普通高等教育基础课规划教材

高等数学

一元微积分及其实验

（MATLAB版）

任玉杰　孙文惠　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

高等数学
一元微积分及其实验
（MATLAB 版）

主　编　任玉杰　孙文惠
主　审　贺祖国

机械工业出版社

《高等数学 一元微积分及其实验（MATLAB版）》和《高等数学 多元微积分及其实验（MATLAB版）》这套教材是“辽宁省高等教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划”中的项目“高等数学课程教学内容和体系改革”的研究成果，也是根据作者多年来的教学和科研经验，集思广益，广泛吸取国内外一些相关教材之所长，在此基础上把教学内容、教学体系、教学手段的改革融为一体的21世纪的新型改革教材。其中《高等数学 一元微积分及其实验（MATLAB版）》共十章，包括一元函数微积分学、数学软件MATLAB简介、数学实验、数值微积分和非线性方程（组）的数值解法及其MATLAB程序。

本书各章均安排了演示与实验，增加了经济应用、数值微积分和非线性方程（组）的数值解法及其数学建模的基本内容和基本方法等，每章末附有上机实验的课题。作者把多年在大学数学实验的教学中编写的一些MATLAB程序和例题融入到本教材中，在每个数学实验、数值微积分和非线性方程（组）的数值解法的例题中都配备了MATLAB计算程序。某些程序具有科研和使用价值。

本书可作为高等院校工科、理科、经济及管理等各专业高等数学的教材，也可以作为数学实验教材选用，另外还可以作为教师、学生和工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．一元微积分及其实验：MATLAB版/任玉杰，孙文惠主编．—北京：机械工业出版社，2004.8

普通高等教育基础课规划教材

ISBN 7-111-15053-8

Ⅰ．高… Ⅱ．①任…②孙… Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第081301号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：刘小慧 版式设计：霍永明 责任校对：程俊巧

责任编辑：马军平 封面设计：张 静 责任印制：洪汉军

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2004年9月第1版·第1次印刷

787mm×1092mm 1/16·34印张·838千字

定价：46.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、88379646

前　　言

本套教材分为《高等数学　一元微积分及其实验（MATLAB 版）》和《高等数学　多元微积分及其实验（MATLAB 版）》两册。它是“辽宁省高等教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划”中的项目“高等数学课程教学内容和体系改革”的研究成果，也是根据作者多年来的教学和科研经验，集思广益，广泛吸取国内外一些相关教材之所长，在此基础上把教学内容、教学体系、教学手段的改革融为一体的 21 世纪的新型改革教材。它显示了如下几方面的新的探索。

1. 从数学统一性的观点，从全面素质教育的高度，打破了传统的大学数学教学体系，设计了一套新大学课程的体系，将数值分析和计算机数学软件 MATLAB 的相关内容分别融入到《高等数学》、《线性代数》和《概率论与数理统计》课程之中，并增加实验环节，形成非数学专业的三门必修课——《高等数学及其实验（MATLAB 版）》、《线性代数及其实验（MATLAB 版）》和《概率论与数理统计及其实验（MATLAB 版）》。在作者讲授高等数学课时，经常有学生问这样的问题：如果不知道一个函数的具体表达式，而仅仅已知该函数的一些离散的点，如何求它的微积分？零点定理和罗尔定理只是给出了方程根的存在，那么如何求一个非线性方程（组）的根？对于传统的教材，作者只能向学生说：你提出的问题非常好，这也是以后参加工作经常遇到的问题，这属于计算方法（数值分析）的内容。从历届毕业生参加工作后反馈的信息告诉我们：打破传统的教学体系，将计算方法（数值分析）化整为零融入到大学数学的每门课程中，再将计算机数学软件与这些课程融合，向学生传授一套完整地、科学地解决一类问题的方法，使学生能够适应将来的工作和科研环境需要是十分重要的。因此，本教材除精选了非数学专业的学生必须掌握的高等数学的全部内容之外，还特别融入了与之对应的计算方法（数值分析）、计算机数学软件 MATLAB 的使用等内容，增加了数学实验环节，从而开拓了高等数学的解析解法和数值解法及用计算机软件 MATLAB 进行科学计算相融合的新举措。

2. 在计算手段的处理上，采用了手工计算和计算机计算各有侧重的处理手法。在高等数学的内容处理上，采用了以手工计算为主，计算机计算为辅的策略。为了使学生理解和掌握高等数学的理论和方法，在每节中都配备了 A 组的基本题和 B 组的提高题，每章还给出了复习题以供学生进行手工计算，在每章最后都加入了用计算机软件 MATLAB 作数学实验的内容，通过计算机模拟仿真，给出极限、连续、微积分中值定理、微积分的几何应用等内容的可视化动态图形，加深学生对它们的理解，并给出了用计算机处理实际问题的算例和程序，使学生了解用计算机软件进行科学计算的方法。在计算方法（数值分析）的内容和高等数学的技巧题上，强化了用 MATLAB 程序通过计算机进行科学计算，削弱了手工计算。

3. 在内容安排上，考虑到目前我国硕士研究生数学入学考试的要求和师资队伍的结构等问题，将非数学专业的学生必须掌握的高等数学的全部内容安排在每章的前几节，而数学实验内容安排在每章最后，将对应的计算方法（数值分析）内容放在最后几章，以便根据情况选用，以拓宽学生的知识视野。

4. 作者把多年在大学数学实验的教学中编写的一些 MATLAB 程序和例题融入到本教材中，在每个数学实验、数值微积分和非线性方程（组）的数值解法的例题中都配备了 MATLAB 计算程序。本书中有许多程序和算例目前在其他书籍中尚未见到。例如，逐步搜索法的 MATLAB 主程序、埃特金加速（Aitken）方法的 MATLAB 程序、加权迭代法的 MATLAB 主程序、某些作图程序等都是作者首创，并且首次公开出版，具有科研和实用价值。

5. 加强数学应用能力和科学计算能力的培养。本书在讲解数学内容的同时，力求突出在解决实际问题中有重要应用的数学思想方法，揭示重要数学概念和方法的本质。把数学建模的最基本的内容和方法融入教材，便于学生在学习微积分的过程中也学会用数学方法将实际问题转化为数学模型，然后用计算机程序进行科学计算。此外，在教材中除保留了几何应用和物理应用以外，还增加了经济应用（如边际分析、资本现值和投资问题等）和上机实验的应用问题。在每章的数学实验中，列举了大量的用 MATLAB 计算和绘图的例题和上机实验的习题，使学生在学会微积分解决实际问题的同时，也学会用计算机软件解决对应问题的方法，从而培养学生数学应用能力和科学计算能力，使学生能够适应将来的工作和科研环境。

6. 在数学实验环节中，作者利用编写的动态演示程序等画图程序，动态地显示函数和数列求极限的动态变化过程、微积分定理的几何意义等，以几何直观的方法帮助学生理解有关的概念和定理。本书将数学软件 MATLAB 融入教学之中，增加了数学实验环节，加强应用和几何直观，增加了应用性的例题和习题，在每章中都配有上计算机计算的数学实验课题的手段，以培养学生的科学计算能力，使学生的知识、能力和素质都能够得到提高。应该说，这是原有教学过程的一个飞跃。

相应地，这套教材对教师也提出了更高的要求：教师不但能讲授知识，而且会应用计算机软件，还要改进教学方法，能够进行创新研究。这当然有利于教师能力和教学水平的提高。

本书由任玉杰策划并负责全书大纲的设计，并由任玉杰和孙文惠主编和统稿。本书各章节执笔人是：任玉杰（编写第 1 章 1.5 和 1.6、第 2 章 2.6、第 3 章 3.6、第 4 章 4.10 和 4.11、第 5 章 5.7、第 6 章 6.6、第 7 章 7.6、第 8 章、第 9 章和第 10 章）、孙文惠（编写第 1 章 1.1～1.4、第 2 章 2.1～2.5）、蔺琳（编写第 5 章 5.1～5.6、第 6 章 6.1～6.5）、张晓峰（编写第 4 章 4.1～4.9）、孙青松（编写第 3 章 3.1～3.5、第 7 章 7.1～7.5）。

本书编写过程中得到大连国际商务学院张文超院长、石云明教授、臧恩钰教授、王芸生处长和杨运湘科长，大连轻工业学院余加佑校长、党委书记林茂全、副校长安庆大和李长吾、教务处马处长、数理和信息工程学院领导和数学教研室教师的支持和帮助，贺祖国教授、石云明教授审查了书稿，并给予指导，景卓帮助孙文惠和孙青松进行了文字录入，还得到作者的博士导师大连理工大学张鸿庆教授和硕士导师滕素珍教授的热情支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

21 世纪的改革教材应该多模式、多品种，本书只是其中的一种模式所作的初步探索和尝试。本书在内容精简和实现数学机械化以及培养学生数学应用能力和科学计算能力等方面，虽然也作了一些努力，但仍感觉差距很大，真诚地欢迎同行、读者和专家提出不同的见解，并希望广大读者对教材中的错误、缺点和不足之处提出批评和指正。最后，我们也真诚地欢迎对本教材有兴趣的同行参加试用。

任玉杰

目　录

第1章　函　　数

初等数学研究的对象基本上是不变的量,可称为常量数学,而高等数学则是以变量为研究对象,也称为变量数学。函数是现实世界各种变量之间的相互依存关系,本章所研究的函数是高等数学中最重要的概念之一,内容包括函数的概念及其各种属性、基本初等函数及其性质、初等函数及一些常见的非初等函数。

因为我们在实数集合中研究函数,所以本章的开始先对实数集有关知识作必要的介绍,为后面学习的需要也复习一下有关平面直线的知识。

1.1　实数

1.1.1　集合

集合是不加定义的原始概念,所谓集合 S 就是具有某种属性的对象的全体。集合 S 中的每一个体 a,称为集合 S 的元素。如果 a 是集合 S 的元素,记为 $a\in S$,读作"a 属于 S";如果 a 不是集合 S 的元素,则记为 $a\notin S$,读作"a 不属于 S"。

习惯上,我们常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,而用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素。我们常用两种方法表示集合,例如,由元素 1,2,3,4,5,构造成的集合 S,我们可以表示成

$$S=\{1,2,3,4,5\}$$

这种表示集合的方法,是将集合 S 中的所有元素都列举出来,称为列举法。

集合 S 也可以用下面的方式表示

$$S=\{n\mid n\text{ 是不大于 5 的正整数}\}$$

这里我们用一个命题:"n 是不大于 5 的正整数"来描述集合 S 中所有元素 n 的属性,这种表示集合的方法,称为描述法。

我们常用描述法来表示一个集合,即用 $\{x\mid p(x)\}$ 表示所有满足命题(或性质) $p(x)$ 的实数 x 组成的集合。例如 $\{x\mid x^2+1=2\}$ 表示所有满足等式 $x^2+1=2$ 的实数 x 构成的集合。

集合中元素的个数为有限个的集合称为有限集合,否则称为无限集合。例如集合 $\{x\mid x^2+1=2\}$ 为有限集合,$\{x\mid x=2n,n\text{ 为自然数}\}$ 为无限集合。

如果集合 A 中的所有元素都属于集合 B,称 A 包含于 B,或称 B 包含 A,记作 $A\subseteq B$。这时称集合 A 是集合 B 的子集。若 $A\subseteq B$,又 $B\subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记为 $A=B$。例如,

$$A=\{-1,1\},\qquad B=\{-1,0,1,2\},\qquad C=\{x\mid x^2+1=2\}$$

则有 $A\subseteq B$,$A=C$。

不含有任何元素的集合,称为空集,空集记为 $\varnothing$。例如在实数范围内集合 $\{x\mid x^2+1=0\}$ 就是空集。空集是任何集合的子集。应注意集合 $\{0\}$ 不是空集,它是含有一个元素"0"的集合。

设 A,B 是两个集合,由这两个集合中的所有元素组成的集合称为集合 A 和集合 B 的并集,记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

集合 A 和集合 B 的所有公共元素构成的集合称为集合 A 与集合 B 的交集,记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

例如,$A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{1,3,5,7\}$,则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,7\},A\cap B=\{1,3\}$$

1.1.2 实数与若干常见实数集

1. 实数与数轴

数轴是研究实数的重要工具,有关实数的许多性质,都可以通过数轴直观地反映出来,因此,我们首先应建立数轴的概念。

设有一条水平直线,在这条直线上取一定点 O,称为原点,规定一个正方向(通常规定由原点向右的方向为正方向),再规定一个长度,称为单位长度。这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴(如图 1-1 所示)。

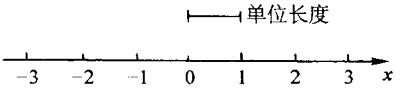

图 1-1

数轴上任意一点 P,都对应一个实数。若点 P 就是原点 O,则这个实数 $x=0$;若点 P 在原点 O 的右侧,则点 P 对应的实数 x 就等于用单位长度量线段 OP 得出的长度 $|OP|$,即 $x=|OP|$;若点 P 位于原点的左侧,则 $x=-|OP|$。反之,任意一个实数 x,都可以在数轴上找到一点 P,使得点 P 对应的实数为 x。这样一来,数轴上的点就与全体实数建立了一一对应的关系。

2. 实数集的性质

人们对于数的认识是有个发展过程的,首先认识的是自然数,即正整数,然后是整数和有理数,再后是无理数。

一般,我们用 N 表示所有自然数构成的集合;用 Z 表示全体整数构成的集合;用 Q 表示全体有理数构成的集合;用 R 表示全体实数构成的集合。

实数集具有哪些性质呢?

首先看有理数集具有什么性质,有理数集包括所有整数与分数 $\frac{p}{q}$(其中 p,q 为整数,$q\neq 0$)。有理数集对于四则运算是封闭的,也就是说,对于有理数任意进行加、减、乘和除法运算(零不能作除数),得到的结果仍然是有理数。另外有理数集还有两个重要性质:一个是有序性,即有理数可以按由小到大的顺序在数轴上自左至右排列起来,也就是说有理数集是有序集。另一个性质是它的稠密性,即任意两个有理数之间都有无穷多个有理数,即若 x_1,x_2 是有理数,则在 x_1 与 x_2 之间的 $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ 也是有理数,依此下去,x_1 与 x_2 之间有无穷多有理数,也就是说表示有理数的点在数轴上是处处稠密的。

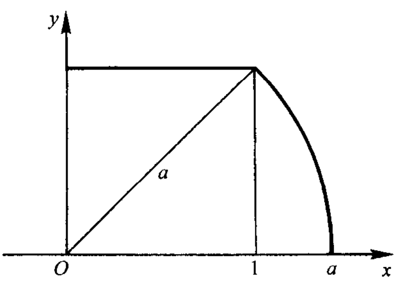

图 1-2

虽然有理数点在数轴上是处处稠密的,但有理数点不能充满整个实数轴。例如,边长为 1 的正方形对角线长等于 a,则 $a^2=2$,以数轴上的原点为圆心,以 a 为半径划弧,则弧与数轴的交点就不是有理数点(如图 1-2 所示),实际上这个点表示的是无理数 $\sqrt{2}$。这说明在数

轴上除了有理数点之外还有许多“空隙”,这些空隙处的点称为无理数点。无理数点表示的数是无限不循环小数,称为无理数。有理数和无理数统称为实数,所有实数构成的集合称为实数集。所有实数充满了数轴,数轴上的点与实数之间建立了一一对应关系,因此,通常将实数 x 与数轴上代表实数 x 的点不加区别。实数 x 也称为点 x,反之亦然。

实数集除了具有同有理数集一样的三个性质(对四则运算封闭,有序性,稠密性)之外,还有另外一个重要性质,即实数集的连续性。这个连续性就表现在全体实数与数轴上的点一一对应,这是有理数集所不具备的,用形象的话说,如果一个点在数轴上连续移动,那么,它经过的每一个位置都代表一个实数。

3. 若干常见的实数集

今后我们常要用到实数集 R 的子集,最常用的是如下各种区间:

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$

半开半闭区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$

上述区间都为有限区间,除此之外,还有以下无限区间

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$

$(-\infty,b]=\{x\leqslant b\}$,$(-\infty,-b)=\{x\mid x<b\}$,$(-\infty,+\infty)=R$

这里需要说明的是,“$+\infty$”读作正无穷大,“$-\infty$”读作负无穷大,“∞”读作无穷大,它们只是一种记号而不是数,不能参与四则运算。

有时我们用字母 I 表示一般区间。

【例 1-1】 利用区间表示集合 $S=\{x\mid x^2+x-12>0\}$

解 将不等式 $x^2+x-12>0$ 左端分解因式,化成等价形式

$$(x-3)(x+4)>0$$

此不等式左端是两个因子乘积,为了使这个乘积为正数,必需且只需使它们的符号相同,即或者 $x-3>0$ 且 $x+4>0$,或者 $x-3<0$ 且 $x+4<0$。即或者 $x>3$,$x>-4$ 同时成立,或者 $x<3$,$x<-4$ 同时成立。前者意味着 $x\in(3,+\infty)$,后者意味着 $x\in(-\infty,-4)$,也就是说,不论 $x\in(3,+\infty)$,还是 $x\in(-\infty,-4)$,都满足不等式 $x^2+x-12>0$,因此有

$$(-\infty,-4)\cup(3,+\infty)=\{x\mid x^2+x-12>0\}$$

设 S 是一个非空数集,如果存在正数 M,使得对于所有的数 $x\in S$,都有 $|x|\leqslant M$,则称 S 为有界数集。

集合 A 中如果有最大的数 b,则称 b 为集合 A 的最大值,A 的最大值记为 $\max A$;集合 A 中如果有最小的数 c,则称 c 为集合 A 的最小值,A 的最小值记为 $\min A$。

例如闭区间 $[0,1]$ 和开区间 $(0,1)$ 都是有界集。闭区间 $[0,1]$ 的最小值和最大值分别是 0 和 1,而开区间 $(0,1)$ 既无最大值,也无最小值。这说明,有界数集未必有最大值和最小值。

1.1.3 实数的绝对值、邻域

在研究某些问题时,常常用到实数绝对值的概念。下面介绍一下实数绝对值的定义及性质。

1. 实数的绝对值

定义 1-1 一个实数 x 的绝对值,记为 $|x|$,定义为

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$|x|$的几何意义：$|x|$表示数轴上点 x（不论 x 在原点左边还是右边）与原点之间的距离。

绝对值及其运算有下列性质：

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$

(2) $|x| \geqslant 0$

(3) $|-x| = |x|$

(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

因为：$x > 0$ 时，有 $-|x| < x = |x|$；$x < 0$ 时，有 $-|x| = x < |x|$；$x = 0$ 时，有 $-|x| = x = |x|$，所以，总起来有 $-|x| = x < |x|$

(5) 如果 $a > 0$，则有

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

从几何上看，$|x| < a$ 表示所有与原点间距离小于 a 的点 x 的集合，而 $-a < x < a$ 表示所有在点 $-a$ 和 a 之间的点 x 的集合，所以它们表示的是相同的点集。

同理有 $$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$$

(6) 如果 $b > 0$，则有

$$|x| > b \Leftrightarrow x < -b \text{ 或 } x > b$$
$$|x| \geqslant b \Leftrightarrow x \leqslant -b \text{ 或 } x \geqslant b$$

(7) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

由上面性质(4)有

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$$
$$-|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

两式相加得

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

再由性质(5)得

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

(8) $|x - y| \geqslant |x| - |y|$

由于$|x| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| + |y|$

所以$|x - y| \geqslant |x| - |y|$

(9) $|xy| = |x||y|$

(10) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

2. 邻域

由绝对值性质(5)可知，实数集合

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

在数轴上，是一个以点 x_0 为中心、长度为 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，称其为点 x_0 的 δ 邻域。称 x_0 为邻域的中心，称 δ 为邻域的半径（如图 1-3 所示）。

例如，$|x - 5| < \dfrac{1}{2}$，是以点 $x_0 = 5$ 为中心，以$\dfrac{1}{2}$为半径的邻域，也就是开区间(4.5,5.5)。

有时我们会用到集合

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta, \delta>0\}$$

这是在点 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0，其余的点所组成的集合，即集合 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$，称其为以 x_0 为中心，δ 为半径的空心邻域（如图 1-4 所示）。

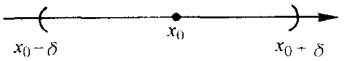

图 1-3

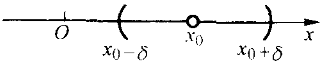

图 1-4

今后如果说 x_0 的某邻域，就是指某个开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$；说 x_0 的某空心邻域，就是指区间 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$，$\delta$ 是某个确定的正数，但有时没有必要指出这个正数 δ 的具体数值。

【例 1-2】 解下列不等式。

(1) $0<x^2<4$ (2) $\left|ax+\dfrac{1}{2}\right|<1 \quad (a>0)$

解 (1) 由 $x^2<4$，知 $|x|<2$，即 $-2<x<2$，

又由 $0<x^2$，知 $x\neq 0$，所以 $-2<x<0$ 或 $0<x<2$

(2) $-1<ax+\dfrac{1}{2}<1$，$-1-\dfrac{1}{2}<ax<1-\dfrac{1}{2}$，即

$$-\frac{3}{2}<ax<\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2a}<x<\frac{1}{2a}$$

【例 1-3】 用区间表示满足不等式 $|x-a|\geqslant\varepsilon$（$a$ 为常数，$\varepsilon>0$）的所有 x 的集合。

解 由绝对值性质 6 知，$|x-a|\geqslant\varepsilon$ 等价于

$$x-a\leqslant-\varepsilon \text{ 或 } x-a\geqslant\varepsilon$$

即

$$x\leqslant a-\varepsilon \text{ 或 } x\geqslant a+\varepsilon$$

所以，满足不等式 $|x-a|\geqslant\varepsilon$ 的所有 x 的集合，就是满足 $x\leqslant a-\varepsilon$ 或 $x\geqslant a+\varepsilon$ 的所有 x 的集合，即区间

$$(-\infty, a-\varepsilon]\cup[a+\varepsilon, +\infty)$$

1.1.4 平面上的点与直线

在平面上作两条互相垂直的直线 Ox 和 Oy 交于点 O，将每条直线当作一条实轴、原点都在 O 处，并且两条实轴的单位长度相等，这样就构成了一个平面直角坐标系 xOy。其中，水平轴称为 x 轴或者横轴，竖直轴称为 y 轴或者纵轴。设 M 是平面上任意一点，自点 M 向 x 轴和 y 轴引垂线，得垂足 P 和 Q，由于 P 和 Q 都是实轴上的点，它们分别惟一地对应实数 x 和 y（如图 1-5 所示）。

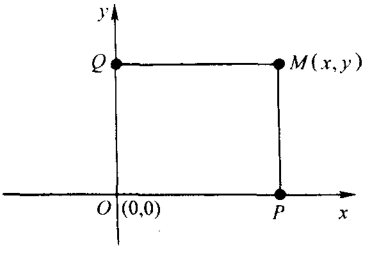

图 1-5

这就是说，平面上每一点 M 惟一地对应一个二元有序实数组 (x, y)，其中实数 x 称为点 M 的横坐标，实数 y 称为点 M 的纵坐标。反之，任意给定一个有序实数组 (x, y)，可以在平面上找到惟一点 M，使得点 M 的横坐标和纵坐标分别为 x 和 y。因此，在建立了平面直角坐标系后，平面上的点 M 就与有序实数组 (x, y) 之间建立了一一对应关系。

x 轴将平面分成上半平面和下半平面，y 轴将平面分成左半平面和右半平面。两个坐标轴又将平面分成四个象限，分别称为第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限(如图 1-6 所示)。

设 $P(x_1,y_1)$和 $Q(x_2,y_2)$是平面上两点，连结两点的线段 PQ 的长度 $|PQ|$ 称为 P,Q 两点之间的距离，则 P、Q 两点之间的距离 $|PQ|$ 为

$$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

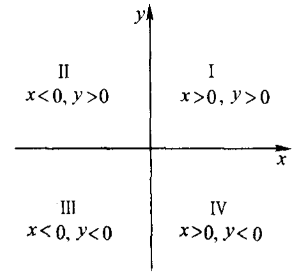

图 1-6

【例 1-4】 求点 $A(3,-4)$到点 $B(-2,3)$的距离；求任一点 $M(x,y)$到原点 $O(0,0)$的距离。

解 点 $A(3,-4)$到点 $B(-2,3)$的距离为

$$|AB|=\sqrt{(3-(-2))^2+((-4)-3)^2}=\sqrt{5^2+(-7)^2}=\sqrt{74}$$

点 $M(x,y)$到原点 $O(0,0)$的距离为

$$|MO|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

以后学习中，常会遇到求平面直线方程的问题。现在给出平面上几种不同形式的直线方程。

直线的点斜式方程，即已知直线过平面上定点 $M_0(x_0,y_0)$，直线斜率为 k，求此直线方程。

在所求直线上任取一点 $M(x,y)$(如图 1-7 所示)。

我们知道直线斜率 $k=\tan\alpha$，其中 α 是直线向上方向与 x 轴正向的夹角，若直线与 x 轴平行或重合则 $\alpha=0$，(若直线与 x 轴垂直则斜率不存在，这时直线方程为 $x=a$，即直线过点$(a,0)$)，由图 1-7 可见

$$k=\tan\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}$$

即

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

这就是直线的点斜式方程。

由此我们易推出直线的以下形式的方程。

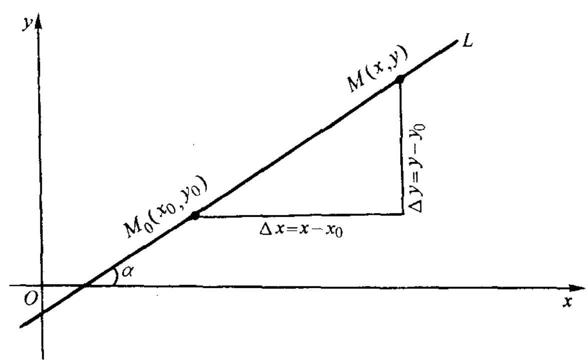

图 1-7

已知直线过两定点 $M(x_1,y_1)$，$M(x_2,y_2)$，则该直线的两点式方程为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

已知直线的斜率为 k，且与 y 轴的截距为 b，则该直线的斜截式方程为

$$y=kx+b$$

已知直线与 x 轴、y 轴的截距分别为 $a,b(a\neq0,b\neq0)$，则该直线的截距式方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

已知某直线的斜率为 k，则与它垂直的直线的斜率为 $-\frac{1}{k}$，若又知该垂直直线过定点(x_0,y_0)，则该垂直直线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$$

【例 1-5】(1) 已知直线 l 过点$(1,2)$和$(-2,4)$,求该直线方程。

(2) 求与直线 l 垂直且过点$\left(1,\frac{1}{2}\right)$的直线方程。

解 (1) 直线 l 的斜率为$k=\frac{4-2}{-2-1}=-\frac{2}{3}$,所求直线 l 的方程为

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-1)$$

即

$$3y+2x-8=0$$

(2) 所求直线斜率为$-\frac{1}{k}=\frac{3}{2}$,所求直线方程为

$$y-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}(x-1)$$

即

$$2y-3x+2=0$$

习 题 1.1

A 组

1-1 写出集合 $A=\{0,1,2\}$的一切子集。

1-2 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,3,5\}$,求 $A\cup B$, $A\cap B$。

1-3 用集合的描述法表示不小于 5 而小于 10 的所有实数组成的集合。

1-4 用区间表示下列不等式的解集合。

(1) $x^2\geqslant 9$　　(2) $|x+2|<1$

(3) $|x-x_0|<\varepsilon$　(x_0 为常数,$\varepsilon>0$)

(4) $|x+1|>2$　　(5) $|x+1|\leqslant 5$

1-5 按照下列直线 l 的斜率 k 和 l 通过点(x_0,y_0)写出 l 的方程,并求 l 与两坐标轴的交点。

(1) $k=2$, $(-2,3)$　　(2) $k=-\frac{2}{3}$, $(1,-1)$

(3) $k=\frac{1}{4}$, $(1,3)$

1-6 已知直线 l 经过下列给出的两个点,写出直线 l 的方程。

(1) $(-3,4)$和$(2,5)$　　(2) $(2,-1)$和$(1,4)$

(3) $(-4,0)$和$(0,5)$

B 组

1-7 解下列不等式。

(1) $x^2<9$　　(2) $0<(x-2)^2<4$

(3) $|ax-x_0|<\delta$ ($a>0,\delta>0,x_0$ 为常数)

1-8 用区间表示下列点集,并在数轴上表示出来。

(1) $I_1=\{x\,|\,|x+3|<2\}$　　(2) $I_2=\{x\,|\,1<|x-2|<3\}$

1-9 用区间表示下列各邻域。

(1) 以 $x_0=\frac{1}{2}$ 为中心，以 $\delta=1$ 为半径的邻域。

(2) 以 $x_0=1$ 为中心，以 $\delta=\frac{1}{2}$ 为半径的空心邻域。

(3) 以 x_0 为中心，以 ε 为半径的邻域（x_0 为常数，$\varepsilon>0$）。

1-10 用列举法表示下列集合。

(1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合。

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合。

(3) 集合 $\{x \mid |x-1|\leqslant 5$ 的正整数$\}$。

1-11 已知直线 l 的方程为 $2x+y=1$，求满足下列要求的直线方程。

(1) 过原点且与 l 垂直　　(2) 过点(3,2)且与 l 垂直

(3) 过原点且与 l 平行　　(4) 过点(3,2)且与 l 平行

1.2 函数及其简单性质

1.2.1 函数的概念

1. 函数定义

在自然科学和社会生活中，我们经常会遇到各种不同的量，这些量一般可以分成两类，其中一类在研究过程中保持不变，这样的量称为常量。另一类量在研究过程中是变化的，这样的量称为变量。在同一个过程中往往有几个变量同时变化，但是它们的变化不是孤立的，而是按照一定的规律互相联系着，其中一个量变化会引起另一个量变化，当前者的值确定时，后者的值按照某种关系就随之确定，这就是变量之间的函数关系。

【例 1-6】 自由落体运动中，物体垂直下落的距离 S 与下落时间 t 的关系是

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

其中，g 为重力加速度。在这个过程中时间 t 和距离 S 为变量，重力加速度 g 为常量。严格地说，g 也应为一个变量，因为每点的重力加速度与该点所处的位置到地心的距离有关。然而，如果在某个自由落体运动中，物体下落的距离不是很大，而相对地球半径是极小的，那么重力加速度 g 变化极小，因此可以近似地看作常数，当 t 在 $[t_1,t_2]$ 中（t_1 是运动开始时刻，t_2 是物体落地时刻），每取一确定的值 t_0 时，S 就有惟一确定的值 $S=\frac{1}{2}gt_0$ 与之对应。变量 t 与 S 之间的这种对应关系，就是函数关系。

定义 1-2 设 D 是一个非空实数集，如果对每一个确定的 $x\in D$，按照某种对应法则 f，都有惟一确定的数值 y 与之对应，则称 y 为定义在 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$。其中 x 叫作自变量，y 叫作因变量，D 叫作函数的定义域。

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 y_0 或 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$。

全体函数值的集合 $\{y \mid y=f(x), x\in D\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的值域。

函数 $f(x)$ 中的 f 反映自变量与因变量的对应规则。对应规则 f 也可用其他字母 φ,h,g 等表示，那么函数也就记作 $\varphi(x),h(x),g(x)$ 等，有时为了简化符号，函数也记作 $y=y(x)$，

此时等号左边的 y 表示函数值，右边的 y 表示对应规则。

$f(x)$表示将规则 f 施用于 x，如果把 $f(x)$中的 x 换成某个具体数值或表示数值的字母以及某个数学式子，则表示将规则 f 施用于那个具体数值或表示数值的字母以及那个数学式子。

例如

$$f(x)=x^2+1$$

那么有

$$f(2)=2^2+1$$
$$f(a)=a^2+1$$
$$f(x-1)=(x-1)^2+1$$
$$f\left(-\frac{1}{y}\right)=\left(-\frac{1}{y}\right)^2+1$$
$$f[f(x)]=[f(x)]^2+1=(x^2+1)^2+1$$

在平面直角坐标系中，取自变量在横轴上变化，因变量在纵轴上变化，则平面点集$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$即为函数 $y=f(x)$在其定义域上的图像，该图像就是在函数定义域上的一条平面曲线。

2. 函数的两个要素

定义域 D 和对应规则f惟一确定函数 $y=f(x)$，故定义域和对应规则称为函数的两个要素。如果函数的两要素相同，那么它们就是相同函数，否则就是不同函数。相同函数要用相同函数符号表示，不同函数要不同函数符号表示，这与自变量和因变量用什么字母表示无关。例如 $y=f(x)$，$u=f(v)$表示相同函数，$y=f(x)$，$y=\varphi(x)$表示不同函数。

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的。若不考虑函数的实际意义，而只研究用解析式子表达的函数，规定函数的定义域是使解析式子有意义的自变量所取的一切实数值。

通常求函数定义域要考虑以下几点：

(1) 当函数是多项式时，定义域为$(-\infty,+\infty)$。

(2) 解析式子中含有分式时，自变量取值不得使分母为零。

(3) 含有偶次根式时，自变量取值不能使被开方式子为负值。

(4) 含有对数函数时，自变量取值必须使真数大于零。

(5) 含有反正弦 $\arcsin\varphi(x)$或反余弦 $\arccos\varphi(x)$时，自变量 x 取值必须满足$|\varphi(x)|\leqslant 1$。

(6) 如果函数表达式中含有上述几种函数，则应取各部分定义域的交集。

【例 1-7】 求下列函数定义域。

(1) $y=\sqrt{x+3}-\dfrac{1}{x^2-1}$　　　(2) $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{2}$

解 (1) 若使$\sqrt{x+3}$有意义，需 $x+3\geqslant 0$，即 $x\geqslant -3$，若使$\dfrac{1}{x^2-1}$有意义，需 $x^2-1\neq 0$，即 $x\neq\pm 1$，所以函数定义域为$[-3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

(2) 若使$\sqrt{x^2-4}$有意义，需 $x^2-4\geqslant 0$，即$|x|\geqslant 2$，也就是 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2$，若使 $\arcsin\dfrac{x}{2}$有意义，需$\left|\dfrac{x}{2}\right|\leqslant 1$，即$-2\leqslant x\leqslant 2$，所以函数定义域为$\{x\mid x=\pm 2\}$。