College

高等学校经典教材配套辅导丛书

微积分

辅导及习题精解

同济二版

上册

滕加俊 滕兴虎 廖洪林 编著

◆ 名师执笔 ◆ 精准解答

◆ 知识归纳 ◆ 习题全解 ◆ 经典考题

陕西师范大学出版社

高等学校经典教材配套辅导丛书

微积分
辅导及习题精解
（上册）

滕加俊　滕兴虎　廖洪林　编著

陕西师范大学出版社

图书代号:JF5N0046

图书在版编目(CIP)数据

微积分辅导及习题精解(上、下册)/滕加俊,滕兴虎,廖洪林 编著. 一西安:陕西师范大学出版社,2005.2

(高等学校经典教材配套辅导丛书)

ISBN 7-5613-3278-5

Ⅰ.微… Ⅱ.①滕…②滕…③廖… Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 007323 号

责任编辑 史 进
装帧设计 王静婧
出版发行 陕西师范大学出版社
社　　址 西安市陕西师大 120#(邮政编码:710062)
网　　址 http://www.snuph.com
经　　销 新华书店
印　　刷 南京人民印刷厂
开　　本 850×1168 1/32
印　　张 41.75
字　　数 850 千
版　　次 2005 年 3 月第 1 版
印　　次 2005 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 49.00 元(上册 24.50 元, 下册 24.50 元)

开户行:光大银行西安南郊支行 账号:0303070-00330004695

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电 话:(029)85307864 85233753 85251046(传真)

E-mail:if-centre@snuph.com

前 言

《微积分》作为高等数学的重要组成部分，是理工科学生必修的一门重要基础课，也是许多专业研究生入学考试的必考科目。微积分中的概念复杂多样，从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分，形成了一个无比精美的庞大系统，这个系统不仅内容丰富，更重要的是结构严密，无懈可击。作为进入大学阶段学习的第一门高等数学课程，许多同学在学习过程中感到微积分抽象、难懂，对基本概念以及定理结论在理解上感到困难，具体解题时，缺乏思路，难以下手。为了帮助广大同学更好地掌握微积分的基本概念和基本理论，综合运用各种解题的技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力，我们根据同济大学应用数学系编写的《微积分》编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 主要概念及公式：列出相应各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握和理解的核心内容。

2. 重点难点解答：列出相应各章的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出相应的解释说明，以帮助广大同学对相应的内容理解得更加透彻。

3. 课后习题全解：教材中课后习题丰富、层次多，许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促其掌握基本解题方法。对此，我们对教材课后的全部习题给出了详细的解答。由于微积分解题方法千变万化，大多数习题我们只给出了一种参考解答，其他方法留给读者自己去思考。

4. 考研试题精解：精选历年硕士研究生入学考试试题中具有

代表性的试题进行了详细的解答，这些试题涉及内容广、题型多、技巧性强，可以使广大同学举一反三，触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握微积分的基本内容和解题方法。

5. 实验题解答：鉴于计算机的广泛应用以及数学软件的日臻完善，教材中编写了14个数学实验。我们对这些实验题给出了详细的解答和说明。由于思路的不同，实验题还有其他更好的解答，我们只是提供了一种参考解答，全书的实验题解答单列在教材的最后。

本书由滕兴虎、廖洪林、吴红、罗剑、汤光华、周华任等同志编写，全书由滕加俊统稿。在本书的策划、编写、审稿等方面得到了陕西师范大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示感谢。由于编者的水平有限，加之时间仓促，书中不妥之处敬请广大同行和读者批评指正。

编　者

2005.2.20

目　录

1　基础知识及习题精解

预备知识 ………………………………………………… (3)

第一章　极限与连续 ……………………………………… (32)

第二章　一元函数微分学 ………………………………… (112)

第三章　一元函数积分学 ………………………………… (253)

第四章　微分方程 ………………………………………… (435)

2　实验题解答

预备知识 ………………………………………………… (605)

第一章　极限与连续 ……………………………………… (609)

第二章　一元函数微分学 ………………………………… (619)

第三章　一元函数积分学 ………………………………… (635)

第四章　微分方程 ………………………………………… (646)

基础知识及习题详解 1

预 备 知 识

一、基本要求、重点与难点

基本要求：

1. 理解函数及其定义域、值域、图形等概念，掌握函数的表示法；

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；

3. 理解复合函数、反函数、和分段函数的概念；

4. 理解基本初等函数及其定义域、值域等概念；掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念；

5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.

重点：

复合函数的定义域

函数的基本性质

求函数的复合及反函数

建立简单应用问题的函数关系式

难点：

抽象函数的表达式

分段函数的复合及反函数的求法

二、主要概念及公式

1. 集合的概念

(1) 数集

自然数集

$$\boldsymbol{N} = \{0,1,2,3,\cdots n,\cdots\}$$

整数集

$$\boldsymbol{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$$

有理数集

$$\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p,q \in Z, q \neq 0, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$$

复数集

$$\boldsymbol{C} = \{a+bi \mid a,b \in R, i^2 = -1\}$$

正实数集

$$\boldsymbol{R}^{+} = \{x \mid x \in R, x > 0\}$$

负实数集

$$\boldsymbol{R}^{-} = \{x \mid x \in R, x < 0\}$$

去 0 实数集

$$\boldsymbol{R}^{*} = \{x \mid x \in R, x \neq 0\}$$

(2) 运算公式

并集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

交集

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

差集

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

余集

$$A^{C} = \{x \mid x \in I \text{ 或 } x \in A\}$$

直积

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

(3) 区间和邻域

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\};$$

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\};$$

$$[a,\infty)=\{x \mid x \geqslant a\};$$

点 a 的 δ 邻域

$$U(a,\delta)=\{x \| x-a |<\delta\}$$
$$=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\};$$

点 a 的去心 δ 邻域

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<| x-a |<\delta\}$$
$$=\{x \mid (a-\delta,a) \cup (a,a+\delta)\};$$

点 a 的左 δ 邻域

$$U_{-}(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a\};$$

点 a 的右 δ 邻域

$$U_{+}(a,\delta)=\{x \mid a<x<a+\delta\}$$

2. 映射

(1) 映射

设 X 和 Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 T,使得 X 中的每个元素 x 按法则 T 在 Y 中有惟一的元素 y 与之对应,那么称 T 为从 X 到 Y 的映射,记为 $T: X \to Y$. 其中称 x 为原像,y 为像. 集合 X 称为映射 T 的定义域,X 的所有元素的像的集合称为映射 T 的值域.

(2) 满射

若 $T(X)=Y$,则称 T 为从 X 到 Y 的满射.

(3) 单射

若任意的 $x_1,x_2 \in X$,$x_1 \neq x_2$,必有 $T(x_1) \neq T(x_2)$,则称 T 为从 X 到 Y 的单射.

(4) 双射

既是满射又是单射的映射,又称为一一对应.

(5) 复合映射

若映射 $T_1: X \to Y_1$,$T_2: Y_2 \to Z$,且 $T_1(z) \subset Y_2$,则

$$T_2 \circ T_1 : X \to Z$$
$$(T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x)).$$
称为由 T_1、T_2 构成的复合映射.

3. 一元函数

(1) 概念

设数集 $D \subset R$,则 D 到 P 的映射 f 称为定义 D 在上的一元函数,简称函数,记为 $y = f(x), x \in D$.

函数的要素　定义域与对应法则

函数的图形　点集 $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为 $y = f(x)$ 的图形(或称为图像)

(2) 反函数

设映射 $f: D \to f(D)$ 为单射,则称其逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$ 为 f 的反函数. f^{-1} 的对应法则由 f 的对应法则决定. 即如果函数 f 的定义域 D 和值域 $f(D)$ 是一一对应的,则 x 也是 y 的函数,记作 $x = f^{-1}(y)$,称为 $y = f(x)$ 的反函数,习惯上用 x 表示自变量,y 表示函数,因此反函数常记作 $y = f^{-1}(x)$.

(3) 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域是 D,若 $u = \varphi(x)$ 的值域 $\varphi(D) \subset D_1$,则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 为函数 $u = \varphi(x)$ 和 $y = f(u)$ 构成的复合函数. 记作 $f \circ \varphi$,即任意的 $x \in D$ 有 $(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x))$.

(4) 函数的特性

① 奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果 $\forall x \in D$,恒有 $f(x) = f(-x)$(或 $f(x) = -f(-x)$),则称 $f(x)$ 为区间 D 上的偶函数(或奇函数).

显然,函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数就不具有奇偶性. 另外,从函数的图像看,偶函数关于 y 轴对称,奇函数关于坐标原点对称.

② 周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在一个与 x 无关的正数 T,使对 $\forall x \in D$,恒有 $f(x)=f(x+T)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,并且通常把满足关系式的最小正数称为函数 $f(x)$ 的周期.

若 $f(x)$ 的周期是 T,则函数 $f(ax+b)$ 亦是周期函数,周期为 $\dfrac{T}{|a|}$,并且若 $f(x)$,$g(x)$ 分别是以 T_1,T_2 为周期的周期函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期的周期函数.

③ 单调性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果 $\forall x_1, x_2 \in D$,又 $x_1 < x_2$,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在 D 上是单调增加(单调减少)的.

④ 有界性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X \subset D$,如果存在正数 M 使得对任意的 $x \in X$ 都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数 $y=f(x)$ 在数集 X 上有界.

或者存在实数 M_1 及 M_2,使得对任意的 $x \in X$ 都有

$$M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2$$

则称函数 $y=f(x)$ 在数集 X 上有界.

否则,称函数 $y=f(x)$ 在数集 X 上无界.应当注意,有界函数的界是不惟一的,函数 $f(x)$ 有界或无界是相对于某个数集而言的.

(5) 函数的运算

设函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 均在集合 D 上有定义,为实数,则在 D 上可以定义两个函数的下列运算

函数的和,记作 $f+g$,定义为

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \qquad x \in D;$$

函数的差,记作 $f-g$,定义为

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x), \qquad x \in D;$$

函数的积，记作 $f \cdot g$，定义为

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad x \in D;$$

函数的商，记作$\dfrac{f}{g}$，定义为

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x \in D \text{ 且 } g(x) \neq 0;$$

函数的线性组合，记作 $\alpha f + \beta g$（α、β 为实数），定义为

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \qquad x \in D$$

（6）基本初等函数

① 幂函数

$$y = x^a \qquad (a \text{ 是常数})$$

② 指数函数

$$y = a^x \qquad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

③ 对数函数

$$y = \log_a^x \qquad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

④ 三角函数

$$y = \sin x, \qquad y = \cos x,$$

$$y = \tan x, \qquad y = \cot x,$$

$$y = \operatorname{ses} x = \frac{1}{\cos x}, \qquad y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

5）反三角函数

$$y = \arcsin x, \qquad y = \arccos x,$$

$$y = \arctan x, \qquad y = \operatorname{arccot} x$$

（7）初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的并可以用一个算式表示的函数，称之为初等函数.

工程上常用的一类初等函数 —— 双曲函数及反双曲函数

双曲正弦

$$y = \sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

双曲余弦

$$y = \cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

双曲正切

$$y = \tan hx = \frac{\sin hx}{\cos hx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

反双曲正弦

$$y = \operatorname{arcsin} hx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

反双曲余弦

$$y = \operatorname{arccos} hx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

反双曲正切

$$y = \operatorname{arctan} hx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

三、重点、难点解答

1. 函数的定义域

(1) 如果不考虑函数的实际意义，是指使得函数表达式有意义的所有实数的集合，即自然定义域；

(2) 求复杂函数的定义域，就是求由简单函数定义域所构成的不等式组；

(3) 求复合函数定义域时，同时要使得函数满足函数复合的条件：内层函数的值域不超过外层函数的定义域.

2. 关于函数的表达式及函数性质

求函数的表达式时，常常利用函数的表达式与所用字母无关的特性

例 1 设 $f(x)$ 满足方程 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$，其中 a,b,c 为

常数且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$ 并证明它是奇函数.

分析 由 $f(x)$ 所满足的方程，无法直接求出 $f(x)$ 的表达式，但作代换令 $x=\dfrac{1}{t}$，可以得到新的方程；联立并消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，即可解出 $f(x)$，再利用奇函数定义即可证之.

解 在原方程中作代换 $x=\dfrac{1}{t}$，可得

$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=Ct$$

即

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=Cx$$

与原方程联立，并消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，可解出

$$f(x)=\frac{C}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)$$

又

$$f(-x)=\frac{C}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)$$

$$f(x)+f(-x)=0,$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

2. 关于求反函数

(1) 求 $y=f(x)$ 的反函数，首先由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，再把所得表达式中的 x 与 y 对换，即得所求函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$. 或者先把 $y=f(x)$ 表达式中的 x 与 y 对换，再解出 $y=f^{-1}(x)$；

(2) 对于分段函数的反函数，应当分段去求；

(3) 反函数的定义域为原来函数的值域.

应当注意，在同一坐标系中，$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图形是相同的，而 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形是关于 $y=x$ 对称的.

例 2　设 $f(x)=\begin{cases} x & -2<x<1 \\ x^2 & 1\leqslant x\leqslant 2 \\ 2^x & 2x<x\leqslant 4 \end{cases}$，求 $f^{-1}(x)$

分析　$f(x)$ 是分段函数，因此要分别求出各区间段的反函数及定义区间

解　由

$$y=x,\qquad -2<x<1,$$

可得

$$x=y,\qquad -2<y<1.$$

故它的反函数是

$$y=x,\qquad -2<x<1$$

由

$$y=x^2,\qquad 1\leqslant x\leqslant 2,$$

可得

$$x=\sqrt{y}\qquad 1\leqslant x\leqslant 4$$

故其反函数是

$$y=\sqrt{x}\qquad 1\leqslant x\leqslant 4$$

由

$$y=2^x\qquad 2<x\leqslant 4$$

可得

$$x=\log_2 y\qquad 4<x\leqslant 16$$

故其反函数是

$$y=\log_2 x\qquad 4<x\leqslant 16$$

故 $f(x)$ 的反函数是