高等专科学校金融类“九五”规划重点教材

线性代数与应用

主编：王保华

中国经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与应用/王保华主编，-北京：中国经济出版社，1998.5
高等专科学校金融类“九五”规划重点教材
ISBN 7-5017-4216-2

Ⅰ.线… Ⅱ.王… Ⅲ.线性代数-高等学校：专科学校-教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 04062 号

责任编辑：许聿琦　鲁文霞

线性代数与应用
王保华　主编
*
中国经济出版社出版发行
（北京市百万庄北街 3 号）
邮编：100037
各地新华书店经销
中国人民警官大学印刷厂印刷
*
开本：850×1168 毫米 1/32　10 印张　250 千字
1998 年 5 月第 1 版　2001 年 7 月第 3 次印刷
印数：7001—8500 册
ISBN 7—5017—4216—2/G·390
定价：15.50 元

编审说明

根据国务院和国家教委关于各部委要负责对口专业教材建设的规定，全国普通高校（本科、专科）金融类各专业的教材建设由中国人民银行归口管理。

中国人民银行根据国家教委的要求和全国高等专科学校的实际需要，制定了高等专科学校金融类“九五”重点建设教材规划。

《线性代数与应用》是根据规划制定的教学大纲编写的，可供高校教学和干部培训以及自学之用。

其中的经济数学基础由三部分组成，它们是《微积分》、《线性代数与应用》、《概率论与数理统计》。

《线性代数与应用》是经济数学基础之二，本书共分六章，前四章介绍了行列式、矩阵、线性方程组和矩阵的特征值与特征向量等基本内容，后两章简介投入产出和线性规划两种数学模型。

本书由王保华主编，赵安、李春萍副主编，全书由王保华总纂。

本书由哈尔滨工业大学富景隆、罗声政教授审稿。

编写分工：

武汉金融高等专科学校李德洪编写第一章；

保定金融高等专科学校李春萍编写第二章；

长春金融高等专科学校赵　安编写第三章；

南京金融高等专科学校张　勇编写第四、五章；

哈尔滨金融高等专科学校王保华编写第六章。

现经我们审定，本书可以作为教材出版，各单位在使用中有

何意见和建议，请函告中国人民银行教育司教材处。

中国金融教材工作委员会

1998年1月18日

目　　录

第一章　行列式

行列式是线性代数研究中的基本工具之一。本章将从二、三阶行列式出发，引入 n 阶行列式的概念，并讨论行列式的一些基本性质与计算方法，最后给出用行列式求解线性方程组的克莱姆法则。

§1.1　行列式的概念及其基本性质

(一) 行列式的概念

1. 二、三阶行列式

行列式是一种特殊算式，它首先是由求解线性方程组时提出的。

考察二元一次方程组（即二元线性方程组）：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

为求解该方程组，先以 a_{22}遍乘第一个方程，以 a_{12}遍乘第二个方程，两者相减，即可消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

用同样的方法，可消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1$$

那么，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，由上述两式就可得到方程组(1.1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\tag{1.2}$$

为便于记忆求解公式（1.2），引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，常记为 D，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\tag{1.3}$$

其中，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}称为这个二阶行列式的元素；横排称为行，竖排称为列，简记为 $D=|a_{ij}|$。

二阶行列式表示的代数和可用图 1.1 所示的画线方法帮助记忆，即等于其中实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积：

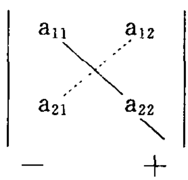

图1.1

根据二阶行列式的定义，公式（1.2）中的分子 $b_1a_{22}-a_{12}b_2$ 与 $b_2a_{11}-a_{21}b_1$ 也可分别记成如下二阶行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}\text{与}\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

于是，当行列式 $D\neq0$ 时，线性方程组（1.1）的求解公式（1.2）可用行列式形式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}\tag{1.2'}$$

其中，行列式 D 称为（1.1）的系数行列式，它是由（1.1）的系数所构成，而行列式 D_1 与 D_2 则分别是以（1.1）的常数项 b_1，b_2

替换其系数行列式 D 中 x_1 与 x_2 的系数列后所构成。

例如，求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1 - 3x_2 = -1 \\ 4x_1 - x_2 = 1\end{cases}$$

因 $D = \begin{vmatrix}2 & -3 \\ 4 & -1\end{vmatrix} = 2 \times (-1) - (-3) \times 4 = 10 \neq 0$

而 $D_1 = \begin{vmatrix}-1 & -3 \\ 1 & -1\end{vmatrix} = (-1)\times(-1)-(-3)\times 1 = 4$

$D_2 = \begin{vmatrix}2 & -1 \\ 4 & 1\end{vmatrix} = 2\times 1-(-1)\times 4 = 6$

故由公式(1.2′)得该方程组的解为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

类似地，对三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\end{cases} \tag{1.4}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$ 时，可用消元法得其解为

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\
x_2 &= \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\
x_3 &= \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

为便于记忆公式(1.5)，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为三阶行列式，也常记为 D，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{1.6}$$

三阶行列式的定义式(1.6)可用图 1.2 所示画线方法帮助记忆，即等于其中三条实线联结的三元素乘积之和减去三条虚线联结的三元素乘积之和：

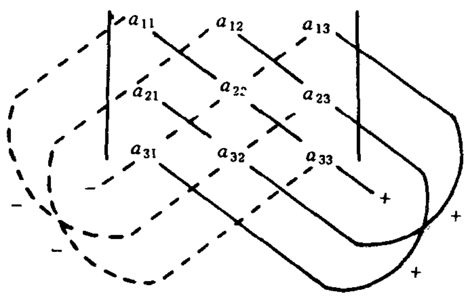

图 1.2

根据三阶行列式的定义，公式(1.5)的分母正好是由方程组(1.4)的系数所构成的三阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

此行列式称为方程组(1.4)的系数行列式；而公式(1.5)中 x_1、x_2、x_3 的分子正好分别是以(1.4)的常数项 b_1、b_2、b_3 替换 D 中的第一、二、三列，其余元素不变而得到的三阶行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

这样，三元线性方程组(1.4)的求解公式(1.5)就可用三阶行列式表示成：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.5'}$$

例如，求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=3 \\ -x_1-4x_2+x_3=7 \\ 3x_1+7x_2+4x_3=3 \end{cases}$$

因系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

而

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 7 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}=3$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-2$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 7 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix}=2$$

故由公式(1.5′)可得该方程组的解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=2$$

在有了二、三阶行列式的概念后，自然想到四阶或更高阶行列式的概念问题。下面将二、三阶行列式的概念加以推广，引出 n 阶行列式的概念。为使定义的 n 阶行列式具有统一的性质，并能借以讨论 n 元线性方程组的求解问题，对 $n>3$ 的行列式，前面图 1.1 与图 1.2 的画线规则将不再适用，故需要用新的规则来定义。为此，先介绍排列及其逆序数的概念。

2. 排列及其逆序数

定义 1.1　由数码 1,2,…,n 组成的一个有序数组，称为一个 n 级排列。记为$(i_1 i_2 \cdots i_n)$。

例如，(2134)就是一个四级排列。而(34125)则是一个五级排列。

显然，由 1,2,…,n 构成的所有 n 级排列共有 $n(n-1)\cdots 2\,1=n!$ 个。把所有 n 级排列的全体记为 $\pi(n)$。例如，所有三级排列共有 $3!=6$ 个，其为 $\pi(3)=\{(123),(231),(312),(132),(213),(321)\}$。

n 级排列中，排列(1,2,…,n)的所有数码均为自然数顺序，即较大的数码总是排在较小的数码之后。若在一个 n 级排列$(i_1 i_2\cdots$

i_n)中，有较大的数 i_s 排在较小的数 i_t 之前，则称 i_s 与 i_t 构成一个逆序数偶，简称逆序。一个 n 级排列中逆序的总个数称为该排列的逆序数，记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$。逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例如，排列(3421)就是一个四级奇排列，因其逆序数等于 5 为奇数；而排列(34125)是偶排列，因其逆序数等于 4 为偶数。

不难发现，在所有 n 级排列中，奇排列与偶排列各占一半。即奇偶排列各有 n!/2 个。

例如，所有的三级排列中

偶排列有三个，其为(123)，(231)，(312)；

奇排列也有三个，为(132)，(213)，(321)。

对一个排列中的某两个数码 i_s 与 i_t 交换一次位置，称为对该排列进行一次对换，记为(i_s,i_t)。例如，对排列(3421)进行一次对换(2,4)排列变为(3241)；对排列(34125)进行一次对换(3,2)，排列变为(24135)。

容易判定，排列(3421)是奇排列，而经过上述一次对换后的排列(3241)却为偶排列；排列(34125)是偶排列，经过上述一次对换后的排列(24135)却为奇排列。关于对换对排列的奇偶性的影响，有如下的一般结果：

定理 1.1 任意一个排列经过任意一次对换后，奇偶性改变。(证略)

有时需要对一个排列进行若干次对换，化为指定的另一排列。如对排列(3421)接连进行三次对换：(3,1)、(4,2)和(4,3)后，即可化为自然序排列(1234)。由定理 1.1 不难得到：

推论 对一排列进行偶数次对换，排列的奇偶性不变；进行奇数次对换，排列的奇偶性改变。

3. n 阶行列式的定义

考察一下二、三阶行列式定义的规律。现将(1.3)式与(1.6)式

重列如下：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} D= & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} \tag{1.6}$$

不难发现，在(1.3)式和(1.6)式中有如下一些规律：

(1)行列式所表示的代数和中的项数正好等于行列式阶数的阶乘数。如二阶行列式表示 2！＝2 项的代数和；三阶行列式表示 3！＝6 项的代数和。而这项数正好也为相应级排列的全部排列总数。这一点并非偶然。实际上，当把行列式代数和中各项的元素按行标依自然序排列后，各项的列标正好构成相应级的全部排列。

也就是说，对于二阶行列式 $D=|a_{ij}|$，将其代数和中的项一般地表示成 $a_{1j_1}a_{2j_2}$，则当列标排列($j_1\ j_2$)取遍全部的二级排列(共有 2！＝2 个)时，就得到二阶行列式的全部的项；对于三阶行列式，将其项一般地表示成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，则当列标排列($j_1\ j_2\ j_3$)取遍全部的三级排列(共有 3！＝6 个)时，就得到三阶行列式全部的项。

(2)行列式所表示的代数和中，全部项的符号正好正负各占一半。在全部的级排列中，偶排列与奇排列正好各占一半。这也并非偶然。不难验证，当把二、三阶行列式中各项的元素按行标依自然序排列后，列标排列为偶排列的项符号均为正，列标排列为奇排列的项符号均为负。因此，二阶行列式的项 $a_{1j_1}a_{2j_2}$ 的符号可用 $(-1)^{\tau(j_1j_2)}$ 表示；类似地，三阶行列式的项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的符号可用 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$ 表示。

综上所述，对于二、三阶行列式的定义(1.3)式和(1.6)式，可

分别记成如下形式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2) \in \pi(2)} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

其中，记号$(j_1\ j_2) \in \pi(2)$表示让排列$(j_1\ j_2)$取遍全部的二级排列。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 j_3) \in \pi(3)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中，记号$(j_1\ j_2\ j_3) \in \pi(3)$表示让排列$(j_1\ j_2\ j_3)$取遍全部的三级排列。

由此推广，给出 n 阶行列式的定义：

定义 1.2　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$构成的代数和

$$\sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n) \in \pi(n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

记成如下形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式。常记为 D，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n) \in \pi(n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.7)$$

其中，$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$称为元素，横排称为行，纵排称为列。元素a_{ij}的下标 i 与 j 分别表示该元素所处的行与列的序数$(j_1\ j_2 \cdots j_n) \in \pi(n)$则表示让排列$(j_1\ j_2 \cdots j_n)$取遍全部的 n 级排列。上述行列式可简记为$|a_{ij}|$。

(1.7)式中的 $\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为 n 阶行列式的一般项。由前面的分析可知，当排列$(j_1\ j_2\cdots\ j_n)$取遍全部的 n 级排列时，依此式就得到 n 阶行列式的全部项，共有 n! 项。由于定义中规定$(j_1\ j_2\cdots\ j_n)$必须是 n 级排列，故 n 阶行列式的每一项都是 n 个元素的乘积，且这 n 个元素显然是取自行列式的不同的行、不同的列。所以，n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$中的 n 个元素 $a_{i_1j_1},a_{i_2j_2},\cdots,a_{i_nj_n}$的乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$是其一项的充分必要条件是，它们的行标 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 与列标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 均能构成 n 级排列。

例如，四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

表示的代数和中包含有 4! =24 项。每项均由取自不同行和不同列的四个元素的乘积构成，即四个元素的行标和列标均能构成四级排列。如乘积 $a_{13}a_{32}a_{24}a_{41}$中，各元素的行标 1,3,2,4 和列标 3,2,4,1 分别均可构成四级排列，故它是四阶行列式的一项；而乘积 $a_{13}a_{32}a_{23}a_{41}$，因其元素的列标 3,2,3,1 不能构成四级排列，故它不是四阶行列式的项。事实上，其中有两个同为第三列的元素 a_{13}与 a_{23}。

至于上述四阶行列式的项 $a_{13}a_{32}a_{24}a_{41}$的符号，按定义将其中的元素按行标依自然序重新排列成为 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$的形式，则可由列标排列的奇偶性来确定。由于此时的列标排列为(3421)，而$\tau(3421)=5$，故由$(-1)^{\tau(3421)}=-1$ 知，该项的符号为负。

行列式的项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的符号，也可将各元素按列标依自然序排列即成为 $a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$后，由行标所成排列的奇偶性来确定，其规则是：行标排列为偶排列时符号为正，行标排列为奇排列时符号为负。即此时项的符号也可由$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}$来确定。

如前面四阶行列式的项 $a_{13}a_{32}a_{24}a_{41}$，按列标依自然序排列后即为 $a_{41}a_{32}a_{13}a_{24}$，此时行标排列为(4312)，$\tau(4312)=5$，那么，由 $(-1)^{\tau(4312)}=-1$ 也可知其符号为负，与前面的结果一致。

另外，n 阶行列式的项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的符号还可直接按给定的元素顺序，由它们的行标所成排列的逆序数与列标所成排列的逆序数之和的奇偶性来确定，其规则是：和为偶数时项的符号为正；和为奇数时项的符号为负。即此时符号可由

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

来确定。

仍以前面讨论过的四阶行列式的一项 $a_{13}a_{32}a_{24}a_{41}$ 为例，按此给定的元素顺序，其行标所成的排列为(1324)，列标所成的排列为(3241)，$\tau(1324)+\tau(3241)=1+4=5$ 由 $(-1)^{\tau(1324)+\tau(3241)}$ 得知，其符号为负，与前面讨论的结果一致。

因此，n 阶行列式的定义式还可有另外的几种形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1\, i_2\, \cdots\, i_n)\in\pi(n)} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \quad (1.7')$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1\, j_2\, \cdots\, j_n)\in\pi(n)} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中，$(i_1\, i_2\cdots\, i_n)$ 为一给定的 n 级排列。

例 1. 计算下列行列式