大学课程
辅导与应试
系列丛书

●南北名校联合 ●四方名师打造 ●天下名品汇粹

# 高等数学
# 释疑解难

齐植兰 编著

- 专题讲解
- 重点阐释
- 例题精析
- 答疑解惑

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

# 高等数学

# 释疑解难

# 高等数学释疑解难

齐植兰　编著

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

## 内容提要

本书是为帮助学生深入学习高等数学而编写的一本学习辅导书.对学生学习过程中容易产生的疑难问题以问答方式由浅入深进行剖析解答,并以例题具体阐述相关的概念、理论,以使学生加深对概念、理论的理解,提高应用理论解决具体问题的能力,开阔解题思路.

本书是以《高等数学教学基本要求》为依据编写的.包括函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数、常微分方程共8章102个问题.

本书适用于高等院校非数学类各专业学生,亦可供教师参考,也可作为自学高等数学读者的学习参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学释疑解难/齐植兰编著.—天津:天津大学出版社,2005.1
ISBN 7-5618-2083-6

Ⅰ.高…　Ⅱ.齐…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第000469号

**出版发行**　天津大学出版社
**出 版 人**　杨风和
**地　　址**　天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
**网　　址**　www.tjup.com
**电　　话**　发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
**印　　刷**　永清县晔盛亚胶印有限公司
**经　　销**　全国各地新华书店
**开　　本**　170mm×240mm
**印　　张**　13
**字　　数**　278千
**版　　次**　2005年1月第1版
**印　　次**　2005年1月第1次
**印　　数**　1-3 000
**定　　价**　17.00元

# 大学课程辅导与应试系列丛书
# 编纂指导委员会

（按姓氏笔画排列）

# 前　言

高等数学是高等院校一门重要的基础理论课．学好高等数学不仅对学好后继课程十分必要，而且对提高专业能力都有深远的影响．在高等数学的教学过程中，不仅要向学生传授知识，同时要培养和提高学生的抽象思维能力、逻辑推理能力以及综合运用数学方法解决实际问题的能力．要做到这一点，必须使学生系统地、深刻地理解高等数学的基本概念和基本理论，掌握高等数学分析问题、解决问题的思路与方法．为了帮助学生学好高等数学，解决一些疑难问题，特编写了这本学习辅导书．

本书是以《高等数学课程教学基本要求》为依据编写的．全书包括“函数、极限、连续”，“一元函数微分学”，“一元函数积分学”，“向量代数与空间解析几何”，“多元函数微分学”，“多元函数积分学”，“无穷级数”，“常微分方程”共 8 章．从多年教学中总结学生在学习过程中感到疑难的问题共 102 个，以问答形式由浅入深进行剖析、解答，并辅以例题加以解决．通过解题具体地阐述相关概念理论以及理论的具体应用，以此启发学生思维，帮助学生学会运用数学理论解决具体问题的方法与技巧．

本书在编写过程中得到天津大学出版社的大力支持和帮助，并将此书列入“大学课程辅导与应试系列丛书”之一，作者对此表示诚挚的谢意！

由于水平所限，书中如有错误与不妥之处，欢迎广大读者批评指正．

愿本书能对广大读者有所帮助！

编　者

2004 年 1 月

# 目　录

# 第 1 章　函数、极限、连续

函数反映了客观世界变量间的依从关系,是高等数学的研究对象.极限概念是高等数学的重要概念,微积分的基本概念,如导数概念、定积分概念、无穷级数的收敛性概念都是通过极限方法建立起来的.函数的连续性是函数的一个重要特性.连续函数是高等数学的主要研究对象.

**问题 1.1　如何理解复合函数概念,怎样求分段函数的复合函数?**

**答**:复合函数概念可简述为:若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D_f$,函数 $u=\varphi(x)$ 在 $D$ 上有定义,当 $x\in D$ 时,$\varphi(x)\in D_f$,则函数 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由函数 $u=\varphi(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数,它的定义域为 $D$.



注意,不是任意两个函数都能构成复合函数的.在复合函数的定义中,$y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 能够构成复合函数,要求当 $x\in D$ 时,相应的函数值 $\varphi(x)$ 必须落在 $y=f(u)$ 的定义域 $D_f$ 上.例如 $y=u^2+5$,$u=\arcsin x$ 构成复合函数 $y=(\arcsin x)^2+5$,其定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$.函数 $u=\arcsin x$ 的值域 $-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$ 含在 $y=u^2+5$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内.

若 $y=\arcsin u$,$u=x^2+5$,则这两个函数不能构成复合函数.因为 $u=x^2+5$ 的值域为 $u\geqslant 5$,而 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $-1\leqslant u\leqslant 1$.

若 $y=\arcsin u$,$u=x^2+1$,则这两个函数所构成的复合函数 $y=\arcsin(x^2+1)$,仅在点 $x=0$ 处有定义,当 $x=0$ 时,$y=\frac{\pi}{2}$,故值域也是一个孤立点.

再如 $y=\ln(u+1)$,$u=\sin x$,函数 $u=\sin x$ 的定义域为 $-\infty<x<+\infty$,值域为 $-1\leqslant u\leqslant 1$,$y=\ln(u+1)$ 的定义域为 $u>-1$,当 $u=-1$ 时 $\ln(u+1)$ 无意义,故它们构成的复合函数 $y=\ln(\sin x+1)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{2}+2(k+1)\pi\right)$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

当 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 为分段函数时,求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,需依据 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集的情况,确定 $y$ 与 $x$ 之间的映射关系.

**例 1.1.1**　已知二分段函数

$$y=f(u)=\begin{cases}1, & u\leqslant -1,\\ e^{u+1}, & u>-1;\end{cases}\quad u=\varphi(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0,\\ 1-x, & x>0.\end{cases}$$

求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.

**解**:当 $x\leqslant 0$ 时,$u=1+x$,故当 $x\leqslant -2$ 时,$u\leqslant -1$.当 $x>0$ 时,$u=1-x$,故当 $x\geqslant 2$

时,$u\leqslant -1$.又当 $u\leqslant -1$ 时 $y=1$.由此知当 $x\leqslant -2$ 及 $x\geqslant 2$ 时,$y=1$.

当 $-2<x\leqslant 0$ 时,$u=1+x>-1$,此时 $y=e^{u+1}=e^{2+x}$.当 $0<x<2$ 时,$u=1-x>-1$,此时 $y=e^{u+1}=e^{2-x}$.综合以上结果,得复合函数

$$y=f[\varphi(x)]=\begin{cases}1, & x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 2,\\ e^{2+x}, & -2<x\leqslant 0,\\ e^{2-x}, & 0<x<2.\end{cases}$$

**例 1.1.2** 已知函数

$$y=f(u)=\begin{cases}1, & |u|\leqslant 1,\\ 0, & |u|>1;\end{cases}\quad u=\varphi(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x=-1.\end{cases}$$



求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.

**解:**函数 $u=\varphi(x)$的值域为 $0\leqslant u<2$,$y=f(u)$的定义域为 $-\infty<u<+\infty$.当 $|x|\geqslant 1$ 时,$u$ 取值为 0 或 1,满足 $|u|\leqslant 1$,此时 $y=1$.

当 $|x|<1$ 时,$u=1+x$,当 $-1<x\leqslant 0$ 时,$0<1+x\leqslant 1$,满足 $|u|=|1+x|\leqslant 1$,此时 $y=1$.当 $0<x<1$ 时,$1<1+x<2$,满足 $|u|=|1+x|>1$,此时 $y=0$.

综上所述,得

$$y=f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & 0<x<1,\\ 1, & \text{其他}.\end{cases}$$

**问题 1.2 函数 $y=f(x)$满足什么条件时具有反函数,如何求分段函数的反函数?**

**答:**若函数 $y=f(x)$的定义域为 $D_f$,值域为 $Z_f$,如果 $f$ 是 $D_f$ 到 $Z_f$ 上的一一映射,即任给 $x\in D_f$,有唯一的 $y\in Z_f$ 与之对应,反之任给 $y\in Z_f$ 有唯一的 $x\in D_f$ 与之对应,则函数 $y=f(x)$必有反函数 $x=\varphi(y)$.

由此知单值单调函数必有反函数,且反函数也是单调的.这是反函数存在的一个充分条件,不是必要条件.

**例 1.2.1** 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$$

是否有反函数,若有,求出反函数.

**解:**$f$ 构成 $D_f=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$与 $Z_f=\{y\mid -\infty<x<+\infty\}$上的一一对应.任给 $x\in D_f$,显然有唯一的 $y\in Z_f$ 与之对应,反之任给 $y\in Z_f$,当 $y\geqslant 0$ 时,则 $x=\sqrt{y}\geqslant 0$ 与之对应,当 $y<0$ 时则 $x=\dfrac{1}{y}<0$ 与之对应,故其反函数存在,且 $y=f(x)$的反函数为

$$y=\varphi(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x<0.\end{cases}$$

容易看出,函数 $y=f(x)$ 在定义域 $D_f$ 上不是单调函数,但在 $[0,+\infty)$ 上 $y=f(x)$ 单调增加,在 $(-\infty,0)$ 上 $y=f(x)$ 单调减少.

**例 1.2.2** 求函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$$

的反函数 $y=\varphi(x)$.

**解**:这是一个分段函数,且为单调增函数,故必有反函数.按 $f(x)$ 的定义域分段讨论 $x$、$y$ 之间的对应关系.

当 $x<-1$ 时,$y=1-2x^2<-1$,且 $x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y=x^3$,故 $-1\leqslant y\leqslant 8$,且 $x=\sqrt[3]{y}$.

当 $x>2$ 时,$y=12x-16>8$,且 $x=\dfrac{y+16}{12}$.

由此得出 $y=f(x)$ 的反函数

$$y=\varphi(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$$

**问题 1.3 数列极限定义中 $\varepsilon$、$N$ 应如何理解?**

对于 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$ 的定义:任给 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N$,使得对于 $n>N$ 的一切 $u_n$,不等式 $|u_n-a|<\varepsilon$ 恒成立,考虑以下几个问题.

(1)给定 $\varepsilon>0$,$N$ 是否唯一确定?

(2)当 $n>N$ 时 $|u_n-a|<\varepsilon$,是否表示随 $n$ 增大,$|u_n-a|$ 必定减小?

(3)是否可将 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$ 的定义改成:对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N$,对于 $n\geqslant N$ 的一切 $u_n$,$|u_n-a|\leqslant\varepsilon$ 恒成立?

(4)如何表述或证明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq a$?

**答**:(1)给定 $\varepsilon>0$,$N$ 并不是唯一确定的.例如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,任给 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,即 $n\geqslant N+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$,$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 恒成立.这表明对于大于 $N$ 的一切整数 $n$ 均有 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.故若取 $N_1=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+k$,$k$ 为任意一个正整数,则当 $n>N_1$ 时必有 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,故可取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ 也可取 $N$ 为大于 $\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的任何正整数.即给定 $\varepsilon>0$,$N$ 不是唯一确定的.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$ 的定义中,“对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N$,当 $n>N$ 时

$|u_n-a|<\varepsilon$ 恒成立"说明对于 $n>N$ 的一切 $u_n$，皆落在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内，随 $n$ 的增大 $|u_n-a|$ 不一定是减小的，也就是 $|u_n-a|$ 并不是单调减小地趋于 0. 例如 $u_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ (-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{n}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，但 $|u_n-0|=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ $|u_n-0|$ 并不随 $n$ 的增加而单调地减小. 但 $|u_n-0|\to 0$.

又如 $u_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{2^n+1}{2^n}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$，但 $|u_n-1|=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{2^n}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ $|u_n-1|$ 也不是随 $n$ 增大而单调地减少.



(3)所给定义与原定义等价. 先看 $|u_n-a|<\varepsilon$，与 $|u_n-a|\leqslant\varepsilon$. 原定义："任给 $\varepsilon>0$，当 $n$ 足够大，有 $|u_n-a|<\varepsilon$."现定义："任给 $\varepsilon_1>0$，当 $n$ 足够大，有 $|u_n-a|\leqslant\varepsilon_1$. 由 $\varepsilon,\varepsilon_1$ 的任意性，可知二者等价.

再看 $n>N$ 与 $n\geqslant N$. 由该问题的(1)中已知 $N$ 不是唯一的，$n>N$ 与 $n\geqslant N+1$ 所指的 $n$ 是一致的，故原定义中"对于 $n>N$ 的一切 $u_n$"与现定义中"对于 $n\geqslant N_1$ 的一切 $u_n$"是等价的，只需取 $N_1=N+1$ 即可.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq a$ 表明极限定义不成立，也就是要否定"对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N$，当 $n>N$ 时 $|u_n-a|<\varepsilon$ 恒成立"的事实. 这就是"存在一个正数 $\varepsilon_1$，对任何正整数 $N$，至少存在一个 $n_1>N$，使 $|u_{n_1}-a|\geqslant\varepsilon_1$".

**问题 1.4　若数列 $\{u_n\}$ 收敛，则数列 $\{u_{2n-1}\}$，$\{u_{2n}\}$，$\{u_{2n-1}+u_{2n}\}$，$\{|u_n|\}$ 是否收敛？反之，若数列 $\{u_{2n-1}\}$，$\{u_{2n}\}$ 皆收敛，那么 $\{u_n\}$ 是否必收敛？又若 $\{u_{2n-1}+u_{2n}\}$ 收敛，$\{u_n\}$ 是否收敛？若 $\{|u_n|\}$ 收敛，$\{u_n\}$ 是否必收敛？**

**答**：数列 $\{u_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$. 由定义知任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N$，当 $n>N$ 时，$|u_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，故当 $2n-1>N$ 时，必有 $|u_{2n-1}-a|<\varepsilon$，$|u_{2n}-a|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n-1}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n}=a$，即 $\{u_{2n-1}\}$、$\{u_{2n}\}$ 皆收敛. 实际上，若数列 $\{u_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，则任何子列 $\{u_{n_k}\}$ 也收敛，且 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=a$. 反之，若数列 $\{u_n\}$ 的任何子列都收敛于 $a$，则数列 $\{u_n\}$ 必收敛于 $a$.

又由于当 $n>N$ 时，$|u_{2n-1}+u_{2n}-2a|\leqslant|u_{2n-1}-a|+|u_{2n}-a|<2\varepsilon$，且 $||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon$，故数列 $\{u_{2n-1}+u_{2n}\}$ 及 $\{|u_n|\}$ 也收敛.

反之，若数列 $\{u_{2n-1}\}$、$\{u_{2n}\}$ 皆收敛，则数列 $\{u_n\}$ 未必收敛. 例如数列 $\{u_{2n-1}\}=\left\{\dfrac{1}{2n-1}\right\}$，$\{u_{2n}\}=\left\{\dfrac{2n-1}{2n}\right\}$ 是收敛的，$\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n-1}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n}=1$. 数列 $\{u_n\}$ 为 $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},$

$\frac{3}{4},\cdots,\frac{1}{2n-1},\frac{2n-1}{2n},\cdots$是发散的.但若数列$\{u_{2n-1}\}$及$\{u_{2n}\}$皆收敛于 $a$,即$\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n}=a$,则必有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,数列$\{u_n\}$也收敛于 $a$.

若数列$\{u_{2n-1}+u_{2n}\}$收敛,则数列$\{u_n\}$未必收敛.例如数列 $1,-1,1,-1,\cdots,1,-1,\cdots$是发散的,但 $u_{2n-1}+u_{2n}\equiv 0$,故数列$\{u_{2n-1}+u_{2n}\}$收敛.又$|u_n|\equiv 1$,则数列$\{|u_n|\}$也收敛.这个例子也说明数列$\{|u_n|\}$收敛,数列$\{u_n\}$未必收敛.

**问题 1.5　已给数列$\{u_n\}$及$\{v_n\}$,若数列$\{u_nv_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}u_nv_n=0$,则下列论述是否正确?**

**(1)若$\{u_n\}$发散,则$\{v_n\}$必收敛于 0,即必有$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.**

**(2)若$\{u_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,则$\{v_n\}$必为有界数列.**

**(3)若$\{u_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,则$\{v_n\}$必收敛.**

**(4)若$\{u_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a(a\neq 0)$,则$\{v_n\}$必收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.**

**答:**(1)不正确,例如

$$u_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为奇数},\\0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}\qquad v_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\n, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

数列$\{u_n\}$发散,$u_nv_n\equiv 0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}u_nv_n=0$,但$\{v_n\}$发散.

(2)、(3)不正确.例如 $u_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & n\text{ 为奇数},\\0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ $\{u_n\}$为收敛数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,取

$$v_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

则 $u_nv_n\equiv 0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}u_nv_n=0$.但数列$\{v_n\}$不收敛,也不是有界数列.

(4)正确.因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a(a\neq 0)$,故不妨设 $u_n\neq 0$,$v_n=\frac{u_nv_n}{u_n}$,由极限运算法则知

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}u_nv_n}{\lim\limits_{n\to\infty}u_n}=\frac{0}{a}=0.$$

故数列$\{v_n\}$收敛于 0.

**问题 1.6　极限四则运算法则在什么条件下成立?**

若$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)$存在,能否得出$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$及$\lim\limits_{n\to\infty}v_n$必存在?若$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)$及$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)$皆存在,能否断定$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$及$\lim\limits_{n\to\infty}v_n$皆存在?

**答:**极限的四则运算是指:若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=b$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n\pm v_n)=a\pm b$,$\lim\limits_{n\to\infty}u_nv_n=ab$,且当 $b\neq 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}$.即在 $u_n$、$v_n$ 的极限都存在的条件下,可以由极限的四则运算求出和、差、积、商(分母极限不为零)的极限.

若$\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)$存在，不能断言$\lim_{n\to\infty}u_n$、$\lim_{n\to\infty}v_n$存在.但若$\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)$及$\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)$都存在，则由于$u_n=\frac{1}{2}[(u_n+v_n)+(u_n-v_n)]$，$v_n=\frac{1}{2}[(u_n+v_n)-(u_n-v_n)]$，由极限的四则运算知$\lim_{n\to\infty}u_n$及$\lim_{n\to\infty}v_n$皆存在，且

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)+\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)],$$

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)-\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)].$$

**问题 1.7　收敛数列、有界数列、发散数列、无界数列、无穷大量，这几个概念之间是什么关系？**

**答：**若数列$\{u_n\}$收敛，则$\{u_n\}$必为有界数列.反之，有界数列未必收敛.例如$u_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & n\text{为奇数},\\ \frac{n-1}{n}, & n\text{为偶数},\end{cases}$ 则$|u_n|\leqslant 1$，$\{u_n\}$为有界数列，但$\lim_{n\to\infty}u_n$不存在，即$\{u_n\}$是发散的.



若$\{u_n\}$为单调有界数列，则$\{u_n\}$必为收敛数列.显然，反之不成立.

若$\{u_n\}$为无界数列，则$\{u_n\}$必发散.事实上，用反证法可以证明.若$\{u_n\}$为收敛数列，则$\{u_n\}$必为有界数列，与$\{u_n\}$无界矛盾.但反之，发散数列未必无界.例如1中给出的$\{u_n\}$是发散的，但$|u_n|\leqslant 1$.

由上可知若数列$\{u_n\}$为无穷大量，即$\lim_{n\to\infty}u_n=\infty$，则$\{u_n\}$必为无界数列，故$\{u_n\}$发散.但无界数列$\{u_n\}$未必是无穷大量.例如$u_n=\begin{cases}n, & n\text{为奇数},\\ 1, & n\text{为偶数},\end{cases}$ $\{u_n\}$为无界数列，但$\lim_{n\to\infty}u_n\neq\infty$，但该数列的子列$\{u_{2n-1}\}$为无穷大量，即$\lim_{n\to\infty}u_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(2n-1)=\infty$.事实上有以下定理.

**定理**　$\{u_n\}$为无界数列的充分必要条件是存在无穷大子列，即存在子列$\{u_{n_k}\}$，$\lim_{k\to\infty}u_{n_k}=\infty$.

**问题 1.8　如何求数列$\{u_n\}$的极限？**

**答：**根据数列极限$\lim_{n\to\infty}u_n=a$的定义，只能由$|u_n-a|<\varepsilon$是否对一切$n>N$成立，判断$a$是否为$u_n$的极限，而不能用来求数列的极限.求数列$\{u_n\}$的极限，通常分两步：首先判断数列$\{u_n\}$是否收敛，若数列$\{u_n\}$收敛，则进行第二步，求$\lim_{n\to\infty}u_n$.也就是先判断$\lim_{n\to\infty}u_n$的存在性，再求极限值.

判断$\lim_{n\to\infty}u_n$的存在性，一般采用单调有界准则或夹挤准则.当然利用夹挤准则可同时得到所求的极限值.

**例 1.8.1**　已知$u_1>0$，$u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\,(n=1,2,\cdots)$，求$\lim_{n\to\infty}u_n$.

**解：**显然$u_n>0\,(n=1,2,\cdots)$.对于这种类型的数列，一般先讨论它的单调有界性，分两种情况.

若$u_1\leqslant 2$，则$u_2=\sqrt{2+u_1}\leqslant\sqrt{2+2}=2$.依此知，若$u_n\leqslant 2$，则$u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\leqslant$