$n = 3m+1,$$
$$n = 3m+2.$$

n 除以 3，或者整除，或者余数为 1、2

(1)若 $n=3m$，则由①可得

$$m\cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{3} < m\cdot 360^\circ + 30^\circ; \quad ②$$

(2)若 $n=3m+1$，则由①可得

$$m\cdot 360^\circ + 120^\circ < \frac{\alpha}{3} < m\cdot 360^\circ + 150^\circ; \quad ③$$

(3)若 $n=3m+2$，则由①可得

$$m\cdot 360^\circ + 240^\circ < \frac{\alpha}{3} < m\cdot 360^\circ + 270^\circ. \quad ④$$

由②、③、④，知

$\frac{\alpha}{3}$ 是第一、二、三象限的角.

点评

对于 $m, n\in \mathbf{Z}$，$k\in \mathbf{N}^*$，且 $k\geqslant 2$，在讨论 $\frac{n}{k}$ 时，总可以把 n 分成 k 类：

$$n = km;$$
$$n = km+1;$$
$$\cdots\cdots$$
$$n = km+(k-1).$$

本例中的"$k=3$"，所以 n 分成 3 类.

把本例中的 $\frac{\alpha}{3}$ 改成 $\frac{\alpha}{2}$，你会做吗？做完以后要记住结果，它很重要（$\frac{\alpha}{2}$

是第一、三象限的角). $\frac{\alpha}{3}$改成$\frac{\alpha}{4}$，$\frac{\alpha}{5}$，$\frac{\alpha}{6}$，……时，如何分类？

题型 3　轴线角

(1)与 x 轴有关的轴线角问题

方法　终边落在 x 轴的非负半轴上、非正半轴上的角的集合分别是

$$\{\alpha \mid \alpha = k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\};$$

$$\{\alpha \mid \alpha = k\cdot 360° + 180°, k\in \mathbf{Z}\}.$$

【例 5】　若角 α 与 β 的终边相同，则角 $\alpha-\beta$ 的终边　(　　)

A. 在 x 轴的非负半轴上　　B. 在 x 轴的非正半轴上

C. 在 y 轴的非负半轴上　　D. 在 y 轴的非正半轴上

解　由角 α 与角 β 的终边相同，得

$$\alpha = k\cdot 360° + \beta, k\in \mathbf{Z},$$

所以　$\alpha-\beta = k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}$,

所以，$\alpha-\beta$ 的终边在 x 轴的非负半轴上.

选 A.

(2)与 y 轴有关的轴线角问题

方法　终边落在 y 轴的非负半轴上、非正半轴上的角的集合分别是

$$\{\alpha \mid \alpha = k\cdot 360° + 90°, k\in \mathbf{Z}\};$$

$$\{\alpha \mid \alpha = k\cdot 360° - 90°, k\in \mathbf{Z}\}.$$

【例 6】　终边在坐标轴上的角的集合是　(　　)

A. $\{\varphi \mid \varphi = k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$　　B. $\{\varphi \mid \varphi = k\cdot 180°, k\in \mathbf{Z}\}$

C. $\{\varphi \mid \varphi = k\cdot 90°, k\in \mathbf{Z}\}$　　D. $\{\varphi \mid \varphi = k\cdot 180° + 90°, k\in \mathbf{Z}\}$

解　对于 $k, m\in \mathbf{Z}$，有

$$k = 4m,$$

$$k = 4m+1,$$ 分类讨论

$$k = 4m+2,$$

$$k = 4m+3.$$

以下代入答案 C 进行检验：

(1)若 $k=4m$,则 $\varphi=4m\cdot 90°=m\cdot 360°$;

(2)若 $k=4m+1$,则 $\varphi=(4m+1)\cdot 90°=m\cdot 360°+90°$;

(3)若 $k=4m+2$,则 $\varphi=(4m+2)\cdot 90°=m\cdot 360°+180°$;

(4)若 $k=4m+3$,则 $\varphi=(4m+3)\cdot 90°=m\cdot 360°+270°$.

综上,终边在坐标轴上的角的集合是 $\{\varphi \mid \varphi=k\cdot 90°, k\in \mathbf{Z}\}$.

选 C.

点评

本例解答过程中,运用了分类讨论的数学思想,其原则有三条:

设总类为 M,M 可分成 n 类 $M_1, M_2, \cdots, M_n$,满足

(1)$M_i \neq \varnothing$, $i=1,2,\cdots,n$;

(2)$M_i \cap M_j=\varnothing$, $i\neq j$,且 $i,j=1,2,\cdots,n$;

(3)$M=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_n$.

这时,在 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 上讨论某数学问题,等价于在 M 上讨论这个问题.

按照上述思想去解决数学问题,称之为分类讨论.分类讨论思想是数学思想的灵魂.

题型 4 各类角的辨别

方法 依各类角的有关定义、范围等加以辨别.

【例 7】 判断下面的说法是否正确.

(1)第一象限的角一定是锐角;

(2)凡能表示成 $k\cdot 360°+90°$形式的角一定是直角,其中 $k\in \mathbf{Z}$;

(3)终边落在直线 $y=-x$ 上的角都可以表示成 $n\cdot 180°-45°$的形式,其中 $n\in \mathbf{Z}$.

解 (1)不正确.

如,361°的角是第一象限的角,但它不是锐角;

(2)不正确.

如,$1\cdot 360°+90°=450°$的角具有 $k\cdot 360°+90°$的形式,此时 $k=1\in \mathbf{Z}$,但它不是直角;

(3)正确.

对于 $n\cdot 180°-45°, n\in \mathbf{Z}$,有

如图 1-2,当角的终边落在射线 $y=-x(x\geqslant 0)$ 上时,它可以表示成 $k\cdot 360°-45°$的形式;当角的终边落在射线 $y=-x(x\leqslant 0)$ 上时,它可以表示成 $(k\cdot 360°+180°)-45°$的形式.两种形式也即

$$2k\cdot 180°-45°,$$
$$(2k+1)\cdot 180°-45°$$

的形式,可一并写成 $n\cdot 180°-45°$的形式,$n\in \mathbf{Z}$.

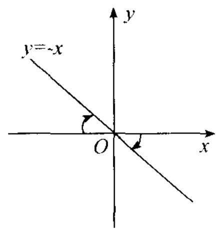


图 1-2

点评

否定结论,举出一个反例即可.如,本例的第(1)、(2)两小题的解法.

习题一

一、选择题

1. 终边在 y 轴的非正半轴上的角介于 $-360°\sim 720°$之间的是　(　　)

A. $\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 360°+270°, k\in \mathbf{Z}\}$　　B. $-90°, -270°, 270°$

C. $-90°, 270°, 630°$　　D. $-90°, -270°, 540°$

2. 已知 $P=\{x \mid x=k\cdot 90°+45°, k\in \mathbf{Z}\}$, $Q=\{y \mid y=k\cdot 45°+90°, k\in \mathbf{Z}\}$,则　(　　)

A. $P=Q$　　B. $P\supsetneqq Q$　　C. $P\subsetneqq Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

3. 集合 $M=\{x \mid x=\frac{k}{2}\cdot 180°\pm 45°, k\in \mathbf{Z}\}$与集合 $P=\{x \mid x=k\cdot 45°, k\in \mathbf{Z}\}$之间的关系是　(　　)

A. $M\subsetneqq P$　　B. $M\supsetneqq P$　　C. $M=P$　　D. $M\cap P=\varnothing$

4. 下面四个命题中,正确的是　(　　)

A. 第一象限的角是锐角　　B. 锐角是第一象限的角

C. 终边相同的角相等　　D. 第二象限的角大于第一象限的角

二、填空题

5. 已知角 α 和角 β 的终边互为反向延长线，问 α 和 β 之间满足怎样的关系？其结果是______.

6. 若角 α、β 的终边关于直线 $x+y=0$ 对称，且 $\alpha=-60^\circ$，则 β 的值是______.

7. 设角 α 的终边与 252° 的角的终边关于 y 轴对称，且 α 在 $-360^\circ \sim 360^\circ$ 之间，则角 α 的值是______.

8. 已知角 α 是第四象限的角，判断角 $\beta=3\alpha$ 是第几象限的角，或其终边的位置，其结果是______.

三、解答题

9. 设角 α 的终边和函数 $y=-|x|$ 的图象重合，求角 α 的集合.

10. 设角 α 是第三象限的角，判断角 $\frac{\alpha}{4}$ 的终边所在的位置.

【答案与提示】

一、选择题

1. C.

终边在 y 轴的非正半轴上的角的集合为 $A=\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 360^\circ+270^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$. 在 $-360^\circ \sim 720^\circ$ 之间的角有 $-90^\circ(k=-1)$，$270^\circ(k=0)$，$630^\circ(k=1)$.

2. C.

$\because$ 角 $k\cdot 90^\circ$ 的终边落在坐标轴上，

$\therefore$ 角 $k\cdot 90^\circ+45^\circ$ 的终边落在直线 $y=\pm x$ 上，

$\therefore$ P 是终边落在直线 $y=\pm x$ 上的角的集合.

在集合 Q 中，分别令 $k=4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3$，这时 Q 中的角的终边依次落在 y 轴上；直线 $y=-x$ 上；x 轴上；直线 $y=x$ 上. 以上 $n\in \mathbf{Z}$.

综上，$P \subsetneqq Q$.

3. A.

M 中在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间的元素有 $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$，它们都是 45° 的整数倍，

$\therefore$ M 中所有的元素都是 45° 的整数倍，

$\therefore$ $M \subseteq P$.

易知 $0^\circ \in P$，但 $0^\circ \notin M$，

$\therefore$ $M \neq P$，

$\therefore$ $M \subsetneqq P$.

4. B.

361°的角是第一象限的角，但它不是锐角，所以A错；

1°和361°的角终边相同，但它们不相等，所以C错；

91°的角是第二象限的角，361°的角是第一象限的角，但91°<361°，所以D错.

最后看B，锐角 α 满足 $0°<\alpha<90°$，α 属于第一象限的角的集合 $\{\beta|k\cdot360°<\beta<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$（$k=0$ 的情况）.

二、填空题

5. ∵ α 和 β 的终边互为反向延长线，

∴ $$\beta=k\cdot360°+180°+\alpha,k\in\mathbf{Z}.$$

6. 如图1-3，设 OA 是角 α 的终边，OC 是角 β 的终边.

∵ OA、OC 关于直线 $x+y=0$ 对称，且 $\alpha=-60°$，

∴ $$\beta=k\cdot360°-30°,k\in\mathbf{Z}.$$

7. ∵ 角 α 的终边与252°的角的终边关于 y 轴对称，

∴ 在0°～360°之间的 $\alpha=288°$，

∴ 与288°的角终边相同的角可写成 $\beta=k\cdot360°+288°,k\in\mathbf{Z}$，

∴ 在−360°～360°之间，角 α 的值是−72°和288°.

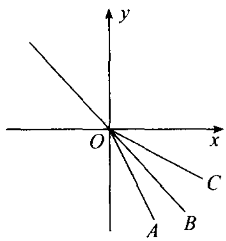


图1-3

8. ∵ 角 α 是第四象限的角，

∴ $$k\cdot360°-90°<\alpha<k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}.$$

由 $\beta=3\alpha$ 知，$k\cdot1080°-270°<\beta<k\cdot1080°$，

∴ 角 β 是第二、三、四象限的角；或终边落在 x 轴的非正半轴上、y 轴的非正半轴上.

三、解答题

9. 函数 $y=-|x|$ 的图象是图1-4中的两条射线 OA、OB，终边落在 OA、OB 上的角含−45°、−135°的角，

∴ 角 α 的集合是 $\{\beta|\beta=k\cdot360°-45°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=k\cdot360°-135°,k\in\mathbf{Z}\}$.

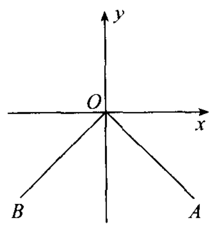


图1-4

10. ∵ 角 α 是第三象限的角，

∴ $k\cdot360°+180°<\alpha<k\cdot360°+270°$，

∴ $k\cdot90°+45°<\dfrac{\alpha}{4}<k\cdot90°+67.5°,k\in\mathbf{Z}$.

∴ $\dfrac{\alpha}{4}$ 是第一、二、三、四象限的角.