大学数学的内容、方法与技巧丛书

离散数学
内容、方法与技巧

梅家斌　何小亚　肖枝洪　戴志勇

华中科技大学出版社

大学数学的内容、方法与技巧丛书

离散数学
内容、方法与技巧

梅家斌　　何小亚
肖枝洪　　戴志勇

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学 内容、方法与技巧/梅家斌 何小亚 肖枝洪 戴志勇
武汉:华中科技大学出版社,2004年9月
ISBN 7-5609-3181-2

Ⅰ.离…
Ⅱ.①梅… ②何… ③肖… ④戴…
Ⅲ.离散数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O158

离散数学 内容、方法与技巧　　梅家斌 何小亚 肖枝洪 戴志勇

策划编辑:徐正达　　封面设计:刘 卉
责任编辑:谢燕群　　责任监印:张正林
责任校对:封春英

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:华中科技大学惠友文印中心
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32　印张:12　字数:290 000
版次:2004年9月第1版　印次:2004年9月第1次印刷　定价:13.80元
ISBN 7-5609-3181-2/O·319

内 容 简 介

本书是“大学数学的内容、方法与技巧”丛书之一，共有七章，内容包括命题逻辑、谓词逻辑（一阶逻辑）、集合与关系、函数、代数结构、格与布尔代数、图论. 附录部分提供了近年来的两套统考试题及详细解答. 本书在归纳内容、释疑解难的基础上，用丰富的例题为读者诠释概念、演绎技巧，以培养读者分析和解决问题的能力.

本书可作为高等理工科院校计算机科学、工程与应用专业的教学参考书，也可作为本科生学习与考研的指导书.

前　言

离散数学是计算机科学中最重要的基础理论之一，也是培养学生缜密思维、提高学生素质的核心课程. 与学习其他基础数学一样，在学习离散数学中，解题是巩固知识、深化理解的一条必要途径. 通过解题方法的训练，可以培养学生的综合分析能力和理论联系实际的学风.

本书共七章，在编排上按章分类，每章均分三个部分. 第一部分为“主要内容”，涉及主要的概念、定理、公式，主要为后面内容提供一个理论框架. 第二部分为“疑难解析”，主要通过例题的解题分析加深读者对所学知识的深化理解及解题方法的融会贯通，从而起到举一反三、触类旁通的作用. 当然，我们所提供的仅是一家之见，难成范典. 读者通过这一部分的学习，如能启迪思维、拓展新的解题思路、掌握更多的新的解题方法，那将是非常值得庆幸的事. 第三部分为“方法、技巧与典型例题分析”，是第二部分的强化. 在学习第二部分的基础上进一步为读者提供一个练习的平台. 读者在第三部分时最好先不看解答，自己先解题，在百思不得其解后再参阅解答，这样效果一定会更好一些.

应该特别指出的是，本书仅是教学参考书，决非解题的万能钥匙. 希望读者务必把学习教材、独立作业放在首位，这样体会会更加深刻，从而收到事半功倍的效果.

限于作者水平，本书疏漏难免，欢迎读者批评指正.

作　者

2003 年 7 月

目　　录

第一章 命题逻辑

主要内容

1. 命题及其表示法

命题 能表达判断的语句，并具有确定真值的陈述句.

真值 一个命题总具有一个“值”，称为真值.真值只有真和假两种，分别记为T和F，在有些情况下，也分别记为1和0.

原子命题 不能分解为更简单的陈述句，称为原子命题.

复合命题 由联结词、标点符号和原子命题复合构成的命题，称为复合命题.

命题标识符 表示命题的符号.

命题常量 一个命题标识符表示确定的命题，该标识符称为命题常量.

命题变元 命题标识符如果仅是表示任意命题的位置标识，称为命题变元.

原子变元 当命题变元表示原子命题时，该变元称为原子变元.

2. 联结词

否定 设 P 为一命题，P 的否定是一个新的命题，记作 $\neg P$. 若 P 为T，则 $\neg P$ 为F；若 P 为F，则 $\neg P$ 为T.

合取 两个命题 P 和 Q 的合取是一个复合命题，记作 $P \wedge Q$. 当且仅当 P，Q 同时为T时，$P \wedge Q$ 的真值为T，否则 $P \wedge Q$ 的真值为F.

析取 两个命题 P 和 Q 的析取是一个复合命题，记作 $P \vee Q$.

当且仅当P,Q同时为F时,$P\vee Q$的真值为F,否则$P\vee Q$的真值为T.

条件 给定两个命题P和Q,其条件命题是一个复合命题,记作$P\rightarrow Q$.当且仅当P的真值为T、同时Q的真值为F时,$P\rightarrow Q$的真值为F,否则$P\rightarrow Q$的真值为T.

双条件 给定两个命题P和Q,其复合命题$P\rightleftarrows Q$称为双条件命题.当P和Q的真值相同时,$P\rightleftarrows Q$的真值为T,否则$P\rightleftarrows Q$的真值为F.

3.命题公式与翻译

合式公式 命题演算的合式公式规定为:

(1) 单个命题变元本身是一个合式公式;

(2) 如果A是合式公式,那么$\neg A$也是合式公式;

(3) 如果A和B是合式公式,那么$(A\wedge B)$,$(A\vee B)$,$(A\rightarrow B)$和$(A\rightleftarrows B)$都是合式公式;

(4) 当且仅当能够有限次地应用(1)、(2)、(3)所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串是合式公式.

翻译 把自然语言中的有些语句翻译成数理逻辑中的形式符号.

优先次序 联结词运算的优先次序为:$\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\rightleftarrows$.

4.真值表与等价公式

真值表 在命题公式中,根据分量指派真值的各种可能组合,就确定了这个命题公式的各种真值情况,把它们汇列成表,就是命题公式的真值表.

逻辑相等 给定两个命题公式A和B,设$P_1,P_2,\cdots,P_n$为所有出现于A和B中的原子变元,若给$P_1,P_2,\cdots,P_n$任一组真值指派,A和B的真值都相同,则称A和B是等价的或逻辑相等,记作$A\Leftrightarrow B$.

子公式 如果X是合式公式A的一部分,且X本身也是一个合式公式,则称X为公式A的子公式.

定理1.1 设X是合式公式A的子公式，若$X \Leftrightarrow Y$，则将A中的X用Y来置换，所得公式B与公式A等价，即$A \Leftrightarrow B$.

5. 重言式与蕴涵式

重言式 给定一个命题公式，若无论对分量进行怎样的指派，其对应的真值永为T，则称命题公式为重言式或永真公式.

矛盾式 给定一个命题公式，若无论对分量进行怎样的指派，其对应的真值永为F，则称该命题公式为矛盾式或永假公式.

蕴涵式 当且仅当$P \rightarrow Q$是一个重言式时，称P蕴涵Q，并记作$P \Rightarrow Q$.

逆换式 对$P \rightarrow Q$来说，$Q \rightarrow P$称为它的逆换式.

反换式 对$P \rightarrow Q$来说，$\neg P \rightarrow \neg Q$称为它的反换式.

逆反式 对$P \rightarrow Q$来说，$\neg Q \rightarrow \neg P$称为它的逆反式.

定理1.2 任何两个重言式的合取或析取仍然是一个重言式.

定理1.3 一个重言式，对同一分量都用任何合式公式置换，其结果仍为一重言式.

定理1.4 设A，B是两个命题公式，$A \Leftrightarrow B$当且仅当$A \rightleftarrows B$为一个重言式.

定理1.5 设P，Q是两个命题公式，$P \Leftrightarrow Q$的充要条件是$P \Rightarrow Q$，且$Q \Rightarrow P$.

6. 其他联结词

不可兼析取 设P和Q是两个命题公式，复合命题$P \overline{\vee} Q$称为P和Q的不可兼析取. 当且仅当P与Q的真值相异时，$P \overline{\vee} Q$的真值为T，否则$P \overline{\vee} Q$的真值为F.

逆条件 设P和Q是两个命题公式，复合命题$P \xrightarrow{c} Q$称为命题P和Q的逆条件或条件否定. 当且仅当P的真值为T，Q的真值为F时，$P \xrightarrow{c} Q$的真值为T，否则$P \xrightarrow{c} Q$的真值为F.

与非 设P和Q是两个命题公式，复合命题$P \uparrow Q$称为P和Q的“与非”. 当且仅当P和Q的真值都是T时，$P \uparrow Q$的真值为F，否

则 $P\uparrow Q$ 的真值为T.

或非 设 P 和 Q 是两个命题公式,复合命题 $P\downarrow Q$ 称为 P 和 Q 的"或非". 当且仅当 P 和 Q 的真值都为F时,$P\downarrow Q$ 的真值为T,否则 $P\downarrow Q$ 的真值为F.

"$\overline{\vee}$"的有关性质

(1)$P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow Q\overline{\vee}P$;

(2)$(P\overline{\vee}Q)\overline{\vee}R\Leftrightarrow P\overline{\vee}(Q\overline{\vee}R)$;

(3)$P\wedge(Q\overline{\vee}R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\overline{\vee}(P\wedge R)$;

(4)$(P\overline{\vee}Q)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$;

(5)$(P\overline{\vee}Q)\Leftrightarrow\neg(P\rightleftarrows Q)$;

(6)$P\overline{\vee}P\Leftrightarrow \mathrm{F}$, $\mathrm{F}\overline{\vee}P\Leftrightarrow P$, $\mathrm{T}\overline{\vee}P\Leftrightarrow\neg P$.

"$\uparrow$"的有关性质

(1)$P\uparrow P\Leftrightarrow\neg P$;

(2)$P\wedge Q\Leftrightarrow(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q)$;

(3)$P\vee Q\Leftrightarrow(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q)$.

"$\downarrow$"的有关性质

(1)$P\downarrow P\Leftrightarrow\neg P$;

(2)$P\vee Q\Leftrightarrow(P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q)$;

(3)$P\wedge Q\Leftrightarrow(P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q)$.

最小联结词组 对于任何一个命题公式,都能由仅含这些联结词的命题公式等价代换,而比这些联结词再少的命题公式不能对给定的公式作等价代换,这样的联结词组就是最小联结词组.

7. 对偶式与范式

对偶式 在给定的命题公式 A 中,使联结词 $\vee$ 变换为 $\wedge$,将 $\wedge$ 换成 $\vee$,若有特殊变元 F 和 T 亦相互取代,所得公式 A^{*} 称为 A 的对偶式.

合取范式 一个命题公式称为合取范式,当且仅当它具有形

式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n (n \geqslant 1)$，其中，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是由命题变元或其否定所组成的析取式.

析取范式 一个命题公式称为析取范式，当且仅当它具有形式 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n (n \geqslant 1)$，其中，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是由命题变元或其否定所组成的合取式.

小项 n 个命题变元的合取式称为小项或布尔合取，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次.

大项 n 个命题变元的析取式称为大项或布尔析取，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次.

小项性质

(1)每个小项当其真值指派与编码相同时，其真值为T，在其余 2^n-1 种指派情况下其真值均为F；

(2)任意两个不同小项的合取式的真值永为F；

(3)全体小项的析取式的真值永为T.

大项性质

(1)每个大项当其真值指派与编码相同时，其真值为F，在其余 2^n-1 种指派情况下其真值均为T；

(2)任意两个大项的析取式的真值永为T；

(3)全体大项的合取式的真值永为F.

主析取范式 对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由小项的析取所组成，则该等价式称为原式的主析取范式.

主合取范式 对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由大项的合取所组成，则该等价式称为原式的主合取范式.

定理1.6 设 A 和 A^* 是对偶式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在 A 和 A^* 中的原子变元，则

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n),$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n).$$

定理1.7 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在公式 A 和 B 中的所有原

子变元，如果$A \Leftrightarrow B$，则$A^* \Leftrightarrow B^*$.

定理1.8 在真值表中，一个公式的真值为T的指派所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式.

定理1.9 在真值表中，一个公式的真值为F的指派所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式.

8. 推理理论

有效结论 设A和C是两个命题公式，当且仅当$A \to C$为一重言式，即$A \Rightarrow C$时，称C是A的有效结论，或称C可由A逻辑地推出. 这里A可以有n个前提$H_1, H_2, \cdots, H_n$.

P规则 前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用.

T规则 在推导中，如果有一个或多个公式重言蕴涵着公式S，则公式S可以引入推导之中.

相容 假设公式$H_1, H_2, \cdots, H_n$中的命题变元为$P_1, P_2, \cdots, P_n$，对于$P_1, P_2, \cdots, P_n$的一些真值指派，如果能使$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$的真值为T，则称公式$H_1, H_2, \cdots, H_n$是相容的.

不相容 假设公式H_1，H_2，…，H_n中的命题变元为P_1，P_2，…，P_n，对于P_1，P_2，…，P_n的每一组真值指派，如果能使$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$的真值均为F，则称公式$H_1$，$H_2$，…，$H_n$是不相容的.

直接证法 由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的等价或蕴涵公式，推演得到有效的结论. 常用的蕴涵式和等价式列入表1.1和表1.2中.

间接证法

(1)要证明$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C$，只要证明$H_1, H_2, \cdots, H_m$与$\neg C$不相容.

(2)要证明$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C)$，如能证明$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge R \Rightarrow C$，即证得$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C)$. 这个证明称为CP规则.

表 1.1　蕴涵公式表

序　　号	公　　式
I_1	$P \wedge Q \Rightarrow P$
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow Q$
I_3	$P \Rightarrow P \vee Q$
I_4	$Q \Rightarrow P \vee Q$
I_5	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_6	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_7	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$
I_8	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$
I_9	$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$
I_{10}	$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
I_{11}	$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$
I_{12}	$\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$
I_{13}	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$
I_{14}	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$
I_{15}	$A \rightarrow B \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$
I_{16}	$A \rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$

表 1.2　等价公式表

序　　号	公　　式
E_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
E_2	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
E_3	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
E_4	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
E_5	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
E_6	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
E_7	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
E_8	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
E_9	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
E_{10}	$P \vee P \Leftrightarrow P$

续表

序　　号	公　　式
E_{11}	$P \wedge P \Leftrightarrow P$
E_{12}	$R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{13}	$R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{14}	$R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow \mathrm{T}$
E_{15}	$R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \mathrm{F}$
E_{16}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
E_{17}	$\neg (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
E_{18}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
E_{19}	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$
E_{20}	$P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
E_{21}	$P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
E_{22}	$\neg (P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow P \rightleftarrows \neg Q$

9. 应用

命题逻辑联结词相对应的门电路如图 1.1 所示.

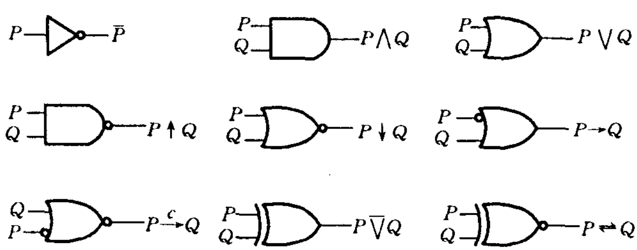

图 1.1

疑 难 解 析

【题 1】 判断下列句子哪些是命题. 在命题中,判断哪些是简

单命题，哪些是复合命题. 在可能的情况下求出其真值.

(1)$2x+3=6$.

(2)明年10月1日不是晴天.

(3)这朵花多么好看呀!

(4)今天下午有会吗?

(5)地球外有的星球上有水.

(6)我正在说谎.

(7)请不要大声吵闹!

(8)$1+101=110$.

(9)明天如果天气晴朗，我将去公园.

(10)我学习英语或德语.

(11)雪是黑的当且仅当太阳从东方升起.

(12)2是偶数且是素数.

分析 可利用排除法来解. 首先，命题必须是陈述句，所以题(3)、(4)、(7)是非陈述句，应该排除，它们不是命题. 其次，命题必须有确定的真值，凡无确定真值的陈述句也不是命题. 题(1)的真值随变量 x 的不同而不同. 如 $x=1.5$，它是真命题，如 x 等于其他值，它是假命题. 故该陈述句没有确定的真值，因而它也不是命题. 需要注意的是，真值是否确定与我们是否知道它的真值是两码事. 如题(5)是具有确定的真值的，只是目前的科技水平还无法知道该命题的真值答案而已(这类问题显然多得不胜枚举). 注意，题(6)也不是命题，它是一个悖论. 因为，如果所说的是真话，则说“我正在说谎”是一个假命题；如果所说的是假话，而说“我正在说谎”又是一个真命题. 因此，该陈述句无确定真值.

解 由以上分析可知，题(2)、(5)、(8)～(12)是命题，其中题(2)、(5)、(8)是原子命题，题(9)～(12)是复合命题. 题(2)的真值要等到明年10月1日才能确定. 题(5)的真值目前也无法确定. 对于题(8)，如果所说是二进制，则是一个真命题；如果所说是十进制，则是一个假命题. 对于题(9)，当明天天气晴朗，而我又去了公

园时，则其真值为T.或“明天天气不是晴天”命题亦为T.对于题(10)，“我学习英语”、“我学习德语”只要有一个为T，该命题即为T.题(11)为假命题，因“雪是黑的”为F，“太阳从东方升起”为T，故该双条件命题为F.对于题(12)，因2既是偶数又是素数，故该合取命题为T.

【题2】 将下列命题符号化：

(1)他既聪明又用功.

(2)辱骂和恐吓绝不是战斗.

(3)除非天气好，否则我是不会去看电影的.

(4)我将去现场看这场比赛，或在家看电视转播.

(5)如果晚上他在家里且没有其他的事情，他一定会看电视或听音乐.

分析 将一个命题符号化，就是要将这个命题表达成符合规定的命题表达式.在具体表达时，通常应先将命题中所包含的原子命题列出，然后再用适当的联结词联结起来.将命题分解成原子命题一般并不困难，问题的关键在于要选择好适当的联结词.要准确表达原命题的意义，就必须对原命题的中文含义有较深刻、较透彻的理解.特别应注意的是，命题逻辑中的联结词一般和中文中的联结词之间并没有一一对应的关系.因此，必须仔细揣摩命题的实际含义，理解命题中各原子命题中的结构关系，而不应拘泥于命题的形式而生搬硬套.

在题(1)中，“他聪明”、“他用功”显然是并列关系，应用联结词“$\wedge$”联结.在汉语中，并列关系可以用多个联结词表示，除用“既……又……”表达外，还可以用“且”，“不但……，而且……”等表达.

题(2)的实际含义应为：辱骂不是战斗，恐吓不是战斗，辱骂和恐吓在一起也不是战斗.因此，应用联结词“$\vee$”表示.注意，此例的中文意思也可写成“辱骂和恐吓都不是战斗”，因此很容易用“合取”来表示，这是因对此命题的准确含义理解不透、仅从表达形式硬套而造成的.