科学版

大学工科数学学习指导系列

离散数学
学习指导

董晓蕾　曹珍富　编

- 精心辅导课程学习
- 紧密联系应用领域
- 训练数学思想与技能
- 展示数学方法与技巧

科学出版社
www.sciencep.com

大学工科数学学习指导系列

离散数学学习指导

董晓蕾　曹珍富 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是关于离散数学的一本学习指导书，共分五篇，依次为：数理逻辑，集合论，代数系统，组合分析与算法数论，图论；共十二章：命题逻辑，一阶逻辑，集合，关系，函数，半群、语言与自动机，群、环和域，格与布尔代数，组合分析，算法数论，图，有向图与树.

本书重视离散数学的趣味性和时代性，紧密地联系应用领域，引进了大量的近期成果，以利于激发读者学习离散数学的热情，使读者更快更好地学习、领会离散数学的理论与方法.

本书可作为高等院校理工科各专业的本科生教材或参考书，也可供有关专业的研究生、博士生和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学学习指导/董晓蕾，曹珍富编 .—北京：科学出版社，2005
大学工科数学学习指导系列

ISBN 7-03-015645-5

Ⅰ.离… Ⅱ.①董… ②曹… Ⅲ.离散数学-高等学校-解题
Ⅳ.O158-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 058644 号

责任编辑：林 鹏 赵 靖 祖翠娥/责任校对：刘小梅
责任印制：安春生/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 9 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2005 年 9 月第一次印刷 印张：21 1/2
印数：1—3 000 字数：401 000

定价：28.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

今天，在现代科学技术的各个领域，都提出了大量离散结构的科学问题. 例如，计算机科学、程序设计、计算机网络、信息论与编码、通信理论、现代密码学、数字信号处理和形式语言等都与离散数学密切相关. 这就要求工程技术人员和技术理论研究人员都要具有较深厚的离散数学功底；同时也要求数学理论研究人员，特别是应用数学理论研究人员，为了掌握数学与近代科学技术的联系，必须学习与重视离散数学，适应离散数学的研究方法. 正因为如此，国际上离散数学已被提高到相当高的程度来认识，在我国也已成为理工科高等院校各专业的重要基础课，尤其是计算机和应用数学专业更是如此.

离散数学，顾名思义，是那些具有离散结构和离散对象的数学，所以至少包含了：数理逻辑、集合论、代数学、组合数学、数论、图论、计算理论、复杂网络、网格和网络计算等内容. 这些内容里面又细分了许多个分支学科，包含了当前国际前沿的数学和科学技术理论研究课题，所以内容相当广泛而深刻. 作为离散数学的教科书，共同的认识是，力图介绍应用广泛且易理解和可接受的基本知识和方法.

离散数学的教科书及其习题解答已经出版了很多(如参看本书末所附的参考文献)，但是像国外流行的肖姆纲要式丛书(Schaum's Outline Series)的教材还很少. 好多年前，我们就希望写一本这样的离散数学教材，试图做到以下几点.

(1) 全书通体的写作模式是：每一节都以“基本知识—例题—习题”的形式来表现. 读者通过阅读“基本知识”了解本节的知识要点，通过阅读“例题”来深化、理解知识点，通过“习题”检验自己是否学会了这部分内容.

(2) 全书重视离散数学的趣味性和时代性. 通过紧密地联系应用领域，引进大量的近代和近期的成果，希望不仅能够向读者展示若干应用成果和方法，更重要的是向读者证明许多研究离他们很近，通过介绍有关知识的可能的应用途径来激发他们的学习热情和研究兴趣.

(3) 全书在写法上除了是一本肖姆纲要式丛书的教材外，我们还希望做到每篇内容独立成篇，使读者任意选择一篇读下去，可以自成体系，很少需要再去阅读其他章节，能够体现离散结构的优势.

本书正是在这种指导思想下写成的. 每一部分内容尽量安排了应用，在“算法数论”方面还引进了最新的研究成果，特别是近几年才产生的“双线性配对与基于身份的密码”，书中做了较为详细地介绍，供读者选学.

本书也参考了许多已经出版的同类书籍，例如，第一篇、第二篇我们参考了文献[1]～[12]，第三篇我们参考了文献[13]～[16]，第四篇参考了文献[17]～[29]，

第五篇参考了文献[30]～[33].我们也写进了一些自己的理解、体会、方法和结果.必须指出,虽然我们在写本书时有许多新的想法,尤其是希望站在读者的立场上,帮助读者学习、领会离散数学的理论与方法,但是否真正能够实现我们的意图,这只能由读者去评价.

在本书的写作过程中,有很多研究生和博士生参与了其中的部分工作,在此向他们表示感谢.但是由于受时间和水平的限制,问题甚至错误在所难免,谨请读者批评指正.

作　者

2005 年 4 月于上海

目　录

第一篇　数理逻辑

第二篇　集　合　论

第三篇　代数系统

第四篇 组合分析与算法数论

第五篇　图　　论

第一篇 数理逻辑

数理逻辑就是用数学方法研究推理过程的规律，特别是研究数学证明的科学.这里所说的数学方法就是引进一整套形式符号系统.因为引进了符号系统，所以数理逻辑也称为符号逻辑.

数理逻辑的创始人是莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646～1716).由于他很欣赏数学的精确和严格，因此他对形式逻辑总也不满意.他指出：新的逻辑学应有两点要求：一是直观，像几何那样通过画图来进行证明，使得思维推理过程有规律可循；二是像代数那样，利用公式进行推演，使得整个推理过程快速、方便、简明、确切.由于当时的社会条件，他的想法并没有实现.但是他的思想却是现代数理逻辑部分内容的萌芽.

莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646～1716)

布尔(G. Boole, 1815～1864)

1847年，英国数学家布尔发表了《逻辑的数学分析》，建立了“布尔代数”，并创造了一套符号系统，利用符号来表示逻辑中的各种概念.布尔建立了一系列的运算法则，利用代数的方法研究逻辑问题，初步奠定了数理逻辑的基础.

19世纪末20世纪初，数理逻辑有了比较大的发展.1884年，德国数学家弗雷格(Gottlob Frege, 1848～1925)出版了《算术基础》一书，在书中引入量词的符号，使得数理逻辑的符号系统完备化，从而使现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成，成为一门独立的学科.

现代数理逻辑除了继续研究数学基础课题外，还扩展到了现代科学技术当中，特别是计算机科学当中．在程序语言、自动机理论、逻辑网络、机器翻译与机器证明等方面都有不可缺少的应用．

本篇主要限于介绍数理逻辑的基本内容——命题逻辑和一阶谓词，试图让读者了解到其中的基本知识和解题方法．

第1章 命题逻辑

本章介绍命题逻辑的基本知识、有关的典型例题和解题方法. 命题逻辑又叫命题演算, 是以命题为研究对象、以研究推理中前提和结论之间的形式关系为目的的逻辑学科, 包括命题与联结词、命题公式(特别是真值表技术)、等值演算、命题公式的范式、联结词的功能完全集、永真蕴涵式、命题逻辑的推理理论和命题逻辑推理的机械化方法等.

1.1 命题与联结词

1.1.1 基本知识

命题对于命题逻辑来说是一个原始的概念, 不能在命题逻辑的范围内给出它的精确定义, 只能描述它的性质.

定义 1.1.1 在经典命题逻辑中, 称能判断真假但不能既真又假的陈述句的内容为命题.

命题必须为陈述句的内容, 而不是陈述语句. 有关语句的介绍可见第 6 章.

为了说明命题是陈述语句的内容, 通常陈述语句外面加引号来表示命题. 例如, 陈述语句:3 是素数, 构成的命题是"3 是素数", 即 3 是素数是语句(不是命题), "3 是素数"是命题.

命题必须具有真假值, 疑问句、祈使句、感叹句的内容没有真假之分, 所以它们不是命题. 注意:能判断真假, 并不意味着现在就能确定其是真还是假, 只要它具有唯一确定的真假值即可.

定义 1.1.2 命题只能是真或假, 称这种真假的结果为命题的真值. 如果命题的真值为真, 则称该命题为真命题, 否则称为假命题.

定义 1.1.3 有确定真值的命题称为命题常量.

定义 1.1.4 引入符号来表示任意的命题常量, 这个符号称为命题变量或命题符号. 命题变量不具有真值, 只有指派一个确定的命题常量后, 才具有指派的真值.

通常用 a, b, c 等小写英文字母或带下标来表示命题常量或者变量. 如果命题符号 a 代表命题常量, 则意味着它是某个具体命题的符号化;如果 a 代表命题变量, 则意味着它可指派任何具体命题. 如果没有特别指明, 通常所说的命题符号都是命题变量, 即可指派任何命题.