普通高等教育基础课规划教材

离散数学

邱学绍　主编

12345678901234567890 1234

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

离散数学

主　编　邱学绍
副主编　王靳辉　李　刚
参　编　张新祥　侯惠芳　李　春　李　歆
　　　　王云侠　孟红玲　张开广

机械工业出版社

本书系统地介绍了集合论、数理逻辑、图论和代数结构等离散数学的基本知识，在内容安排上突出由浅入深、循序渐进、通俗易懂的特点，非常适合普通高等院校计算机及其相关专业的本科生作为教材使用，也可供一般科技人员作为参考书。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/邱学绍主编 .—北京：机械工业出版社，2005.9
普通高等教育基础课规划教材
ISBN 7-111-17359-7

Ⅰ.离… Ⅱ.邱… Ⅲ.离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 103305 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：张祖凤
责任编辑：张祖凤 郑 玫 版式设计：张世琴 责任校对：李秋荣
责任印制：杨 曦
北京机工印刷厂印刷
2005 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
1000mm × 1400mm B5·8.125 印张·315 千字
定价：21.00 元

前　　言

离散数学是研究离散数学结构和离散量之间关系的科学。离散数学是计算机及其相近学科的核心基础课程，为数据结构、编译原理、数据库、算法分析和人工智能等课程提供必要的数学基础。

离散数学的特点是抽象、概念及定理多。学生通过离散数学的学习，会使他们的抽象思维能力和逻辑推理能力得到一定的提高。

随着高等教育的发展和高校的不断扩招，我国的大学教育逐步由精英教育转化为大众教育，对于普通高校更是如此。针对普通高校离散数学的教学，我们几位长期在普通高校讲授离散数学的教师联合编写了这本离散数学。

根据离散数学的特点和普通高校学生的特点，本书在内容安排上，有如下特点：其一，由浅入深、循序渐进，先安排学生比较熟悉的集合的初步知识，在此基础上再安排数理逻辑、二元关系、函数和图论，而将代数安排在最后。其二，在引入概念时力求使用大家熟悉的例子，引入抽象的数学概念，以方便初学者对新的抽象的数学概念有亲近感和似曾相识的感觉。其三，为了让读者及时复习有关概念并会灵活运用有关解题技巧，在每一章结尾都安排了一节“例题解析”，力求做到举一反三，使学生所学知识及时得以巩固和深化。

本书在编写过程中，北京航空航天大学的相关老师对初稿提出了许多宝贵的修改意见，使本书增色不少，谨此表示衷心的感谢。在编写中参阅了许多离散数学教材和相关资料，在此也向作者表示感谢。另外，本书的编写得到了郑州轻工业学院、解放军信息工程大学、河南工业大学、河南财经学院、郑州师范专科学校等院校领导的大力支持，在此一并表示感谢。

本书由邱学绍主编，第一章和第十章由王靳辉编写，第二章由李刚和李春编写，第三章、第六章和第七章由张新祥和邱学绍编写，第四章由侯惠芳编写，第五章由李歆和王云侠编写，第八和第九章由孟红玲和张开广编写。限于作者水平，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正。

限于作者水平，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正。

编者

目　录

第 1 章　预 备 知 识

集合论是现代数学重要的理论基础之一。集合论的创始人是德国数学家康托(George Cantor),他所做的工作一般称为朴素集合论。1908 年德国数学家策莫洛(Ernst Zermelo)建立了集合论的公理系统,使康托提出的集合论变得更加严谨、完善。这里采用朴素集合论的方法介绍集合论的初步知识。

1.1　集合论的初步知识

1.1.1　集合的基本概念

集合是不定义的基本数学概念。一般认为"在一定范围内讨论的事物组成的整体"叫做集合(Set),这里的"事物"也称为"个体"或者"元素(Element)"。

通常用大写英文字母来标记集合,用小写英文字母来标记元素。如果元素 a 是集合 A 中的元素,记作 $a\in A$,读作"元素 a 属于集合 A";如果元素 e 不是集合 A 中的元素,记作 $e\notin A$,读作"元素 e 不属于集合 A"。

例 1　(1) 英文字母表中的所有 26 个字母;

(2) 图书馆的所有藏书;

(3) 全体中国人;

(4) 整数集合。

上述(1)、(2)、(3)和(4)都是集合,其中"字母"、"藏书"、"中国人"和"整数"就是相应集合中的元素。

设(1)的集合用 A 表示,(2)的集合用 B 表示,(3)的集合用 C 表示,(4)的集合用 D 表示;用 a 表示"某个确定的字母",b 表示"某本确定的藏书",c 表示"某位确定的中国人",d 表示"某个确定的整数",则 $a\in A, b\in B, c\in C, d\in D$。但 $b\notin A, b\notin C, a\notin D, d\notin B$ 等。

集合具有下列性质:

(1) 确定性　给定一个元素 a 和一个集合 A,$a\in A$ 或者 $a\notin A$,二者必居其一,且只能具其一。

(2) 无序性　在一个集合中所有元素之间的排列次序是任意的。

(3) 互异性　元素 a 在集合 A 中无论重复出现多少次,a 只能看作 A 中的一个元素。

(4) 抽象性　集合中的元素可以是具体的,也可以是抽象的,甚至一个集合也

可以作为另一个集合的元素。

例 2 (1) 在例 1 中,给定一个英文字母 a,就可以判断出 $a \in A$, $a \notin B$ 等。

(2) 集合$\{1,2,3\}=\{2,1,3\}=\{1,2,1,2,3\}=\{1,1,1,2,2,2,3,3,3\}$等。

(3) 将例 1 中的集合 A、B、C、D 作为元素组成一个新的集合 E, $E=\{A,B,C,D\}$。

一般地,称例 2(3)中的这类以集合为元素的集合为一个**集合族**。

1.1.2 集合的表示

1. 枚举法

枚举法是集合的一种常用显式表示方法。该方法是将集合中的所有元素列出,置于“{ }”内,元素之间用逗号隔开。

例如,下列集合都是用枚举法表示的集合:

(1) $A=\{$张三,李四,Wangwu$\}$;

(2) $B=\{\varnothing,\{\varnothing\},2,\{a\}\}$;

(3) $C=\{2,4,6,\cdots,100\}$;

(4) $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$。

2. 描述法

描述法是集合的一种常用隐式表示方法。该方法是通过给出集合中元素的特性来描述集合的。

例如,下列集合都是用描述法表示的:

(1) $C=\{x \mid x$ 是不大于 100 的正整数$\}$,其中竖杠“|”前面的 x 代表 C 中的任意元素,竖杠后面代表任意元素 x 应该满足的性质或条件。

(2) $D=\{x \mid x \in \mathbf{R}$ 且 $x^2-7x+12=0\}$。

3. 递归指定集合*

这种方法是通过计算规则定义出集合中的元素。

例 3 设 $a_0=1, a_1=1, a_{i+1}=a_i+a_{i-1}(i \geqslant 1)$,于是:

$S=\{a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots\}=\{a_k \mid k \geqslant 0\}$。

在本书中,常用的集合将用如下特定符号表示:

N 自然数集合,即$\{0,1,2,3,\cdots\}$;

I 整数集合,并用 $\mathbf{I}^+$ 表示正整数集合,$\mathbf{I}^-$ 表示负整数集合;

Q 有理数集合,并用 $\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数集合,$\mathbf{Q}^-$ 表示负有理数集合;

R 实数集合,并用 $\mathbf{R}^+$ 表示正实数集合,$\mathbf{R}^-$ 表示负实数集合;

C 复数集合;

P 素数集合(素数是指只能被 1 和其本身整除的大于 1 的正整数);

$\mathbf{N}_m$ 介于 0 和 $m-1$ 之间的非负整数集合,即$\{0,1,2,3,\cdots,m-1\}$;

$\mathbf{I}_m^+$　介于 1 和 m 之间的正整数集合,即 $\{1,2,3,\cdots,m\}$。

注意:在用枚举法表示集合时,若集合的元素较多而不能一一列出,则可使用省略号。需要用省略号时,必须明确到底省略了什么,必要时可以加通项补充说明,否则会产生歧义。

例 4　给定集合 $A=\{2,4,8,\cdots\}$,$16\in A$ 吗?

由题设很容易想到将 A 描述为 $A=\{x\mid x=2^n, n$ 是正整数$\}$,显然 $16\in A$。

但是还可以给出集合 A 的另一种描述 $A=\{x\mid x=2+n(n-1), n$ 为正整数$\}$,显然 $2\in A$,$4\in A$,$8\in A$,但此时 $16\notin A$。

习题 1.1

1. 用枚举法表示下列集合。

(1) 小于 20 的素数;

(2) 构成词 enumeration(枚举)的英文字母的集合;

(3) $\{x\mid x^2+x-6=0\}$。

2. 用描述法表示下列集合。

(1) $\{1,2,3,\cdots,79\}$;

(2) 正奇整数的集合;

(3) 能被 5 整除的整数集合。

3. 列出下列集合中的元素。

(1) $\{x\mid x$ 是 36 的因子$\}$;

(2) $\{x\mid x=a$ 或者 $x=b\}$;

(3) $\{1,\{3\},\{\{a\}\}\}$。

1.2　集合的关系与运算

1.2.1　集合间的基本关系

两个集合之间的常见关系有子集关系和相等关系。

定义 1　设 A、B 是两个集合,如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素,则称 A 为 B 的**子集合**,简称**子集**(Subset),此时也称 A 被 B 包含或者 B 包含 A,记作 $A\subseteq B$。否则,若存在一个元素 $b\notin A$,但 $b\in B$,则 A 不是 B 的子集,记作 $A\nsubseteq B$。

根据定义,设 A 是任意集合,则有

$$A\subseteq A \tag{1-1}$$

例如,$A=\{a,b\}$,$B=\{b,a\}$,$C=\{a,b,c\}$,则 $A\subseteq B$,$A\subseteq C$,$C\nsubseteq B$。

定义 2　设 A,B 为集合,如果 $A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq A$,则称 A 和 B **相等**,记作 $A=$

B;如果 A 和 B 不相等,记作 $A \neq B$。

根据定义,不难得到这样的结论,两个集合相等的充分必要条件是它们具有相同的元素。

例如,$\{x \mid x \in \mathbf{R}$ 且 $x^2-3x+2=0\} = \{1,2\} = \{2,1\} = \{1,1,2,2,1,2\}$。

定义 3 设 A,B 为集合,如果 $A \subseteq B$ 但 $A \neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**(Proper Subset),记作 $A \subset B$;否则记作 $A \not\subset B$,这时 A 不是 B 的子集或者 A、B 相等。

例如,$\{1,2\} \subset \{x \mid x \in \mathbf{R}$ 且 $x^3-3x^2+2x=0\}$;$\{a\} \subset \{a,\{a\}\}$。

定义 4 集合 A 中所包含的不同元素的数目,称为集合 A 的**基数**(Cardinality),通常用 $|A|$ 或 Card A 表示。

例如,设 $A=\{a,a,b,b,a,b\}$,则 $|A|=2$。

定义 5 设 A 是集合,如果 $|A|=0$,则称集合 A 为**空集**(Empty Set),记为 $A=\varnothing$。

由定义可以看出,所谓空集就是指该集合中没有任何元素。

空集是一个特殊的集合,它是一切集合的子集,即对任意集合 A,有

$$\varnothing \subseteq A \tag{1-2}$$

证明 由子集的定义,要证明 $\varnothing \subseteq A$,只需证明对于任意的 x,若 $x \in \varnothing$,则 $x \in A$;或等价地证明,对于任意的 x,若 $x \notin A$,则 $x \notin \varnothing$。这是显然的,因为空集 $\varnothing$ 中不包含任何元素。

可以得出,空集是惟一的。

事实上,设有两个空集 $\varnothing_1$、$\varnothing_2$,因为 $\varnothing_1$ 是空集,则 $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$;同理,因为 $\varnothing_2$ 是空集,则 $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$,故 $\varnothing_1 = \varnothing_2$。

设 A 是集合,如果 A 中有有限个不同元素,则称 A 为**有限集**(Finite Set);否则称 A 为**无限集**(Infinite Set)。对有限集 A,如果含有 n 个不同元素,简称 A 为 **n 元集**,它的基数为 $m(0 \leqslant m \leqslant n)$ 的子集称作它的 **m 元子集**。

那么任给一个 n 元集,怎样列出它的全部子集呢?

例 1 设 $A=\{a,b,c\}$,求 A 的全部子集。

解 将 A 的子集按基数从小到大分类求出:

0 元子集,即空集,只有 $C_3^0=1$ 个:$\varnothing$;

1 元子集,即单元集,有 $C_3^1=3$ 个:$\{a\},\{b\},\{c\}$;

2 元子集,有 $C_3^2=3$ 个:$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$;

3 元子集,有 $C_3^3=1$ 个:$\{a,b,c\}$。

一般地,对于 n 元集合 A,它的 $m(0 \leqslant m \leqslant n)$ 元子集有 C_n^m 个,所以集合 A 的不同子集总数有 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$ 个。

1.2.2 幂集

定义 6 设 A 为集合，把 A 的全体子集作为元素构成的集合称为 A 的幂集(Power Set)，记作 2^A 或 $P(A)$，可描述为 $P(A)=\{X \mid X\subseteq A\}$。

例如，设 $A=\{a,b,c\}$，则可知 $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$。

不难看出，n 元集 A 的幂集中元素的个数，就是集合 A 的子集的个数，即有 2^n 个元素。

例 2 计算以下集合的幂集：$\varnothing$；$\{\varnothing\}$；$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$；$\{1,\{2,3\}\}$。

解 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$；$P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$；

$P(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$；

$P(\{1,\{2,3\}\})=\{\varnothing,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$。

定理 1 设 A 为有限集，则 $|P(A)|=2^{|A|}$。

定义 7 在一个具体问题中，如果涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集(Universal Set)，记作 U 或者 E。

全集是个相对性的概念，研究的问题不同，所用的全集也不同。例如，研究平面解析几何问题时，可以把整个坐标平面取作全集；研究整数问题时，可以把整数集合 **I** 取作全集。

由定义可知，在讨论一个具体问题时，对于任意集合 A，都有

$$A\subseteq U \tag{1-3}$$

1.2.3 集合的基本运算

定义 8 集合的几种主要的基本运算(设 A，B 是集合)：

(1) 并集(Union) $A\cup B$ 称为集合 A 与 B 的并集，定义为 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或者 $x\in B\}$；$\cup$ 称为集合的并运算。

(2) 交集(Intersection) $A\cap B$ 称为集合 A 与 B 的交集，定义为 $A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$；$\cap$ 称为集合的交运算。

(3) 差集(Difference) $B-A$ 称为 B 与 A 的差集，或称为 A 关于 B 的相对补集，定义为 $B-A=\{x \mid x\in B$ 且 $x\notin A\}$。

(4) 补集(Complement) $\overline{A}$ 称为 A 关于全集 U 的相对补集，或称为 A 的绝对补集，简称为 A 的补集，定义为 $\overline{A}=U-A=\{x \mid x\in U$ 且 $x\notin A\}=\{x \mid x\notin A\}$。

(5) 对称差(Symmetric Difference) $A\oplus B$ 称为集合 A 与 B 的对称差或布尔和，定义为 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$。

例 3 设 $A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{2,3,4,5,6,7\}$，假定取全集为 $U=\{0,1,2,\cdots,$

$10\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,9\}$；$A\cap B=\{3,5,7\}$；$B-A=\{2,4,6\}$；$A-B=\{1,9\}$；$\overline{A}=\{0,2,4,6,8,10\}$；$B=\{0,1,8,9,10\}$。

1.2.4 文氏图

文氏图(Venn Diagram)是英国著名数学家约翰·维恩(John Venn，1834—1883)首先提出的，用它可以形象地描述集合间的关系和运算。

文氏图的构造方法是：先用一个长方形区域表示全集 U，长方形内的圆形区域(或封闭曲线)内部表示集合，用阴影部分表示运算得到的结果。

如集合 A 以及 5 种基本集合运算的文氏图如图 1-1 所示。

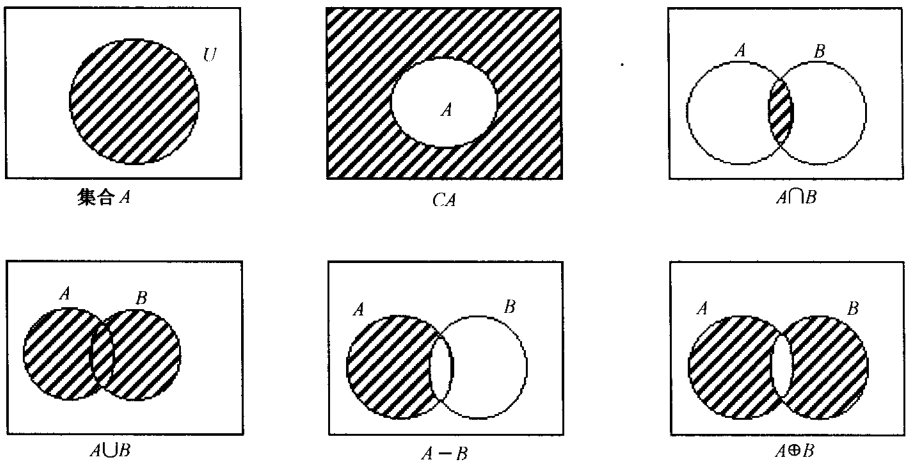

图 1-1 集合 A 以及 5 种基本集合运算的文氏图表示

1.2.5 主要的运算律

定理 2 集合运算主要的运算律：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(4) 等幂律：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

(5) 同一律：$A\cup\varnothing=A$，$A\cap U=A$；

(6) 零　律：$A\cup U=U$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

(7) 互补律：$A\cup\overline{A}=U$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$；

(8) 双重否定律：$\overline{\overline{A}}=A$；

(9) 吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$；

(10) 德·摩根律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

定理 2 中恒等式的证明可以采用这样的思路：欲证 $P = Q$，等价于证明 $P \subseteq Q$ 并且 $Q \subseteq P$。也就是要证明对任意 x，若 $x \in P$，则 $x \in Q$；并证明，若 $x \in Q$，则 $x \in P$ 都成立。

例 4　试证明 $A - B = A \cap \overline{B}$。

证明　(1) 对任意 x，若有 $x \in A - B$，则有 $x \in A$ 且 $x \notin B$，即 $x \in A$ 且 $x \in \overline{B}$，所以 $x \in A \cap \overline{B}$，可得 $A - B \subseteq A \cap \overline{B}$。

(2) 对任意 x，若有 $x \in A \cap \overline{B}$，则有 $x \in A$ 且 $x \in \overline{B}$，即 $x \in A$ 且 $x \notin B$，所以 $x \in A - B$，可得 $A \cap \overline{B} \subseteq A - B$。

故 $A - B = A \cap \overline{B}$。

在集合的证明（或化简）中，除和本例类似的方法外，还经常利用已有的运算定律，通过演算的方法来解决。另外，在遇到差集的时候，可利用本例的结论，把差集转换成交集形式简化运算。另外还可以证明 $A - B = A - (A \cap B)$。

例 5　证明 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$。

证明

$$
\begin{aligned}
A - (B \cup C) &= A \cap (\overline{B \cup C}) && \text{（例 4）} \\
&= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) && \text{（德·摩根律）} \\
(A - B) \cap (A - C) &= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) && \text{（等幂律、交换律、结合律）} \\
&= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) && \text{（例 4）}
\end{aligned}
$$

得证。

例 6　证明 $(A - B) \cup B = A \cup B$。

证明

$$
\begin{aligned}
(A - B) \cup B &= (A \cap \overline{B}) \cup B && \text{（例 4）} \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) && \text{（分配律）} \\
&= (A \cup B) \cap U && \text{（互补律）} \\
&= A \cup B && \text{（同一律）}
\end{aligned}
$$

还有很多常用公式，下面列出一些，限于篇幅，不再给出具体的证明。

(1) $\overline{\varnothing} = U$，$\overline{U} = \varnothing$；

(2) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$；

(3) $A - B \subseteq A$；

(4) $A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$；

(5) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$；

(6) $A \oplus B = B \oplus A$；

(7) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B + C)$；

(8) $A \oplus \varnothing = A$，$A \oplus A = \varnothing$；

例 7　化简 $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$。

解法一 由吸收律可得

$((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)=A\cup B-A=B-A$

解法二 因为 $A\cup B\subseteq A\cup B\cup C$，$A\subseteq A\cup(B-C)$，所以，$(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B)=A\cup B$.

$(A\cup(B-C))\cap A=A$

故原式可化简为 $(A\cup B)-A=B-A$。

1.2.6 集合运算成员表

在进行集合运算时，对于有限次复合运算，还可以用集合成员表的方法。

对于集合 A 的补、并、交运算，有下面等价的描述方法。

(1) 集合 A 的补集　若 $x\notin A$ 则 $x\in\overline{A}$；若 $x\in A$ 则 $x\notin\overline{A}$。

(2) 集合 A 与 B 的并集　若 $x\notin A,x\notin B$，则 $x\notin A\cup B$；若 $x\notin A,x\in B$，则 $x\in A\cup B$；若 $x\in A,x\notin B$，则 $x\in A\cup B$；若 $x\in A,x\in B$，则 $x\in A\cup B$。

(3) 集合 A 与 B 的交集　若 $x\notin A,x\notin B$，则 $x\notin A\cap B$；若 $x\notin A,x\in B$，则 $x\notin A\cap B$；若 $x\in A,x\notin B$，则 $x\notin A\cap B$；若 $x\in A,x\in B$，则 $x\in A\cap B$。

若用 0 表示 $x\notin A$ 或 $x\notin B$，1 表示 $x\in A$ 或 $x\in B$，则可用表 1-1 ~ 表 1-3 所示形式把这些运算表示出来。

表 1-1　$\overline{A}$ 的成员表

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

表 1-2　$A\cup B$ 的成员表

A	B	$A\cup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表 1-3　$A\cap B$ 的成员表

A	B	$A\cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表 1-1 ~ 表 1-3 表示集合运算的方法，称为集合运算成员表。由补、并和交的成员表可以做出更为复杂的集合运算成员表。一般地，对于由集合 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 经有限次运算所产生的集合 S 的成员表，其前 r 列标记 $A_1,A_2,\cdots,A_r$，最后一列标记 S，标记 A_i 的列中 0 表示 $x\notin A_i$，1 表示 $x\in A_i$。如果在第 k 行上，前 r 列所指明的条件下有 $x\notin S$，则在 S 列的第 k 行位置记入 0；若有 $x\in S$，则记入 1。成员表共 2^r 行，它对应 A_i 的所有可能情况。

例 8　试构造 $S=((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B))$ 的运算成员表。

解　由题意构造出 $S=((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B))$ 的成员表见表 1-4。

表 1-4　例 8 的集合运算成员表

A	B	$\overline{A}$	$A\cap B$	$\overline{A}\cap B$	$S=((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B))$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1

具备了成员表的知识,就可以运用成员表的方法来进行集合的运算和证明。在成员表中如果某列的记入值全部为 0,那么就说明在该列所标记的集合是空集,如果某列所记入的值均为 1,则说明该列所标记的集合就是全集。如果在成员表中,某两列每一行对应的记入值都相同,则这两列所标记的集合是相等的。

例 9　用集合成员表的方法证明 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$。

证明　构造集合运算的成员表见表 1-5。

表 1-5　例 9 的集合运算成员表

A	B	C	$B\cup C$	$A\cup(B\cup C)$	$A\cup B$	$(A\cup B)\cup C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

由表 1-5 可以看出,$A\cup(B\cup C)$所在的列和$(A\cup B)\cup C$ 所在的列的记入值都对应相等,所以 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,得证。

习题 1.2

1. 下列三个集合哪些是相等的?

(1) $\varnothing$;(2) $\{\varnothing\}$;(3) $\{0\}$。

2. 对任意元素 a、b、c、d,证明:$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$当且仅当 $a=c,b=d$。

3. 求下列集合幂集。

(1) $\{\varnothing\}$;(2) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$;(3) $\{\{\varnothing,a\},\{a\}\}$;(4) $\{\{a,b\},\{a,a,b\},\{b,a,b\}\}$。

4. 设 S 表示某人拥有的所有书的集合,M、N、T、$P\subseteq S$,且 M 是珍贵的书的集合,N 是数学书的集合,T 是去年刚买的书的集合,P 是书柜中书的集合,试用集合表达式表示下列叙述。

(1) 所有的珍贵的书都是去年刚买的;

(2) 所有的数学书都放在书柜中;

(3) 书柜中的书没有去年刚买的。

5. 给定自然数集合的下列子集:

$A=\{1,2,7,8\}$;$B=\{i\mid i^2<50\}$;$C=\{i\mid i$ 可以被 3 整除,$0\leqslant i\leqslant 30\}$;$D=\{i\mid i=2^k$ 且 $k\in\mathbf{I},0\leqslant k\leqslant 6\}$。